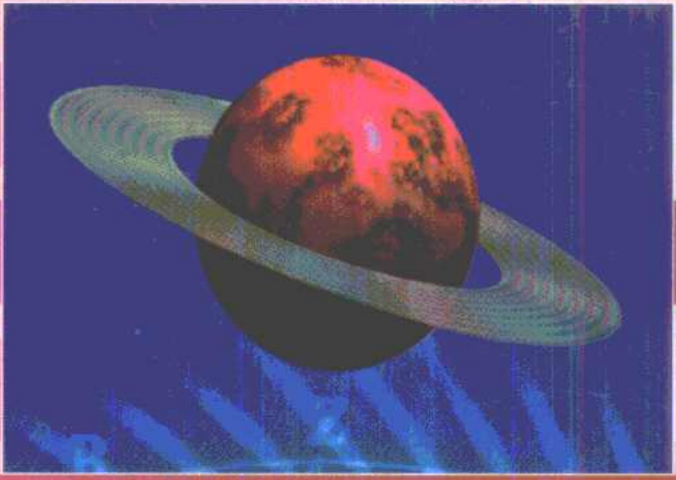
高等工业院校教材

高等数学

上册

邱忠文 李君湘 主编



天津大学出版社

高 等 工 业 院 校 教 材

高 等 数 学

（本科少学时适用）

上 册

邱忠文 李君湘 田秀恭 李彩英 编

天津大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　上册/邱忠文，李君湘主编．一天津：天津大学出版社，1999.8

ISBN 7-5618-1220-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①邱…　②李…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 36546 号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
电　话　发行部：022－27403647　**邮购部**：022－27402742
印　刷　天津市宝坻县第二印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　850mm×1168mm　1/32
印　张　11.25
字　数　293 千
版　次　1999 年 8 月第 1 版
印　次　1999 年 8 月第 1 次
印　数　1—3 000
定　价　15.00 元

前　　言

多年以来,天津大学"高等数学"课程一直使用本校统一的自编教材.由于全校面上的教学课时较多,不适于本科生高等数学少学时的专业使用.

为此,我校参加化工类高等数学教学改革的教师,在高等数学教研室的组织下,根据原国家教委批准印发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》,结合我校的教学实际,并参考了报考硕士研究生数学入学考试内容的要求,编写了这一套供本科高等数学少学时(150~160学时)使用的《高等数学》教材。

参加本书编写工作的有邱忠文、李君湘、田秀恭及李彩英.另外刘晓红、刘丹红、韩月丽及严丽等老师为本书的出版作了大量的辅助工作.限于编者的水平,书中不免仍有疏误,恳请读者指正.

编者

1999.03.

第 1 章　函　　数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映，是微积分学研究的主要对象．由于在中学已经学过函数的概念，在本章中，我们主要对初等函数的概念和性质作一简略介绍．

1.1　函数的概念

微积分学中研究的问题，绝大多数都是在实数范围内进行的．今后如果没有特别声明，本书中所提到的数，都是实数；所提到的数集，都是实数集．

按照习惯，全体自然数的集合记为 **N**；全体整数的集合记为 **Z**；全体有理数的集合记为 **Q**；全体实数的集合记为 **R**.

1.1.1　区间与邻域

定义 1.1　设数 a 与 b 满足 $a<b$，则数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)．即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

这里 a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点．

对开区间 (a,b) 而言，显然有 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$．

类似地，$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，称为闭区间．$a$ 和 b 仍然称为闭区间 $[a,b]$ 的左端点和右端点．显然 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$．

而把数集

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

都称为半开区间.

上面介绍的区间都是有限区间,数"$b-a$"称为这些有限区间的长度.除了有限区间之外,还有无限区间.引进记号"$+\infty$"(读为正无穷大)及"$-\infty$"(读为负无穷大),则

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\};[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\};(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$$

都是无限区间.而全体实数的集合 $\mathbf{R}$,可以记为$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$,当然也是无限区间.

今后,在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,就简称为"区间"并常用字母"I"表示.

邻域也是一个经常用到的数学概念,它实际上是微观条件下的区间.

定义 1.2　设 a 与 $\delta(\delta>0)$是两个数,称数集$\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$为点 a 的 δ 邻域.记为 $N(a,\delta)$.即

$$N(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 叫做这个邻域的中心,δ 叫做这个邻域的半径.

