经济与金融高级教程

Advanced Textbooks in Economics and Finance

丛书主编　邹恒甫

Editor in Chief Heng-Fu Zou

经济学中的优化方法

Optimization in Economics

龚六堂　编著

Liutang Gong

北京大学出版社

Peking University Press

经济与金融高级教程

Advanced Textbooks in Economics and Finance

Editor in Chief Heng-Fu Zou

Optimization in Economics

Liutang Gong

Peking University Press

图书在版编目(CIP)数据

经济学中的优化方法/龚六堂编著. - 北京:北京大学出版社,2000.8
ISBN 7-301-04558-1

Ⅰ. 经… Ⅱ. 龚… Ⅲ. 最优化-应用-经济 Ⅳ. F224.31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 61270 号

书　　　名:经济学中的优化方法
著作责任者:龚六堂
责 任 编 辑:梁鸿飞
标 准 书 号:ISBN 7-301-04558-1/F·342
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62753121
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者:兴盛达激光照排中心
印　刷　者:中国科学院印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　15.75 印张　240 千字
2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷
定　　　价:25.00 元

前　言

经济学作为研究人们理性行为和厂商最优行为的理论，它研究的范畴主要集中在比较静态分析、均衡行为、资本(物力资本和人力资本)的积累与边际生产率的关系、人均收入与人口增长、技术进步与劳动分工的专业化和新的工具与方法在生产中的应用及其对经济的影响。在宏观经济学中，人们考虑的是各种经济参数在有限个时间点或者无限个时间点之间的变化情况，如随着时间的变化，产出、消费水平、工资水平和资本存量水平如何改变，因此描述他们的变化本身就要借助于数学中的微分方程、动力系统或者差分方程等分析工具。同时，要研究消费者的理性行为必须用到优化理论(线性规划、非线性规划和动态规划)。在 1938 年著名经济学家 Von Neumann 采用线性规划来研究经济增长模型，1928 年 Ramsey 采用变分法研究消费者的储蓄与消费行为，后来经济学家更是广泛地应用了数学工具。在微观经济学中，人们考虑的是消费者的效用极大化、厂商的利润极大化、厂商最优的进入成本等等，这些归根结底都是优化问题。

本书主要讨论优化方法在经济中的应用。优化问题可以分成静态和动态问题两个方面。处理静态问题的方法有第二章的线性规划，第三章的非线性规划；处理动态问题的方法有第四章的变分法，第五章的最优控制，第六章和第七章的动态规划。同时动态问题又分为连续的处理方法和离散的处理方法两个方面，连续的处理方法有：第四章的变分法，第五章的最优控制和第六章的动态规划；离散问题的处理方法有：第三章的非线性规划和第七章的动态规划方法。当然，这种分类处理方法也不是绝对的。

本书可以作为高年级本科生、研究生的数理经济学、动态经济学等课程的教材。本书是在北京大学光华管理学院邹恒甫教授的指导下完成的，同时也要感谢黄训腾老师和武汉大学高级研究中心其他老师的大力支持。北京大学出版社彭松建社长对本书的问世倾注了大量心血，在此一并表示感谢。

第一章　凸集合和凸函数

在经济中我们经常遇到消费者的预算集合，厂商的生产可行集合等等，这些集合在分析中具有很大的作用.本章给出简单的凸分析知识，包括凸集合、凸函数，同时给出了经济中经常遇到的常微分方程的求解方法和稳定性分析.

§1　凸集合

1. 凸集合的定义和性质

我们先给出凸集合的定义：

定义 1

集合 $C \subset R^n$ 叫做凸的，如果对任意的 $x_1, x_2 \in C$ 和任意的 $\lambda \in [0,1]$，有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$ 成立.

