世纪高等学校数学系列辅导教材

复变函数与积分变换

例题与习题解析

COLLEGE MATHMATICS

孙清华 夏敏学 欧贵兵

4

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

复变函数与积分变换 例题与习题解析

孙清华　夏敏学　欧贵兵

湖南大学出版社
2001年·长沙

内容简介

本书是大学生学习复变函数与积分变换课程的辅助教材，也是工程技术人员掌握复变函数与积分变换方法的参考读物.本书按照教育部《关于工程数学的教学大纲》的要求编写，用解析方法对复变函数与积分变换的概念、方法、实践与应用进行了分析讨论、演绎归纳，使读者通过阅读本书能较好地掌握和理解复变函数与积分变换的理论、方法与技巧.

本书对1200余题进行了解析讨论，其中包括西安交大《复变函数》第四版的习题全解和南京工学院《积分变换》大部分习题，因而特别适合在校大学生与工程技术人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换例题与习题解析/孙清华主编；夏敏学，欧贵兵编.—长沙：湖南大学出版社，2001.5

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

ISBN 7-81053-354-1

Ⅰ.复…　Ⅱ.①孙…②夏…③欧…　Ⅲ.①复变函数-高等学校-解题②积分变换-高等学校-解题　Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第25830号

复变函数与积分变换例题与习题解析

Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan Liti yu Xiti Jiexi

孙清华　夏敏学　欧贵兵

□责任编辑　李立鹏　李　刚

□总 策 划　龙　挺

□出版发行　湖南大学出版社

社址　长沙市岳麓山　邮码　410082

电话　0731-8821691　0731-8821315

□经　　销　湖南省新华书店

□印　　装　湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本　850×1168　32开　□印张　14　□字数　339千

□版次　2001年5月第1版　□2001年5月第1次印刷

□印数　1-6 000册

□书号　ISBN 7-81053-354-1/O·18

□定价　18.00元

前　　言

复变函数与积分变换是高等工科院校的重要的数学基础课，也是工程技术人员常用的分析问题、解决问题的基本方法．因此，深刻理解并领会复变函数与积分变换概念的精髓，熟悉并掌握复变函数与积分变换的基本方法，能熟练运用并精通复变函数与积分变换实施的技巧，对每一个读者来说都是十分重要的．本书将帮助读者解决在学习复变函数与积分变换课程中出现的时间少、内容多、概念深、方法新、习题难等问题，以解析方法解疑释难、演绎方法，用典型例题启迪思维、展现技巧，使读者通过阅读本书能较好地理解和掌握复变函数与积分变换的概念、方法和技巧，获得一定的分析问题与解决问题能力．

本书按照教育部《关于工程数学的教学大纲》要求编写，并在此基础上略有提高，以使读者能在逻辑思维与综合运用能力上有所进步．本书共分八章，1200 多个问题（包括例题与习题）．前六章为复变函数部分，共 900 余个问题．每一章分若干节，每节又分知识提要、例题分析和习题解析（全章）三段．知识提要使读者在阅读本书时不必再到其他书上去查找定理和公式；例题分析先简要地对一些疑难问题做了解答，然后由浅入深、由易到难地对一些基本问题及典型问题进行了解析讨论、演绎归纳，期望以此帮助读者掌握基本的理论、方法与技巧，并在思维上有所开拓；习题解析部分对西安交大的《复变函数》第四版的习题进行了全解，希望读者能在自己独立演算后再来看解答，使自己有所提高．后两章为积分变换部分，编写体例与前六章相同，只是将南京工学院《积分变换》的习题的大部分收录到例题分析之

中.

本书在编写出版过程中得到湖南大学出版社领导与编辑的大力支持，在此向他们表示衷心感谢. 由于学识水平所限，本书的错漏之处在所难免，诚望读者批评指正.

孙清华

2001 年 5 月

目　次

第一章　复数与复变函数的概念

复数是复变函数论的预备知识,复变函数是复变函数论的主题.因此,对本章知识的掌握是学好复变函数论的基础,读者要有所认识.

