目　录

第一章 导 论

1.1 可靠性定义

可靠性研究在所有工程学科中具有日益增长的作用。就象要求对系统应具有性能较好和费用较低一样，总是伴随着要求系统失效的概率最小，而不论这种失效仅仅是增加费用还是使用的不方便性，或者给公众安全造成严重的威协。为了对这种失效的随机性质进行分析和使得失效出现的概率达到最小，人们已作了大量有关知识的研究工作。概括地说，许多这方面的知识都贯穿在应用这些知识的具体工程学科的细节之中，从而才有可能编写一本具有这种性质的书。但是，就在这个一般的框架中，仍有各种各样的具有可靠性研究的内容。确实，通过对不同性质系统(如计算机、机电类机械、能源转换系统、化工和材料加工设备、建筑物等)可靠性特征的对照和比较，可以对失效及其预防措施更深刻地理解。

就最广泛的意义来说，可靠性是与坚固性、成功的运行、没有损坏或失效相联系的。然而，为了进行工程分析，把可靠性定量地定义为概率是十分必要的。可靠性可定义为在一组给定条件下，元件、部件、设备或系统将在规定时期内实现其预定功能的概率。这是一个扼要的定义。因此有必要对其中所用的术语作细致的推敲。

可靠性这个术语几乎可用于任何对象，这就是定义中使用**系统**、**设备**、**部件和元件**这些术语的原因。然而，每一个术语都有或多或少的不同含义。例如，系统的可靠性往往要考虑操作者差错，而元件可靠性通常不考虑这种因素。类似地，系统和设备往往被认为是部件、元件或零件的配置。在可靠性的一般概率方法中与分析对象的称谓没有什么关系，因为在特定的范围中其意义是明确的。在绝大多数情况下，我们都将用系统的可靠性，并且理解为任何其它术语都可被取代。此外，如果需要分解可靠性分析的主体，则系统将被认为是一组协同工作的综合体中相互作用的元件。在需要作多层次分配时，可以使用若干个不同的层次，例如系统、子系统、元件和零件。

当系统**停止执行**其预计功能时称为系统的失效。当系统功能完全终止时——发动机停止运转、建筑物塌坍、一项通讯设备损坏——该系统显然是失效了。但是，为了考虑失效的确切形式，往往需要通过系统功能变坏或不稳定来定量地定义失效。因此，发动机不再能够传递指定的扭矩，建筑物超过规定的倾斜度，或放大器增益减小到规定值以下都是已经失效的表现。电子设备中断运行或过量飘移以及机床生产的超差零件则是另一种失效。

在可靠性定义中规定时间的方法也可能有很大的变化，这取决于所研究系统的性质。例如在一个间断运行的系统中，必须规定是使用日历寸间还是使用运行时数，如果运行是周期性的，如开关等，则时间很可能用操作次数来计算。如果可靠性利用日历时间来规定，则也可能需要规定开始和停止的频率以及运行时间占总时间的比例。

最后，需要对规定系统在许多情况下的运行条件作广泛的分析。这些条件可以粗略地分为主要的设计载荷和环境效应。例如，设计载荷也许是结构必须支持的重量，发电机的电力负荷，远程通讯系统的信息传输速率，或起落架的冲击载荷等。不经常发生但十分剧烈的载

荷，诸如由洪水或地震引起的载荷也可以包括在条件的定义中。可以表示为载荷的环境条件也必须加以考虑。温度、灰尘、盐份和湿度等都是环境载荷的例子。

除了可靠性本身以外，其它量也用于表示系统可靠性的特征。平均失效时间和失效率都是例子，在可修复系统中还有有效工作时间和修理间隔的平均时间等。这种数值的定义和其它术语将在必要时进行解释。

可靠性是按照系统执行其预定功能确切地加以定义的，并且不考虑失效之间的区别。在实践中，人们不仅十分关注失效的概率，而且也很关心不同模式的失效的潜在后果。必须特别注意那些引起严重安全问题的失效，而不仅是经济损失或不方便的问题。系统的安全分析和风险评估必须经常与可靠性同时考虑和研究。因此，家用器具的制造商必须关心其产品的可靠性，因为经常失效和引起顾客不满是关注的主要问题。此外，当失效出现时保证不致产生安全威胁，如电击或触电死亡事故等，这也是必须仔细考虑的问题。对于其它系统，如飞机发动机，在可靠性和安全考虑之间可能很少有什么区别，对于大多数失效可以假定与产生安全威胁的含义是相同的。在每一种情况下，安全性考虑将在以后各章中经常与可靠性问题一起讨论。