例　直线上的闭集合 $[a,b]$，开集合 $(a,b) \subset R$ 是 R 上的凸集合，平面中的圆盘 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant r^2\} \subset R^2$ 是凸集合，三维空间中的球

$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant r^2\}\subset R^3$ 是凸集合.但是,三维空间中的球面 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=r^2\}\subset R^3$ 不是凸集合,平面中的圆环 $\{(x,y)\mid s^2\leqslant x^2+y^2\leqslant r^2\}\subset R^2$ 不是平面上的凸集合.

[注] 规定空集(ϕ),全集合(R^n)和单点集合为凸集.

在微观经济学中,对于厂商来讲,它的生产可行集合 Y 表示所有的可行性生产计划的集合,一般要求它是凸集合,也就是对于任意的 $y_1,y_2\in Y$ 为两个生产可行性计划,任意的 $\lambda\in[0,1]$ 有 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in Y$,即任意的两个可行性生产计划的凸组合仍然是可行的.这一假设大大地丰富了生产可行集合的元素.同时,要素需求集合表示所有能生产出产出 y 的投入品集合,即 $V(y)=\{x\in R^n\mid(y,-x)\in Y\}$.经济中一般要求要素需求集合是一个凸集合,它的凸性表示如果任何两个投入都能生产产出 y,那么这两个投入的凸组合也能生产出产出 y.另外,收入为 m 的消费者的预算约束集合 $\{x\mid px\leqslant m\}$ 也是凸集合,它表示对于消费者来讲,如果两个消费组合是可行的,那么它们的凸组合也是消费者的可行消费组合.

凸性在经济中相当重要,因此我们应该了解其性质.一般地,凸集合具有下面一些性质:

性质 1

集合 $C\subset R^n$ 是凸的等价于对任意的 $x_i\in C$, $i=1,\cdots,m$ 和任意的 $\lambda_i\in[0,1]$, $i=1,2,\cdots,m$,有 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\in C$ 成立.

事实上,性质 1 当 $m=2$ 时是显然成立的,这可以从定义 1 直接得到.对于一般的情形由数学归纳法可以很简单地得到.

性质 2

对于任意的凸集合 $C,D\subset R^n$ 和正常数 $t>0$, $C\cap D$, $C+D$ 和集合 tC 都是凸的.进一步地,若 $C_i\subset R^n$, $i=1,2,\cdots,m$, $\bigcap_{i=1}^{m}C_i$ 也为凸集合.

[注]　两个凸集合的并集不一定是凸的.

性质 3

集合 $C \subset R^n$ 为凸集合,函数 f 为 $C \to R^n$ 的线形函数,即 $f(x)=Ax+B$, $\forall x \in C$,这样集合 $f(C)$ 也为凸集合.

性质 4

若 $C \subset R^n$ 为凸集合,函数 $z(t):[t_0,t_1] \to C$,则有

$$\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} z(s)ds \in \overline{C}$$

定义 2

一个集合的凸包就是包含这个集合的最小凸集合.等价地,也就是包含该集合的所有凸集合的交集;或者是该集合的所有凸组合构成的集合.我们记集合 S 的凸包为 $\mathrm{co}(S)$.因此

$$\begin{aligned}\mathrm{co}(S) &= \bigcap_{C(\text{凸})\supset S} C \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i \mid x_i \in S, \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1\right\}\end{aligned}$$

显然,凸集合的凸包为凸集合本身.凸包运算很重要,在经济中很多非凸的情形往往要通过凸包运算变换成凸的情形进行处理,如在一般均衡的证明中就用到上面的技巧.

例　圆环 $\{(x,y) \mid s^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant r^2\}$ 的凸包就是圆盘 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant r^2\}$.

2. 凸集合的分离性质

首先引入超平面和半空间的概念.R^n 空间的超平面为下面的集合

$$H = \{x \in R^n \mid a^T x = \alpha\},$$

其中 $a \in R^n$ 为常向量，$\alpha \in R$ 为常数. 一个超平面正好把全空间分成两部分，我们分别叫做上半空间 H^+ 和下半空间 H^-，定义为

$$H^+ = \{x \in R^n \mid a^T x \geqslant \alpha\}; \quad H^- = \{x \in R^n \mid a^T x \leqslant \alpha\}$$

显然，R^n 空间的超平面和半空间都是 R^n 的凸集合.