从定义 1.2 可知,邻域 $N(a,\delta)$实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$.为了体现微观性,尽管定义 1.2 中对 δ 没有什么限制,一般总认为 δ 是很小的正数.

因为 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于$|x-a|<\delta$.所以邻域 $N(a,\delta)$又可以表示为

$$N(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

有时候用到邻域的概念时,需要把邻域的中心去掉.去掉中心 a 的邻域$N(a,\delta)$,称为点 a 的去心邻域,记为 $N(\hat{a},\delta)$,即

$$N(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或

$$N(\hat{a},\delta)=N(a,\delta)\setminus\{a\}.$$

今后把点 a 的某一邻域也记为$N(a,\delta)$.

1.1.2 函数的定义

定义 1.3 设有两个数集 X、Y，f 是一个确定的对应规律，若对于每一个 $x \in X$，通过 f 都有唯一的 $y \in Y$ 和它对应. 记为

$$x \xrightarrow{f} y \text{ 或 } f(x)=y,$$

则称 f 为定义在 X 上的一元函数，简称为函数.

在定义 1.3 中，X 为 f 的定义域，通常用记号 D_f 来表示. 当 x 取遍 X 中的一切数时，与之对应的数 y 组成的数集 $V_f=\{y \mid y=f(x), x \in X\}$，称为函数 f 的值域.

一个函数是由对应规律和函数的定义域确定的. 而值域则是随着对应规律和定义域的给定而确定的. 习惯上把函数 f 说成"变量 y 是变量 x 的函数"，并用记号 $y=f(x)$ 来表示.

函数中表示对应关系的记号"f"也可以用其它的字母表示，例如"g"、"φ"、"F"、"G"等. 这时函数的记号相应地表示为 $y=g(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$ 和 $y=G(x)$ 等.

在不考虑函数的实际意义的时候，函数的定义域就是自变量所能取的使函数关系成立的一切实数的集合. 而函数的定义域 D_f 和值域 V_f 通常都是由区间或数集来表示的.

还应当指出，关于函数的定义，在定义 1.3 中，要求对每一个 $x \in X$，通过 f 都有唯一的 $y \in Y$ 和它对应. 因此常把这种函数叫做单值函数. 如果对于某些 $x \in X$，对应的 $y \in Y$ 不止一个数值，按照定义 1.3 就不能确定函数关系. 为了研究方便，也称一个 x 与多个 y 相对应的情况为多值函数. 今后，本书所提到的函数一律指单值函数，遇有多值函数的时候，每次只限于选定其中的一个单值分支来研究.

我们在平面上建立直角坐标系 xOy，把满足对应关系 $y=f(x)$ $(x \in D_f)$ 的数值 (x, y) 看作 xOy 平面上的一点，当 x 取遍

D_f 上的每一个数值时，就得到点(x,y)的一个集合 P：

$$P=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}.$$

点集 P 称为函数$y=f(x)$的图形.

例 1.1 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域 $D_f=[-1,1]$，值域 $V_f=[0,1]$.

例 1.2 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0, \\ -x, & \text{当 } x<0 \end{cases}$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $V_f=[0,+\infty)$.

例 1.3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & \text{当 } x>0, \\ 0, & \text{当 } x=0, \\ -1, & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $V_f=\{-1,0,1\}$. 其图形如图 1-1 所示.

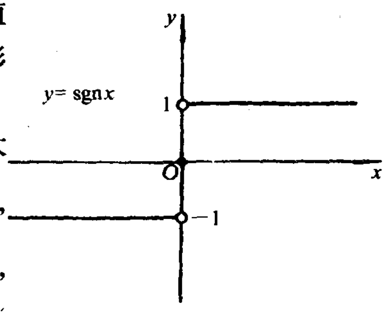


图 1-1

设 $x\in\mathbf{R}$，不超过 x 的最大整数记作 $[x]$. 则 $\left[\frac{4}{7}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[-2]=-2$，$[3]=3$.

例 1.4 函数 $y=[x]$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $V_f=Z$（全体整数）. 其图形为图 1-2 所示.

例 1.5 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x+1, & \text{当 } x>1. \end{cases}$$

的定义域 $D_f=[0,+\infty)$，值域 $V_f=[0,+\infty)$.