1.2 性能和可靠性

许多工程上的努力都是在于设计和制造改进性能而进行的产品。人们力争有更轻飞得更快的飞机，在热动力学上更有效的能源转换设备，速度更快的计算机和更大、更耐久的建筑物。然而，追求这样的目标往往需要综合的性能设计，这种设计往往趋于比旧的、性能较低的系统可靠性更低。在性能和可靠性之间的这种权衡关系往往是错综复杂的，它们往往包含载荷、系统的复杂性、新材料和新概念等，因此，任何既改进性能又提高可靠性的产品都是工程设计中的显著进步。

载荷最常用于力学意义中作用在结构上的应力。但是人们在此对它作更一般的解释，载荷也可以是由高温引起的热负载，作用在发电机上的电力负载，甚至是远程通讯系统中的信息负载。无论作用在系统或其元件上负载的性质如何，提高负载通常都将改进性能。因此，减轻飞机的重量，就能提高其结构内的应力水平，将温度提到较高的水平(热动力学上更为有效)将迫使人们在热强度损失和加快锈蚀的条件下使用材料。在估计到通讯系统中信息流日益增加的情况下，人们便接近开关或数字式电路可能运行频率的极限值，这种接近元件的物理极限的情况，将引起失效次数的增加，除非采取相应的对抗措施，才能避免失效的增加，因此，提高材料纯度的规范，严格尺寸公差和一系列其它措施对于减低性能极限的不确定性是很需要的，由此人们才能在不增加超过极限概率的情况下，使系统接近这些极限运行。

提高系统的性能往往以增加复杂性作为代价，系统的复杂性又常以所需要元件的数目来衡量，这里再次强调指出，增加复杂性将使可靠性降低，除非采取相应的补偿措施。可以证明，如果不改变任何其它条件，每增加一个元件都将使可靠性降低。在这种情况下，只有提高元件的可靠性或在系统中建立元件余度才能保持系统的可靠性。

为了达到特定的目标，通常采用新材料或部件来最大限度地改进性能。与增大载荷或提高复杂性相比，更基本的进步还是利用改进性能和提高可靠性两方面的潜力。当然，技术发展史就是研究这种进步，如在机械和建筑中用金属取代木料，用喷气式发动机取代活塞式

发动机，以及用固体电路取代真空管等，所有这些均使性能和可靠性两方面取得基本的进步。

但是，纵然技术已取得重大的进步，可靠性仍是一个严重的问题，特别是在采用新的技术进步的初期，可靠性问题更为突出。工程界必须经过一个学习经验的过程，以减少新部件负载极限的不确定性，了解其对于环境的敏感程度，并且完善其装配、制造和建造过程。

1.3 可靠性需求

我们已经指出，在技术发展的任何阶段，往往必须在可靠性和性能之间作出权衡，类似地，在可靠性和费用方面往往也需要作出权衡。如何权衡其得失和对权衡所依据的准则都深刻地存在于工程实践的本质之中。因为准则和条件是随用于什么技术而变的，下面举一些例子来说明这一点。

用赛车作为第一个例子。纵观Indianapolis 500汽车比赛的历史，如果用合格汽车的平均速度作为计量尺度，人们将会发现汽车的性能在逐年不断地改进。与此同时，以完成赛程的概率作为计量尺度，这些汽车的可靠性一直保持在低于50%的低水平上*。这并不奇怪，因为在这种情况下性能就是一切，如果有任何机会取得比赛的胜利就要容忍较高的故障概率。

商用飞机的设计是另一个极端情况，机械性故障很可能引起一场灾难性的事故。在这种情况下可靠性将是压倒一切的设计考虑。为了保持很小的灾难性失效概率，减低飞行速度、减少有效载荷和节省燃油都将被接受。