R^n 空间的以原点为中心、半径为 r 的超球定义为

$$S = \{x \in R^n \mid \|x\| \leqslant r\},$$

其中 $\|x\|$ 为 R^n 空间的范数，定义为

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x^T x}.$$

分离性质就是把空间的两个集合用超平面分离. 首先给出下面的点与集合的分离引理.

【引理 1】

$C \subset R^n$ 为非空、凸、闭集合，且 $0 \notin C$，则存在超平面分离原点和集合 C. 即存在常向量 $a \in R^n$ 和常数 $\alpha \in R$，对任意的 $x \in C$ 有

$$a^T x \geqslant \alpha > 0.$$

证明 取以原点为中心，半径为 α 的超球 $S_\alpha(0) = \{x \in R^n \mid \|x\| \leqslant \alpha\}$，使得 $C \cap S_\alpha(0) \neq \phi$，这样 $C \cap S_\alpha(0) \neq \phi$ 为闭的、凸的和有界的. 因为函数 $\|x\|$ 的连续性，我们知道函数 $\|x\|$ 可以在 $C \cap S_\alpha(0)$ 上取得最小值，记最小值点为 x_0，即

$$\|x_0\| = \min_{x \in C \cap S_\alpha(0)} \|x\|$$

因此对于任意的 $x \in C \cap S_\alpha(0)$，$\|x_0\| \leqslant \|x\|$；进一步地，在集合 C 上，也有 $\|x_0\| \leqslant \|x\|$ 成立. 这样对任意的 $x' \in C$ 和任意的 $\lambda \in [0,1]$ 有

$$\lambda x' + (1 - \lambda) x_0 \in C$$

从而得到

$$\|\lambda x' + (1 - \lambda) x_0\| \geqslant \|x_0\|$$

把上面的不等式展开，得到

$$(\lambda x' + (1-\lambda)x_0)^T(\lambda x' + (1-\lambda)x_0) \geqslant x_0^T x_0$$

即

$$\lambda^2(x-x_0)^T(x'-x_0) + 2\lambda x_0^T(x-x_0) \geqslant 0 \qquad (1.1.1)$$

可以断言 $x_0^T(x-x_0)\geqslant 0$. 否则，如果 $\lambda x_0^T(x-x_0) < -e < 0$，可以选取 $\lambda\in[0,1]$充分小，使得

$$0 < \lambda^2(x-x_0)^T(x'-x_0) < 2e$$

因此得到

$$\lambda^2(x-x_0)^T(x'-x_0) + 2\lambda x_0^T(x-x_0) < 0$$

与方程(1.1.1)矛盾.

由 $x_0^T(x-x_0)\geqslant 0$，得到

$$x_0^T x \geqslant x_0^T x_0 > 0$$

取 $a = x_0$, $\alpha = x_0^T x_0$ 即可以得到引理的证明.

[注]　这里引理的条件是必须的.如果其中某条件违背，则上面的分离性质将不成立，可以从下面例子看到这一点.

在下面给出的例子中，图 1－1A 因为集合 C 没有凸性，因此违背引理条件，因此分离性质不成立. 在图 1－1B 中，因为集合 C 没有闭性，因此不存在超平面严格分离原点和集合 C.

关于分离性质，引理 1 给出了点与集合的分离性质，很容易可以推广到集合与集合的分离性质. 下面给出第一分离定理和第二分离定理.