§1.1　复数的概念与运算

1. 知识提要

(1)形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数,其中 x,y 为任意实数,$\mathrm{i}(\mathrm{i}^2=-1)$称为虚单位.$x,y$ 又称 z 的实部与虚部,记为 $x=\mathrm{Re}z,y=\mathrm{Im}z$.

(2)复平面　复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与直角坐标平面上的点(x,y)构成一一对应的关系.$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$称为复数 z 的模;$\mathrm{Arg}z=\theta=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$称为复数 z 的辐角,满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 称为辐角的主值,记为

$$\theta=\arg z.$$

(3)复数的几种表示法

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用平面上点(x,y)表示.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用从原点指向点(x,y)的向量表示.此时,

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}.$$

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的三角表示式为 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $r=|z|$, θ 为 $z\neq0$ 时的任一辐角值.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的指数表示式为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(4)复球面　与平面相切的球面上点与平面上点(x,y)一一对应,假设∞点与球面上点N(北极)对应,则球面称复球面.含∞的平面称为扩充复平面.

(5)复数的代数运算　设$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$.

仅当$\mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2, \mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$时,$z_1=z_2$;

仅当$\mathrm{Re}z=0, \mathrm{Im}z=0$时,$z=0$;

$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$;

$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$;

$z_1/z_2=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$;

$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$;

$\sqrt[n]{z}=r^{1/n}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right), k=0,1,\cdots,n-1$.

2. 例题分析

在解题过程中,读者常常会产生一些疑问,影响解题,甚至造成错误.为此,我们先要弄清以下几点.

(1)辐角主值的确定　我们已经知道,$\arg z$满足$-\pi<\theta\leqslant\pi$,但具体做题时,仍然会感到困难.于是,由(x,y)可以给出以下公式

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y\gtreqless 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & x<0, y\gtreqless 0,\\ \pi, & x<0, y=0,\end{cases}\tag{1-1}$$

其中,$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

(2)复数不能比较大小　由于在实数集合中运算的习惯,读者常常会问:哪个复数大些?我们回答:复数是不能比较大小的.

实数能比较大小，是因为实数是有序的. 对于任一复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 来说，它的实部 x 和虚部 y 都是有序的. 但复数是无序的，因而不能比较大小.

例如 i 和 0，显然 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}\neq 0$. 若设 $\mathrm{i}>0$，则不等式两边同乘 i，得到 $\mathrm{i}^2=-1>0$，这是错误的；若设 $\mathrm{i}<0$，则不等式两边同乘 i 后，不等号反向，也得到 $-1>0$，所以，i 与 0 没有大小之分. 两个复数不能比较大小.

(3)除零以外的复数都有辐角　辐角是复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应的点 (x,y) 与原点连线形成的向量与 x 轴正向的夹角 θ，而零向量方向是任意的，故 $z=0$ 时，辐角是任意的或没有确定的辐角.

(4)复数运算与向量运算的相同与区别　复数 z 可以用从原点指向点 (x,y) 的向量表示，但在运算上有相同也有区别. 相同之处是有同样的加减运算与数乘运算；相异之处是复数有乘除、乘幂和方根运算，而向量没有这些运算，但有数量积、向量积和混合积等复数没有的运算，所以两者不能代替.

例 1　设复数 z 满足关系式 $z+|z|=2+\mathrm{i}$，求 z.

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，代入关系式，得

$$x+\mathrm{i}y+\sqrt{x^2+y^2}=2+\mathrm{i}.$$

比较等式两边的虚部与实部，解得 $x=\dfrac{3}{4}$，$y=1$. 即 $z=\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$.

例 2　设 $z=3+a\mathrm{i}$，满足 $|z-2|<2$，求 a 的取值范围.

解　因为 $|z-2|=|3+a\mathrm{i}-2|=\sqrt{1+a^2}<2$，所以，得

$$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}.$$

例 3　求满足下述条件的所有复数 z：

(1) $z+\dfrac{10}{z}$ 是实数，且 $1<z+\dfrac{10}{z}\leqslant 6$；

(2) z 的实部和虚部都是整数.