军用飞机的设计也许是一个适中的例子。在这种飞机的设计中，可靠性和性能之间的权衡结果将是同等重要的。降低可靠性预计将增加致命性事故。然而，如果飞机的性能不够好，在战斗中飞机损失的数目过多可能导致取消其飞行，从而缩短了使用寿命。

同这些与寿命和死亡相联系的产品相反，许多产品的可靠性还可以从常用的经济观点进行评价。例如，一台机器的设计可能涉及到对提高可靠性所增加的投资和对降低可靠性所引起的修理费和减产损失作出评价。尽管如此，许多错综复杂的问题都在起作用。对于消费性产品，开价较高就要求产品更加可靠，并且必须在开价较高与低可靠性产品可能的失效给用户带来的烦恼以及由此产生的更换和修理费用之间作出慎重的权衡。

1.4 系统的寿命周期和可靠性

在前面的讨论中，基本上都是指可靠性与设计之间的关系。实际上，大量的可靠性研究贯穿于系统整个寿命周期之中。首先我们必须阐明系统寿命周期的概念。广义地说，寿命周期可分为下列四个阶段：

1. 定义和概念设计。
2. 详细设计和改进。

---

* R.D.Haviland, Engineering Reliability and Long Life Design, Van Nostrand, New York, 1964, P. 114.

3. 制造、建造或二者兼有。

4. 运行。

可靠性在上述每个时期中所起的作用可能截然不同，这取决于系统的性质。大量生产的消费性产品与单件或小批生产系统(像大型建筑或化工处理设备)可靠性的作用有很大的不同，但是从概念设计到运行阶段全面研究可靠性问题将是有用的。

1.4.1 定义和概念设计

在项目的定义中，应以一种或多种功能需求的形式提出系统的目标。因此，对于发电机要规定其输出功率，对于计算机要规定其速度和存贮容量，大型建筑则应规定其承载能力等等。此外，系统运行的环境也必须加以确定，如温度和湿度的范围，灰尘的浓度或其它污染情况，以及机械影响的烈度，如震动、动力冲击或其它载荷等。最后，对所设计系统的运行寿命也必须作出规定。

根据这些需求，可以构成一个概念性设计，这种设计从粗线条说明系统是如何运行的，并提出其建造的大体计划。例如，采用柴油发动机或汽油发动机，用气冷式还是水冷式，一座桥梁是用钢筋混凝土还是用钢结构，将采用什么样的建筑形式，蒸汽发生器是用直管式或U形管形式，等等。

从功能方面的需求将引伸出失效的定义，因而也涉及可靠性。于是可以设置可靠性的需求，并且，在设计工作进展到详细设计阶段时，对可靠性，费用和功能要求之间的得失衡量也可以进行审核。

1.4.2 详细设计和改进

概念设计必须转入详细的绘图和编写说明书阶段，按这些图纸和说明书就可建造该系统。在这一阶段中，应比较详细地提出维修要求和维修方法。随着设计的进展，试验、测试和分析都可能是需要的，以便于选择方案，解决问题和预计子系统或元件的性能。

可靠性研究应当渗透在这个设计阶段中，例如制定安全系数和设计边界，消除不必要的设计复杂性，将系统可靠性准则转变成子系统、元件和零件的可靠性要求，以及制订检查和维修间隔时间和更换磨损零件的间隔时间等。在这个阶段仔细地审查可能失效的机制及其模式是十分有利的，因为在这一阶段可以在几乎不需任何费用的情况下消除或缓和失效，而在以后出现失效时将会引起重要的重新设计或设计改型。在详细设计阶段，设计人员的经验和使用成功实践的标准和程序，对于消除系统安全的隐患也是最有利的。设计人员应设计出具有破损安全和事故预防功能的系统。

在以后的设计阶段中，要建造原型样机并进行首次可靠性检验。虽然可用原型机的数量和开始生产的时间限制，使得最终设计的样品数不足以保证试验到产品的失效，从而不能得到在统计上有意义的可靠性估计，但是在设计过程中出现的失效使设计人员增加对失效机制的认识仍然是很有价值的，从而可以通过修改设计或维修过程提供改进可靠性的基础。甚至只用一台样机在试验—修理—试验—修理的过程中分析失效的原因和改进设计，这个过程也可用于使最终产品的可靠性有显著的提高。在大型建筑、发电设备或化工处理设备这类小批生产系统的设计中，由模型、试验装置或子系统样机所得到的数据，为认识失效的模式提供了有价值的信息，并提出在提高系统可靠性方面改进设计的建议。