【定理 1】　(第一分离定理)

集合 $C, C'\subset R^n$ 为不相交的凸集合，即 $C\cap C'=\phi$，则存在超平面分离集合 C, C'，即存在常向量 $a\in R^n$ 和常数 $\alpha\in R$，对任意的 $x\in C$，$y\in C'$，有

$$a^T x \leqslant \alpha \leqslant a^T y.$$

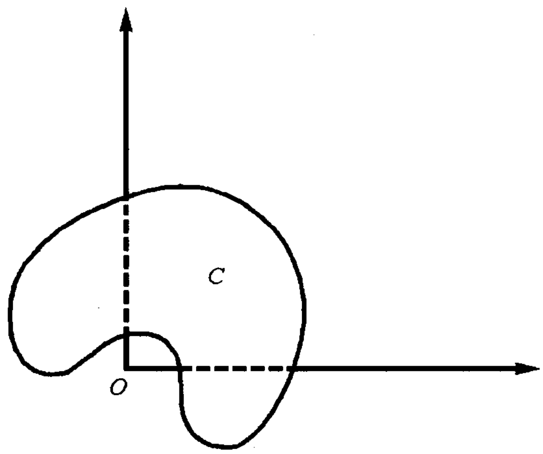

图 1-1A　C 没有凸性

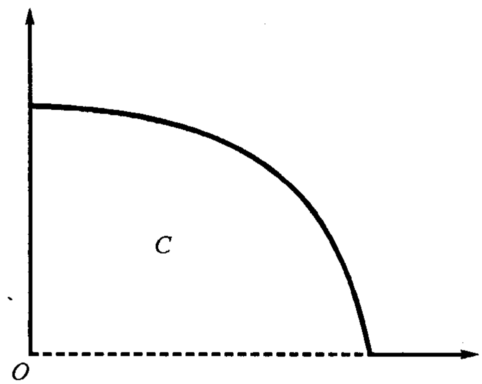

图 1-1B　C 没有闭性

[注]　这里的分离不一定是严格的.我们可以通过例子看到这一点.如集合 $C=\{(x,y)\mid y\geqslant 1/x\}$ 是闭的，$C'=\{(x,y)\mid y<0\}$，显然满足 $C\cap C'=\phi$.但是，不存在超平面严格分离 C,C'.要得到严格分离性质，必须对集合加以限制.

【定理 2】（第二分离定理）

集合 $C, C' \subset R^n$ 为不相交的凸集合，即 $C \cap C' = \phi$，且 C 为紧集合，C' 为闭集合. 则存在超平面严格分离集合 C, C'，即存在常向量 $a \in R^n$ 和常数 $\alpha \in R$，满足

$$\sup_{x \in C} a^T x < \alpha < \inf_{y \in C'} a^T y.$$

分离定理有很多重要的应用，我们只对其中在优化和经济学中有重要作用的加以说明，如 Farkas 引理.

Farkas 引理

假设 A 为 $m \times n$ 矩阵，b 为 n 维向量，对满足 $b^T y \geqslant 0$ 的所有 y 满足 $Ay \geqslant 0$ 等价于存在 $\rho \in R^m$，$\rho \geqslant 0$ 满足 $A^T \rho = b$.

或者等价表述为：不等式组 $b^T y < 0$，$Ay \geqslant 0$ 有解等价于 $A^T \rho = b$，$\rho \geqslant 0$ 无解（Farkas 引理的等价表述又称**择一性质**）.

证明　必要性是显然的，下面证明充分性. 构造集合

$$X = \{A^T x \mid x \geqslant 0\}$$

显然集合为 R^n 中的闭、凸子集. 若 $b \notin X$，由第二分离定理知道，存在非零向量 $\alpha \in R^m$，使得对任意的 $y \in X$ 有

$$\alpha^T y > \alpha^T b \tag{1.1.2}$$

又因为 $0 \in X$，因此我们有 $\alpha^T b < 0$.