当 $x\in[0,1]$时，对应的函数值为 $f(x)=2\sqrt{x}$，如$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；

当 $x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值为 $f(x)=x+1$，如 $f(3)=3+1=4$.

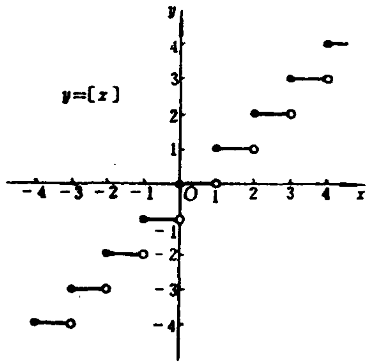


图 1-2

1.1.3　函数的性质

1. 有界性

若有正数 M 存在，使函数 $f(x)$在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在区间 I 上是有界函数；否则，$f(x)$在区间 I 上是无界函数.

如果存在常数 M(不一定局限于正数)，使函数 $f(x)$在区间 I 上恒有$f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$在区间 I 上有上界，并且任意一个 $N\geqslant M$ 的数 N 都是$f(x)$在区间 I 上的一个上界；如果存在常数 m，使 $f(x)$在区间 I 上恒有 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$在区间 I 上有下界，并且任意一个 $l\leqslant m$ 的数 l 都是$f(x)$在区间 I 上的一个下界.

显然，函数 $f(x)$在区间 I 上有界的充分必要条件是$f(x)$在区间 I 上既有上界又有下界.

例 1.6　函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

解　因为无论 x 取任何实数，都有$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

从例 1.6 中可以看到，任何大于 1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的上界；而任何小于 -1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的下界.

例 1.7　函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$[1,2]$上是有界的，在区间

$(0,1)$内是无界的.

解 由于 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 上满足 $|f(x)|\leqslant 1$，显然 $f(x)$在$[1,2]$上是有界的.

而 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内，无论给定多么大的正数 M(当然会有 $M>1$)，必有 $x_1=\frac{1}{2M}\in(0,1)$，使 $|f(x_1)|=2M>M$. 也就是说，$f(x)$在区间$(0,1)$内的某一点处，对应的函数值的绝对值，必定大于预先给定的任何正数. 故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内是无界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $y=f(x)$在区间 I 上为单调增加(或单调减少)的函数.

如果函数 $f(x)$在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$在区间 I 上为严格单调增加(或严格单调减少)的函数.

例 1.8 函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的；在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的.

而函数 $y=x$、$y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内都是单调增加的.

3. 奇偶性

若函数 $f(x)$在关于原点对称的区间 I 上满足$f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$)则称 $f(x)$为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形是关于 y 轴对称的；奇函数的图形是关于原点对称的.

例如，$f(x)=x^2$，$g(x)=x\sin x$ 在定义区间上都是偶函数.

而 $F(x)=x$，$G(x)=x\cos x$ 在定义区间上都是奇函数.

4.周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，对一切的 x 均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数.并把 T 称为 $f(x)$ 的周期.应当指出的是，通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期.

对三角函数而言，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的性质，除了有界性与无界性之外，单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质，而不是每一个函数都一定具备的.

1.1.4 复合函数与反函数

1.复合函数

设 $y=f(u)$ 是数集 Y 上的函数，$u=\varphi(x)$ 是由数集 X 到数集 Y 的一个非空子集 Y_φ 的函数.因此，对每一个 $x\in X$，通过 u 都有唯一的 y 与它对应，这时在 X 上产生了一个新的函数，用 $f\circ\varphi$ 表示，并称 $f\circ\varphi$ 为 X 上的复合函数，记为

$$x\xrightarrow{f\circ\varphi}y,(f\circ\varphi)(x)=y \text{ 或 } y=f[\varphi(x)],x\in X.$$

其中 u 叫做中间变量，X 是复合函数 $f\circ\varphi$ 的定义域.$f\circ\varphi$ 表示由 x 产生 y 的对应规律.

应当说明的是复合函数 $(f\circ\varphi)(x)$ 的定义域 X 是不能等同于函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的.数集 X 是使函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 Y_φ 满足 $Y_\varphi\subseteq Y$ 的实数所组成.

复合函数是经常遇到的一种函数结构，例如由物理学知道，物体的动能 E 与速度 v 的函数关系是 $E=\frac{1}{2}mv^2$（这里 m 为物体的质量）.如果将此物体以初速度 v_0 垂直向上抛出，由于地球引力

的关系,这时速度 v 与时间 t 有下面的函数关系 $v=v_0-gt$. 于是,物体的动能成为时间 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2,$$

它就是复合函数,其中 v 是中间变量.