1.4.3 制造/建造

从历史上看，在系统制造过程中的可靠性研究与质量控制有最密切的联系。如果在所制造的系统中要达到原设计的可靠性，该系统就不应该受到次品元件或材料、不合格零件、不正确的装配或制造过程中的其它缺陷的损害。制造中的可靠性由质量控制中的统计方法监控。进入改造过程的材料和元件必须由周密计划的抽样方法进行检验，并且为了鉴别和消除制造中的问题需要有严格的过程控制。

对制成品的可靠性测试是非常重要的，通过这种测试可以调整制造过程，以消除引起早期失效的薄弱组件等缺陷。此外，由于在制造阶段比仅有样机的设计阶段有较多产品可能用作测试，因此可以比较成功地使用统计方法来得到可靠性的定量估计。同样重要的是，制造单位提交给用户的产品的可靠性，比精心制造的样机的可靠性更真实。

在大型、单件建造的系统中，采用试验到出现失效的方法来验证成品的可靠性是不可能的。此外，由于这种系统很可能在野外条件下建造，这比在制造工厂内的制造过程有更多的变化，有更多的原因使系统可靠性受到损害。在这种情况下，非常严格的元件验收准则、建造过程的精心管理和控制，以及一系列精确的验算或验收试验是完全必要的。

1.4.4 运行

可靠性研究并不随制造过程的完成而终止，甚至在提供了经过精心设计以防止运输损伤和仓库保管中变质的包装箱以后，仍要作可靠性研究。因此，在系统的寿命期内，必须对维修和运行给予充分的注意，并注意从使用现场反馈回来的对改进设计和制造过程的信息。

采集到的现场失效的数据是有特殊价值的，因为这些数据是唯一可能得到可靠性估计的来源，它们与实际运行中的载荷、环境影响和维修中的缺陷密切联系的。这种数据库对于估计未来设计的可靠性和改进设计是很可贵的。

尽早地采集现场失效数据是很重要的，因为这些数据可以暴露出那些未预计到的环境载荷、现场维修中的缺陷、用户的滥用或设计人员不能完全预料到的其它因素。这种信息可通过修改运行规范或维修进度来改进系统的可靠性。在有些情况下也需要设计可更换零件。如果产品的可靠性问题非常严重或者存在重大的安全性问题，则必须撤回该产品进行修改，或停止该系统的工作以便作改型设计。

1.5 内容简介

在以后各章中我们首先要介绍许多概率论中的概念，以便用定量方式来处理可靠性。用第二章和第三章中所阐明的概念，我们就能够定量地用公式表示可靠性。第四章将研究可靠性飞其与失效率和其它现象的关系，其中主要的变量是时间。在第五章中，我们将从概率问向统计学问题，以便研究可靠性或有关的特性如何从试验数据中作出估计的，或者从现收集到产品失效的统计数据中作出估计的。

在第六章中，我们将研究可靠性与系统所加载荷的关系；以及系统承受各类载荷的能力。除了阐明一些别的问题以外，还需要对安全系数、设计边界和磨合与磨损效应作概率分析。

第七章介绍了几种方法，利用这些方法使余度配置能用于改进可靠性及其中潜在的某些缺点。然后在第八章中将研究预防维修和故障维修的效果，并介绍可维修性和可用性的概念。为了更精确地研究元件失效的相互作用，在第九章中介绍马尔柯夫过程。

在第十章中，我们脱开传统的可靠性定义，来研究预防可引起严重事故的特殊失效模式。故障树以及安全系统工程中所使用的一些有关方法也将进行讨论。

参 考 文 献

Arsenault, J. E., and J. A. Roberts (eds.), *Reliability and Maintainability of Electronic Systems*, Computer Science Press, Potomac, MD, 1980.

Green, A. E., and A. J. Bourne, *Reliability Technology*, Wiley, New York, 1972.

Haviland, R. D., *Engineering Reliability and Long Life Design*, Van Nostrand, New York, 1964.