下面证明对于任意的 $y \in X$ 有 $\alpha^T y \geqslant 0$. 事实上，若存在 $y^0 \in X$ 满足 $\alpha^T y^0 < 0$，我们总可以取 k 满足 $k y^0 \in X$ 和 $k > \dfrac{\alpha^T b}{\alpha^T y^0}$. 此时，我们得到 $\alpha^T k y^0 < \alpha^T b$，与方程(1.1.2)矛盾. 因此有 $\alpha^T y \geqslant 0$. 选择坐标向量 $e^i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，这样 $A e^i \in X$，因此有 $\alpha^T A \geqslant 0$，又因为 $\alpha^T b < 0$，这与引理的假设矛盾. 结论得证.

事实上，我们还可以用对偶原理给出上面引理的一个更简简单的证明.

凸集合的分离定理有很多应用,如在增长理论中证明支撑价格存在性的时候就用到.

支撑价格的存在性

假设效用函数 $u_t(x,y)$为从 $R_{t-1}\times R_t$ 的凸子集D_t 映射到R 的函数,而且满足:

假设 1 对任意的时间 t 是凹的和闭的;

假设 2 如果$(x,y)\in D_t$, $|x|<\xi<\infty$,则存在 $\zeta<\infty$满足$|y|<\zeta<\infty$.

对于无限期生存消费者,他要选择资本积累路径来极大化他的所有效用的贴现和 $\sum_{t=1}^{\infty}u_t(k_{t-1},k_t)$,注意到和 $\sum_{t=1}^{\infty}u_t(k_{t-1},k_t)$ 不一定存在.这样我们采用下面的最优性定义.我们称从相同时刻出发的路径$\{k_t\}$赶上$\{k_t'\}$,若对任意的 $\epsilon>0$,存在时间 $T(\epsilon)$,使得对任意的 $T>T(\epsilon)$满足

$$\sum_{t=1}^{T}[u_t(k_{t-1}',k_t')-u_t(k_{t-1},k_t)]>\epsilon.$$

如果路径$\{k_t\}$赶上所有的从初始值出发的路径,那么我们叫这条路径是最优的.考虑到极大化路径$\{k_t\}$,可以通过正规化,使得在每期的效用均为零,即 $u_t(k_{t-1},k_t)=0$.下面定义从 x 出发的路径$h_t=x$ 的值函数:

$$V_t(x)=\sup\Big(\liminf_{T\to\infty}\sum_{\tau=t-1}^{T}u_\tau(h_{\tau-1},h_\tau)\Big)$$

显然 $V_t(x)$是凹的.因为对任意的 t, $V_t(k_t)=0$. 同时,由最优化原理,对于任意的$(x,y)\in D_{t+1}$和 $y\in K_t$,值函数满足下面的等式:

$$V_t(x)=\sup\{u_{t+1}(x,y)+V_{t+1}\}$$

令$P_t=\{y\,|\,$存在 x,满足$(x,y)\in D_t\}$

$S=\{z \mid$ 存在 $y_i \in E, \alpha_i \in [0,1], \sum \alpha_i = 1$, 满足 $z=\sum \alpha_i y_i\}$
进一步假设

假设 3　相对于 S_t, $\mathrm{int}(P_t \cap K_t) \neq \phi$,同时,相对于 S_0, $k_0 \in \mathrm{int}K_0$.

这样,有下面结论:

【引理 2】

如果$\{k_t\}$为最大路径,在假设 1－3 下,则存在价格 $p_t \in E_t$,对任意 $y \in K_t$ 满足

$$V_t(k_t) - p_t k_t \geqslant V_t(y) - p_t y \tag{1.1.3}$$

并且 $V_t(k_t)$有限,同时对任意的$(x,y) \in D_{t+1}$,下式成立

$$\begin{aligned} & u_{t+1}(k_t, k_{t+1}) + p_{t+1}k_{t+1} - p_t k_t \\ & \geqslant u_{t+1}(x,y) + p_{t+1}y - p_t x \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