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$（$x,y\in\mathbf{R}$，且 a、b 不同时为零），则

$$z+\frac{10}{z}=x+\mathrm{i}y+\frac{10}{x+\mathrm{i}y}=\left(x+\frac{10x}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}\left(y-\frac{10y}{x^2+y^2}\right).$$

由条件(1)，得 $y=0$ 或 $x^2+y^2=10$.

当 $y=0$ 时，由 $1<x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}=x+\dfrac{10}{x}\leqslant 6$，知这样的 x 不存在.

当 $x^2+y^2=10$ 时，由 $1<x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}=2x\leqslant 6$，知 $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 3$，由(2)知 $x=1,2,3$，故 $y=\pm 3,\pm\sqrt{6},\pm 1$，但 $y=\pm\sqrt{6}$ 不是整数应舍去. 于是，满足条件的复数是

$$1+3\mathrm{i},1-3\mathrm{i},3+\mathrm{i},3-\mathrm{i}.$$

例 4 设 z 为复数，$z+2$ 的辐角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$z-2$ 的辐角为 $\dfrac{5}{6}\pi$，求 z.

解 设 $z+2=r_1\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}r_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_1\mathrm{i}$，$z-2=r_2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_2+\dfrac{1}{2}r_2\mathrm{i}$，则

$$z=\left(\frac{1}{2}r_1-2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}r_1\mathrm{i}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2\right)+\frac{1}{2}r_2\mathrm{i}$$

得
$$\frac{1}{2}r_1-2=-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2,\frac{\sqrt{3}}{2}r_1=\frac{1}{2}r_2,$$

解得 $r_1=2$，于是

$$z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}-2=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

例 5 复数 z 满足 $(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$，求 z.

解 因为 $\bar{z}=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(4+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5}=2-\mathrm{i}$，故 $z=2+\mathrm{i}$.

例 6 已知 $|z_1|=|z_2|=1$，且 $z_1+z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求 z_1 和 z_2.

解 因为 $|z_1+z_2|=\sqrt{(1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}=1$，$|z_1|=|z_2|=1$，即 $(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=1$，故 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=-1$，得 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2)=-\dfrac{1}{2}$；又 $|\bar{z}_1z_2|=1$，得 $\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2)=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，于是

$$\bar{z}_1z_2=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$z_2=z_1\bar{z}_1z_2=z_1\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right).$$

$$z_1+z_2=z_1+z_1\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

故 $$z_1=1,z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

或 $$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},z_2=1.$$

例 7 计算

(1) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4$，(2) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6$，(3) $\dfrac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}$，

(4) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$，　　(5) $\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}$.

解这类题，通常是利用同乘共轭因式，或化为三角形式、指数形式等方法，进行简化计算，求得所需结果.

(1) $$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4=\left(\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\right)^4=(-\mathrm{i})^4=1.$$

(2) $$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6=\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right]^6=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$$
$$=2^6(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-64.$$

(3) $$\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{32\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^5}{16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^5}{\cos\frac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{11}{6}\pi}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)}{\cos\frac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{11}{6}\pi}$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

(4) $$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

(5) $$\frac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}=\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}-1)(-\mathrm{i}-2)}{(\mathrm{i}-1)(-\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)(-\mathrm{i}-2)}$$

$$=\frac{(1-i)(-2-i)}{10}=-\frac{3}{10}+\frac{i}{10}.$$

例 8 求下列复数的辐角、模和共轭复数.

(1) $(1-\sqrt{3}i)^5$，　　　　(2) $\frac{3+i}{2-i}$，

(3) $\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$，　　　　(4) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

解这类题，一般要先化为 $a+ib$ 的形式，然后再求模和辐角；若直接化为三角形式，则求模和辐角尤为方便.

$$(1)(1-\sqrt{3}i)^5=\left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^5$$

$$=2^5\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)^5$$

$$=2^5\left(\cos\frac{25}{3}\pi+i\sin\frac{25}{3}\pi\right)$$

$$=32\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

故，模为 32，辐角主值$\frac{\pi}{3}$，共轭复数为 $16-i16\sqrt{3}$.