Lreson, W. G. (ed.), *Reliability Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Kapur, K. C., and L. R. Lamberson, *Reliability in Engineering Design*, Wiley, New York, 1977.

McCormick, N. J., *Reliability and Risk Analysis*, Academic Press, New York, 1981.

Reliability Guidebook, Asian Productivity Organization, Tokyo, Japan, 1972.

第 二 章　概率和抽样

2.1 概　　述

一切可靠性研究的基础都是对概率的认识。因为可靠性仅被定义为在规定环境下系统不发生失效的概率。本章将对概率作出定义并讨论概率综合和概率运算的逻辑推理。然后我们将研究抽样方法，利用这种方法使测试或实验结果能够用于估算概率。虽然这些内容是很简单的，但是所阐明的概念表明对各种可靠性研究都有直接的应用价值，其范围从系统可靠性对该系统中元件的关系，到用于质量控制中的通用验收准则等。

2.2 概率的概念

我们将一个事件(如一次失效)X表示为$P\{X\}$，这个概率可作以下解释。假设我们进行一项实验，实验中要测试大量的物品，如灯泡等。当测试大量的灯泡时，测试中灯泡失效的概率就是出现失效的相对频率。因此，如果N为被测试灯泡的数量，n为失效的灯泡数，我们可以正规地将概率定义为

$$P\{X\}=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N} \tag{2.1}$$

式2.1是概率的经验性定义。在某些情况下，对称性或其它理论论点也可用于定义概率。例如人们往往假设抛掷硬币得到正面向上的概率为1/2。与可靠性问题相似，如果有A和B两台设备，它们都是从许多按相同设计和制造过程生产的设备中挑选出来的，人们可以假设A在B之前失效的概率为1/2。如果对这两种情况下的假设表示怀疑，则必须进行大量的试验以验证该硬币是否为真币或这些设备是否相同，式2.1可用于这种试验验证。

2.2.1 概率公理

显然，概率必须满足

$$0\leqslant P\{X\}\leqslant 1 \tag{2.2}$$

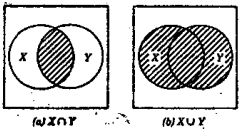
我们用$\bar{X}$表示非X事件，则在灯泡测试的例子中，X表示失效，则$\bar{X}$表示灯泡通过测试。显然，通过测试的概率$P\{\bar{X}\}$必须满足下式

$$P\{\bar{X}\}=1-P\{X\} \tag{2.3}$$

式2.2和2.3是三个概率论公理中的两个。在阐明第三个公理之前，我们先讨论事件的综合。

用$X\cap Y$表示事件X和事件Y都发生，则显然有$X\cap Y=Y\cap X$，X和Y都发生的概率用$P\{X\cap Y\}$表示。综合事件$X\cap Y$可利用图2.1a所示的文氏图加以说明。设正方形的面积为1，则标明X和Y的圆面积分别为概率$P\{X\}$和$P\{Y\}$，事件X和Y都发生的概率$P\{X\cap Y\}$用斜线阴影部分的面积表示。由于这个原因$X\cap Y$是指X和Y的交，或简称为X与Y。

设一个事件，如X依赖于第二个事件Y，则定义在给定事件Y时，事件X的条件概率为



(a) $X \cap Y$ (b) $X \cup Y$

图 2.1 表示两个事件的交和并的文氏图

$P\{X|Y\}$。概率论的第三个公理为

$$P\{X \cap Y\}=P\{X|Y\}P\{Y\} \tag{2.4}$$

即X和Y都将发生的概率就是Y发生的概率乘以给定Y发生时X发生的条件概率。假设Y发生的概率大于零，式2.4可以写成条件概率的定义

$$P\{X|Y\}=\frac{P\{X \cap Y\}}{P\{Y\}} \tag{2.5}$$

注意，我们可以利用给定X发生时Y的条件概率来定义$P\{X \cap Y\}$，以更换事件X和Y的次序，则替换式2.4以后可得

$$P\{X \cap Y\}=P\{Y|X\}P\{X\} \tag{2.6}$$

有时我们假设两个或多个事件，如X和Y相互独立这样的重要性质，对于独立事件，一个事件发生的概率不取决于另一个事件发生或不发生，因此

$$P\{X|Y\}=P\{X\} \tag{2.7}$$

若在X和Y为独立事件，则式2.4成为

$$P\{X \cap Y\}=P\{X\}P\{Y\} \tag{2.8}$$

这就是独立的定义，即两个事件发生的概率就等于每个事件发生概率的乘积。这种情况也出现在互相排斥事件中，即如果X发生，则Y不可能发生，反之亦然。则$P\{X|Y\}=0$且$P\{Y|X\}=0$，或对于互斥事件可更简单地写成