证明　用数学归纳法来证明结论.假设存在 $p_t \in E_t$,对任意的 $x \in K_t$ 满足

$$V_t(k_t) - p_t k_t \geqslant V_t(x) - p_t x \tag{1.1.5}$$

由于$\{k_t\}$为最优路径,这样在 $y=k_{t+1}$可以取得最优值.因此,对任意的$(x,y) \in D_{t+1}$和 $y \in K_t$,有

$$\begin{aligned} & u_{t+1}(k_t, k_{t+1}) + V_{t+1}(k_{t+1}) - p_t k_t \\ & \geqslant u_{t+1}(x,y) + V_{t+1}(y) - p_t x \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

记方程(1.1.6)左边为 v_{t+1},因此上式可以简记为

$$v_{t+1} - u_{t+1}(x,y) + p_t x \geqslant V_{t+1}(y)$$

这样,定义两个集合:

$A=\{(w,y) \mid y \in P_{t+1}$, 对某 x, $(x,y) \in D_{t+1}$, $w > v_{t+1} - u_{t+1}(x,y) + p_t x\}$;

$B=\{(w,y) \mid y \in K_{t+1}, w \leqslant V_{t+1}(y)\}$.

由 $P_{t+1} \cap K_{t+1} = \phi$，知道 A, B 为非空集合. 同时由方程(1.1.6)知道集合 A 和 B 是不相交的凸集合. 这样由凸集的分离定理，知道存在 $(\pi, -p_{t+1}) \neq 0$，对任意的 $(w, y) \in A$ 和 $(w', y') \in B$ 满足

$$\pi w - p_{t+1} y \geqslant \pi w' - p_{t+1} y'$$

由 A 和 B 的定义和 v_{t+1} 的定义，对任意的 $(x + y) \in D_t$ 和 $y' \in K_{t+1}$，有

$$\pi \{ u_{t+1}(k_t, k_{t+1}) + V_{t+1}(k_{t+1}) - p_t k_t - u_{t+1}(x, y) + p_t x \} - p_{t+1} y \geqslant \pi V_{t+1}(y') - p_{t+1} y' \qquad (1.1.7)$$

如果 $\pi = 0$，从方程(1.1.7)知道，对任意的 $y' \in K_{t+1}$ 和 $y \in P_{t+1}$ 有 $p_{t+1}(y' - y) \geqslant 0$. 但是由假设 3 可知，$P_{t+1}$ 与 S_{t+1} 平行. 因此有 $p_{t+1} = 0$. 这显然和 $(\pi, -p_{t+1}) \neq 0$ 矛盾. 因此知道 $\pi \neq 0$，不妨取 $\pi = 1$，这样在(1.1.7)中令 $x = k_t, y = k_{t+1}$ 得到，对任意的 $y' \in K_{t+1}$ 有

$$V_{t+1}(k_{t+1}) - p_{t+1} k_{t+1} \geqslant V_{t+1}(y') - P_{t+1} y'$$

令 $y' = k_{t+1}$ 得到，对任意的 $(x, y) \in D_{t+1}$ 有

$$u_{t+1}(k_t, k_{t+1}) - p_t k_t + p_{t+1} k_{t+1} \geqslant \{ u_{t+1}(x, y) - p_t x \} + p_{t+1} y$$

这就是要证明的结论. 至于初始的情形，由 $V_0(y)$ 的凹性知道存在 $(\pi, p_0) \neq 0$ 满足 $p_0 \in E_0$，并且对任意的 $x \in K_0$ 满足

$$\pi V_0(k_0) + p_0 k_0 \geqslant \pi V_0(x) + p_0 x$$

同样证明 $\pi \neq 0$，不妨取 $\pi = 1$，即可以得到要求的证明.

3. 凸锥、凸集合的极点

凸锥在经济分析中经常会用到. 凸锥的定义和性质如下：

定义 3

$C \subset R^n$ 为非空集合，如果任意的 $x \in C$，和任意的 $\lambda \geqslant 0$，都有

$\lambda x\in C$，我们叫 C 为以原点为顶点的锥；如果 C 还是凸的，我们把它叫做凸锥.