又例如 $y=\sin x^2$,是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数,其定义域为 $\mathbf{R}$. 而函数 $y=\sqrt{x+4}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x+4$ 复合而成的复合函数,其定义域为 $[-4,+\infty)$. 它是中间变量 $u=x+4$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 的子集.

例 1.9 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}$. 求 $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{[\varphi(x)]^2+1}=\dfrac{1}{x^2+2}$,

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{1+[f(x)]^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{x^2+1}.$$

从例 1.9 可以看出 $f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$. 也就是说复合函数的复合次序是不能交换的.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 V_f. 对于任意的 $y\in V_f$,在 D_f 上至少可以确定一个 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,就可以得到一个新的函数:$x=f^{-1}(y)$. 我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数,而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

应当说明的是,虽然直接函数 $y=f(x)$ 是单值函数,但是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 却不一定是单值的. 例如,$y=f(x)=x^2$ 的定

义域为 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $V_f=[0,+\infty)$. 任取非零的 $y\in V_f$,则适合 $y=x^2$ 的 x 的数值有两个:$x_1=\sqrt{y}$,$x_2=-\sqrt{y}$. 所以,直接函数 $y=x^2$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$是多值函数:$x=\pm\sqrt{y}$. 如果把 x 限制在区间$[0,+\infty)$上,则直接函数 $y=x^2$,$x\in[0,+\infty)$的反函数 $x=\sqrt{y}$是单值的. 并称 $x=\sqrt{y}$为直接函数$y=x^2$,$x\in\mathbf{R}$ 的反函数的一个单值分支. 显然,反函数的另一个单值分支为 $x=-\sqrt{y}$.

若 $y=f(x)$有反函数,则有恒等式

$$f^{-1}[f(x)]\equiv x,x\in D_f.$$

相应地有

$$f[f^{-1}(y)]\equiv y,y\in V_f.$$

例如,直接函数 $y=f(x)=\frac{3}{4}x+3$,$x\in\mathbf{R}$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)=\frac{4}{3}(y-3)$,$y\in\mathbf{R}$,并且有

$$f^{-1}[f(x)]=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x+3\right)-3\right]\equiv x,$$

$$f[f^{-1}(y)]=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right]+3\equiv y.$$

由于习惯上 x 表示自变量,y 表示因变量,于是我们约定 $y=f^{-1}(x)$也是直接函数 $y=f(x)$的反函数.

反函数 $x=f^{-1}(y)$与 $y=f^{-1}(x)$,这两种形式都要用到. 应当说明的是函数 $y=f(x)$与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$具有相同的图形. 而直接函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

定理 1.1 设函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加(或单调减少),与区间 I 相对应的值域为 V_f,那么在区间 I 上必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,它在 V_f 上也是单调增加(或单调减少)的.

例如，$y=\sin x$ 是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调增加的函数，相应的值域为 $[-1,1]$. 其反函数 $x=\arcsin y$ 不仅存在，而且还是 $[-1,1]$ 上单调增加的函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\frac{x+2}{x^2-4}$;　　(2) $y=\arcsin\frac{2x-1}{7}$;

(3) $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$; (4) $y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\lg(1-x)}$.

2. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f(x)$ 及 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

3. 若 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当 -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 当 0<x<+\infty.\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(5)$ 及 $f(x-1)$.

4. 设单值函数 $f(u)$ 满足关系式

$f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0$，$u\in(0,10]$. 且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

5. 设 $y=\frac{x}{2}f(t-x)$，且当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}t^2-t+5$，求 $f(x)$.

6. 判定函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ 的奇偶性.

7. 求函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的周期.

8. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 (a,b) 内既有上界，又有下界.

9. 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & 当 x>0,\\ 0, & 当 x=0,\\ -1-x^2, & 当 x<0\end{cases}$ 的反函数.

10. 设函数 $f(x)$ 满足关系式

$$af(u)+bf\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{c}{u}, (u\neq 0)$$

其中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

11. 求由函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 所确定的复合函数 $f[f(x)]$ 的定义域.

* 12. 求函数 $y=f(x)=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 的定义域.