$$P\{X \cap Y\}=0 \tag{2.9}$$

有了三个概率公理和独立的定义，我们可以考虑事件X或事件Y发生，或二者都发生的情况，这就是指的X和Y的并，或简写为$X \cup Y$。由图2.1b所示文氏图很容易理解概率$P\{X \cup Y\}$的概念，X和Y的并就是图中用斜线阴影表示的两个相交圆的面积。由斜线阴影的面积明显地可得

$$P\{X \cup Y\}=P\{X\}+P\{Y\}-P\{X \cap Y\} \tag{2.10}$$

如果事件X和事件Y相互独立，将2.8式代入得

$$P\{X \cup Y\}=P\{X\}+P\{Y\}-P\{X\}P\{Y\} \tag{2.11}$$

相反，对于互斥事件，则由式2.9和2.10得

$$P\{X \cup Y\}=P\{X\}+P\{Y\} \tag{2.12}$$

例2.1 两个具有相同设计的电路断路器，每个断路器不能按需求断开的概率为0.02，断路器按串联方式安装，因此必须在两个断路器都不能按需要断开时，该断路器系统才失效。试求在以下各种情况下系统失效的概率。(a)如果每个断路器的失效相互独立，(b)如果给定第一个断路器失效时，第二个断路器失效的概率为0.1，(c)在a中一个或多个断路器失效的概率；(d)在b中一个或多个断路器失效的概率？

解： X≡第一个电路断路器失效

Y≡第二个电路断路器失效

$P\{X\}=P\{Y\}=0.02$

(a) $P\{X \cap Y\}=P\{X\}P\{Y\}=0.0004$

(b) $P\{Y|X\}=0.1$

$$P\{X\cap Y\}=P\{Y|X\}P\{X\}=0.1\times0.02=0.002$$

(c) $P\{X\cup Y\}=P\{X\}+P\{Y\}-P\{X\}P\{Y\}$

$$=0.02+0.02-(0.02)^2=0.0396$$

(d) $P\{X\cup Y\}=P\{X\}+P\{Y\}-P\{Y|X\}P\{X\}$

$$=0.02+0.02-0.1\times0.02=0.038$$

2.2.2 事件的综合

上述方程说明了几个概率公理并提供了综合两个事件的方法。事件的综合方法可能扩展到三个或更多事件的情形，事件之间的关系仍可用文氏图来说明。例如，图2.2a和2.2b分别表明事件X、Y和Z的交，即$X\cap Y\cap Z$，和事件X、Y和Z的并，即$X\cup Y\cup Z$。概率$P\{X\cap Y\cap Z\}$和$P\{X\cup Y\cup Z\}$仍可用斜线阴影部分的面积来说明。