例　对于给定的点 $a\in R^n$，则半直线 $\{y\mid y=\lambda a,\lambda\geqslant 0\}$ 为凸锥. 对于线性经济，如果 A 为技术系数矩阵，u 为生产活动向量，则产出向量集合

$$Y=\{y\mid y=Au,u\geqslant 0\}$$

为凸锥.

一般地，如果 C_1 和 C_2 是 R^n 的两个凸锥，那么这两个凸锥的交与和都是 R^n 的凸锥. 这个性质可以推广到有限个凸锥仍然成立.

定义 4

$x\in C\subset R^n$ 叫做集合 C 的极点，如果它不能表示为该集合其他两点的凸组合，即不存在 $x_1\neq x_2\in C$，$\lambda\in(0,1)$ 满足 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$.

［注］　边界点不一定是极点，但极点一定是边界点.

定义 5

凸的多胞体是有限个半空间的交；有界的凸多胞体叫做凸多面体.

对于凸的多面体有很重要的性质：

【定理 3】

如果 K 为凸多面体，K 的极点集合为 ext$K$，则 K 的任何点都可以表示为它的极点的凸组合. 即对任意的 $x\in K$，存在 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in$ ext$K$ 和 $\lambda_i\in[0,1]$，$i=1,2\cdots,k$ 使得 $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i$.

上面的性质可以把整个凸多面体的问题简化为只考虑它的极点集合的元素即可. 在线性规划中，我们就应用了这个性质，从而得到求解问题的方法.

§2 凸函数

1. 凸函数的定义

定义 6

$C\subset R^n$ 为凸集合，函数 $f:C\to R$ 叫做凸的，如果对任意的 $x_1,x_2\in C$ 和任意的 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

成立．函数 $f:C\to R$ 叫做严格凸的，如果对任意的 $x_1\neq x_2\in C$ 和任意的 $\lambda\in(0,1)$ 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

成立．对应地 $-f$ 叫做凹的和严格凹的．

凸函数具有下面的性质：

性质 1

函数 f: $C\to R$ 叫做凸的等价于对任意的 $x_i\in C$, $i=1,\cdots,m$ 和任意的 $\lambda_i\in[0,1]$, $i=1,2,\cdots,m$, $\sum\lambda_i=1$ 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(x_i)$$

性质 2

函数 $f:C\to R$ 叫做凸的等价于对任意的 $x_1,x_2\in C$ 和任意的 $\lambda\in[0,1]$ 函数

$$\phi(\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$

为[0,1]上的凸函数.

性质 3

函数 $f: R\supset C\to R$ 叫做凸的等价于对任意的 $x_1<x_2<x_3$,成立:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

性质 1 和凸函数的定义的等价性是很容易证明的.性质 2 可以利用来把 R^n 中的问题转化成 R 中的问题加以考虑.性质 3 是一个凸函数的几何描述.

2. 运算法则

1. 函数 f,g 都是 $C\to R$ 的凸函数,$t>0$ 为正常数,则 $f+g$, tf 也是集合 C 上的凸函数.

2. $\{f_i\}_{i\in I}$ 都是集合 C 上的凸函数,则 $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 也是集合 C 上的凸函数.

3. 若函数 f 是集合 C 上的凸函数,则对任意的 α,其水平集

$$\Gamma_\alpha=\{x\in R^n \mid f(x)\leqslant\alpha\}$$

是 R^n 中的凸集合.

4. 函数 f 是 $C\to D$ 的凸函数,$g: D\to R$ 为单调上升的凸函数,则它们的复合函数 $g(f)$ 也是集合 C 上的凸函数.

3. 微分性质

性质 4

若 f 是一阶连续可微的函数,则 f 是集合 C 上的凸函数当且仅当