1.2 初 等 函 数

1.2.1 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数这6类函数叫做基本初等函数. 这些函数在中学的数学课程里已经学过.

1. 幂函数　$y=x^{\alpha}\ (\alpha\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 α 的取值不同而不同,但是无论 α 取何值,幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义. 当 $\alpha\in\mathbf{N}$ 或 $\alpha=\frac{1}{2n-1}$, $n\in\mathbf{N}$ 时,定义域为 $\mathbf{R}$. 常见的幂函数的图形如图 1-3 所示.

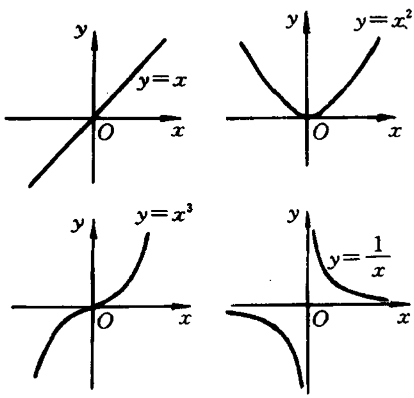


图 1-3

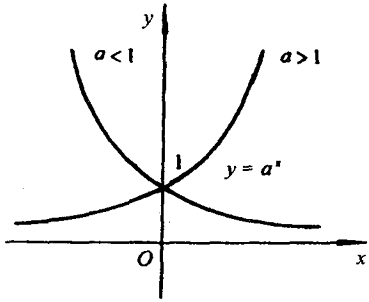


图 1-4

2. **指数函数** $y=a^x(a>0,a\neq1)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.指数函数的图形如图 1-4 所示.

3. **对数函数** $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数$y=a^x$ 的反函数.其图形见图 1-5.

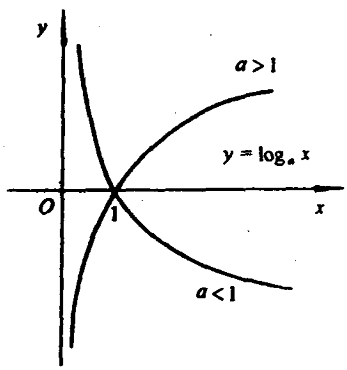


图 1-5

在工程中,常以无理数 $e=2.718281828\cdots$作为指数函数和对数函数的底,并且记 $e^x=\exp x$,$\log_e x=\ln x$,而后者称为自然对数函数.

4. **三角函数**

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$.其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形见图 1-6.

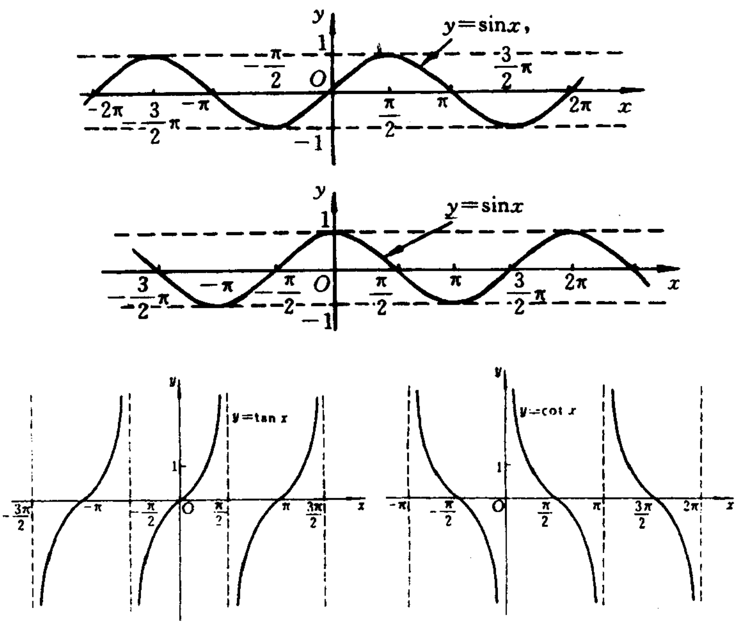


图 1-6

5. 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 等. 它们的图形如图 1-7 所示.

6. 常量函数　$y=c$（c 为常数）

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，函数的图形是一条水平的直线，如图 1-8 所示.

1.2.2　初等函数

在自然科学、人文科学及工程技术中，经常遇到的函数大多是由基本初等函数构成的.