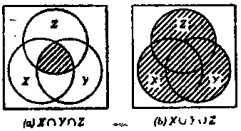


图 2.2 三个事件相交或并的文氏图

在处理两个或多个事件的综合时，以下意见往往是很有用的。每当我们得到事件相并的概率时，总可以将它简化为仅包含单独事件的概率和各事件相交的

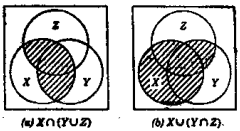
表 2·1 布尔代数规则

数学符号	规则称谓
(1a) $X\cap Y=Y\cap X$	交换律
(1b) $X\cup Y=Y\cup X$	
(2a) $X\cap(Y\cap Z)=(X\cap Y)\cap Z$	结合律
(2b) $X\cup(Y\cup Z)=(X\cup Y)\cup Z$	
(3a) $X\cap(Y\cap Z)=(X\cap Y)\cup(X\cap Z)$	分配律
(3b) $X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap(X\cup Z)$	
(4a) $X\cap X=X$	等幂律
(4b) $X\cup X=X$	
(5a) $X\cap(X\cup Y)=X$	吸收律
(5b) $X\cup(X\cap Y)=X$	
(6a) $X\cap\tilde{X}=\phi$[b]	互补律
(6b) $X\cup\tilde{X}=I$[b]	
(6c) $\tilde{(\tilde{X})}=X$	
(7a) $\tilde{(X\cap Y)}=\tilde{X}\cup\tilde{Y}$	*de Morgan* 定理
(7b) $\tilde{(X\cup Y)}=\tilde{X}\cap\tilde{Y}$	
(8a) $\phi\cap X=\phi$	与I的运算
(8b) $\phi\cup X=X$	
(8c) $I\cap X=X$	
(8d) $I\cup X=I$	
(9a) $X\cup(\tilde{X}\cap Y)=X\cup Y$	未命名的关系
(9b) $\tilde{X}\cap(X\cup\tilde{Y})=\tilde{X}\cap\tilde{Y}=\tilde{(X\cup Y)}$	

a. 取自H.R.Roberts, W.E.Vesley, D.F.Hasstand和F.F.Goldberg著"失效树手册", NUREG-0492, 美国核能管理委员会, 1981.

b. ϕ=空集
I=全标集合

概率表达式，式2.10就是一个这样的例子。类似地，包含事件相交和相并更为复杂综合的概率，也可以简化为仅含事件相交的概率的表达式。然而，只要把事件的交表示为条件概率，就可以将它们从公式中消除，如式2.6所示。如果事件之间相互独立，则它们可以用单独事件的概率来表示，如式2.8所示。



(a) $X\cap(Y\cup Z)$　　(b) $X\cup(Y\cap Z)$

图 2.3　三个事件综合的文氏图

利用布尔代数将使事件综合的处理简化，如表2.1所示。按照这些规则，如果两种事件综合的结果相同，则它们的概率也相同。如按规则1a，由于 $X\cap Y=Y\cap X$，因此有 $P\{X\cap Y\}=P\{Y\cap X\}$。其中交换律和结合律是显而易见的，其它规律可从文氏图中导出。例如图2.3a和2.3b分别表示 $X\cap(Y\cup Z)$ 和 $X\cup(Y\cap Z)$ 的分配律。表2.1中，ϕ 用于表示空事件，即 $P\{\phi\}=0$，I 用于表示全称事件，即 $P\{I\}=1$。

下面阐述包含两个以上事件的综合如何用仅含事件相交的形式来表示。例如，要求概率 $P\{X\cap(Y\cup Z)\}$ 利用规则3a可写成

$$P\{X\cap(Y\cup Z)\}=P\{(X\cap Y)\cup(X\cap Z)\} \tag{2.13}$$

但是，这仅是 $X\cap Y$ 和 $X\cap Z$ 两个交集的并，因此，由式2.10有

$$P\{X\cap(Y\cup Z)\}=P\{X\cap Y\}+P\{X\cap Z\}-P\{(X\cap Y)\cap(Y\cap Z)\} \tag{2.14}$$

结合律2a和2b使我们可以从上式最后一项中消去括号，第一步可写成

$$(X\cap Y)\cap(X\cap Z)=(Y\cap X)\cap(X\cap Z) \tag{2.15}$$

然后利用规则4a可得

$$Y\cap(X\cap X)\cap Z=Y\cap X\cap Z=X\cap Y\cap Z \tag{2.16}$$

利用这一中间结果可得

$$P\{X\cap(Y\cup Z)\}=P\{X\cap Y\}+P\{X\cap Z\}-P\{X\cap Y\cap Z\} \tag{2.17}$$

于是我们已将多个事件综合的概率写成用交集概率表示的表达式。

在可靠性分析中人们经常遇到包含三个或更多事件的关系，这些事件综合的概率也可用事件交集的概率展开。例如利用结合律有

$$P\{X\cup Y\cup Z\}=P\{X\cup(Y\cup Z)\} \tag{2.18}$$

即得到 X 和 $(Y\cup Z)$ 的并，然后利用式2.10可得

$$P\{X\cup Y\cup Z\}=P\{X\}+P\{Y\cup Z\}-P\{X\cap(Y\cap Z)\} \tag{2.19}$$

上式右端第二项可像式2.10那样展开得

$$P\{Y\cup Z\}=P\{Y\}+P\{Z\}-P\{Y\cap Z\} \tag{2.20}$$

我们已经得到式2.10中的最后一项，即式2.17中事件 X 和 $(Y\cup Z)$ 的交集，因此把式2.19、2.20和2.17联系起来可得

$$P\{X\cup Y\cup Z\}=P\{X\}+P\{Y\}+P\{Z\}-P\{X\cap Y\}-P\{X\cap Z\}-P\{Y\cap Z\}+$$

$$P\{X\cap Y\cap Z\}$$

因此，我们可把事件$X\cup Y\cup Z$完全用事件交集的概率表示出来。

如果要把像式2.21的表达式中的交集消去，这些交集的概率必须表示为条件概率。如果这些事件都是独立的，相应的条件概率都可表示为单独事件的概率的乘积。于是式2.4可以把$P\{X\cap Y\}$表示为条件概率，若X和Y为独立事件，则

$$P\{X\cap Y\}=P\{X\}P\{Y\} \tag{2.22}$$

$P\{X\cap Z\}$和$P\{Y\cap Z\}$的表达式也可类似地处理。三个或多个事件的交集可按以下方法类似地处理，首先，把$Y\cap Z$看成是一个综合事件

$$P\{X\cap Y\cap Z\}=P\{X\cap(Y\cap Z)\} \tag{2.23}$$

然后，由式2.4中条件概率的定义可得

$$P\{X\cap Y\cap Z\}=P\{X|Y\cap Z\}P\{Y\cap Z\} \tag{2.24}$$

然后再将式2.4用于$P\{Y\cap Z\}$。

$$P\{X\cap Y\cap Z\}=P\{X|Y\cap Z\}P\{Y|Z\}P\{Z\} \tag{2.25}$$

此式可用于式2.21。当X，Y和Z为独立事件时将出现一种最重要的情况，这时$P\{X|Y\cap Z\}\rightarrow P\{X\}$，$P\{Y|Z\}\rightarrow P\{Y\}$，于是可直接得出

$$P\{X\cap Y\cap Z\}=P\{X\}P\{Y\}P\{Z\} \tag{2.26}$$

因此，如果X，Y和Z为独立事件，则$X\cup Y\cup Z$的概率将简化为仅包含单独事件X，Y和Z的概率的表达式

$$P\{X\cup Y\cup Z\}=P\{X\}+P\{Y\}+P\{Z\}-P\{X\}P\{Y\}-P\{X\}P\{Z\}-P\{Y\}P\{Z\}+P\{X\}P\{Y\}P\{Z\} \tag{2.27}$$

在以后各章中处理重复失效系统和多元件系统时，经常需要计算多个事件综合，如$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n$，的概率，且每个事件都与所有其它事件独立。对于$n$个独立事件，其交集的概率可直接由式2.26生成以下形式

$$P\{X_1\cap X_2\cap X_3\cap\cdots\cap X_n\}=P\{X_1\}P\{X_2\}P\{X_3\}\cdots P\{X_n\} \tag{2.28}$$

对于n个独立事件之并的概率$P\{X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n\}$可以按下列方式直接得出。回顾$\bar{X}_i$表示非$X_i$，我们有

$$P\{X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n\}+P\{\bar{X}_1\cap\bar{X}_2\cap\cdots\cap\bar{X}_n\}=1 \tag{2.29}$$

在这个表达式中最左边的一项就是一个或多个X事件将要发生的概率。因为唯一别的可能结果是没有事件发生，这两个概率之和必须等于1。例如，设X_i表示被测试的n台发动机中第i台失效，式2.29中的第一项就是一台或多台发动机将发生失效的概率，而第二项则是不发生失效的概率。

假设所有事件互相独立，则没有事件发生的概率为

$$P\{\bar{X}_1\cap\bar{X}_2\cap\cdots\cap\bar{X}_n\}=P\{\bar{X}_1\}P\{\bar{X}_2\}\cdots P\{\bar{X}_n\} \tag{2.30}$$