(2) $\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{5}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，故模为 $\sqrt{2}$，辐角主值$\frac{\pi}{4}$，共轭复数为 $1-i$.

$$(3)\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-\sqrt{2}i,$$

故模为 $\sqrt{2}$，辐角主值$-\frac{\pi}{2}$，共轭复数为 $\sqrt{2}i$.

$$(4)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$=\cos\frac{n\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3},$$

故模为 1，辐角主值为$\frac{n\pi}{3}+2k\pi$（取 k 使$-\pi<\frac{n\pi}{3}\leqslant\pi$），共轭复数为 $\cos\frac{n\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3}$.

例 9 化简$\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}}$，$|x|\geqslant1$.

解 设原式$=u+\mathrm{i}v$，则 $1+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{i}=u^2-v^2+2uv\mathrm{i}$，即 $u^2-v^2=1$，$uv=x\sqrt{x^2-1}$.

解方程得：$u=\pm x$，$v=\pm\sqrt{x^2-1}$，所以

$$\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}}=\pm(x+\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}).$$

例 10 已知 $z\bar{z}-3\mathrm{i}\bar{z}=1+3\mathrm{i}$，求 z.

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，代入方程得

$$x^2+y^2-3y-3\mathrm{i}x=1+3\mathrm{i},$$

故$-3x=3$，$x^2+y^2-3y=1$. 解方程组，得

$$x=-1,y=0\text{ 或 }3.$$

于是 $z=-1$ 或 $z=-1+3\mathrm{i}$.

例 11 设 $z=-\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，求 $z^{100}+z^{50}+1$ 的值.

解 $z^{50}=\left(-\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{50}=\left[\left(-\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{25}=\frac{(-2\mathrm{i})^{25}}{2^{25}}=-\mathrm{i}$.

故，$z^{100}+z^{50}+1=(-\mathrm{i})^2+(-\mathrm{i})+1=-\mathrm{i}$.

例 12 设 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求满足等式 $z^n=z$ 且大于 1 的最小正整数 n.

解 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$，故 $z^3=1$. 所以，$z\cdot z^3=z\cdot1$，即 $z^4=z$，$n=4$.

例 13 化下列复数为三角形式和指数形式

(1)$\underset{(\pi<\theta<2\pi)}{1+\mathrm{i}\tan\theta}$，　　(2)$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$，

(3) $-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$，　　　　(4) $\underset{(0<\theta\leqslant\pi)}{1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}$.

解此类题，最易出现的错误是 θ 确定不准确，可参阅例题分析(1)的说明进行确定.

(1) $1+\mathrm{i}\tan\theta=1+\mathrm{i}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)$.

因为 $\pi<\theta<2\pi$，所以 $\sin\theta<0$，于是

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=-\frac{1}{\sin\theta}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{\sin\theta}e^{\mathrm{i}(3\pi/2-\theta)}.$$

(2)

$$-\sqrt{12}-2\mathrm{i}=\sqrt{12+2^2}\left[\cos\left(\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

$$=4\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)-\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right]=4e^{-\mathrm{i}5\pi/6}.$$

(3)

$$-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}=\sqrt{12+2^2}\left[\cos(\arctan\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\left.+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

$$=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)=4e^{\mathrm{i}5\pi/6}.$$

(4)

$$1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}(\pi-\theta)/2}.$$

例 14　证明

$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$,

$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$.

证　在中学三角中，证明这两个公式是比较麻烦的，但在复数中却很简单. 因为

$\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3$

$$=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

对比等式两端的虚部与实部，即得

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,$$

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

例 15 求把复数 $1+\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{2}{3}\pi$ 所得到的向量对应的复数.

解 $z=(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3}=(1+\mathrm{i})\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$=(1+\mathrm{i})\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

例 16 证明：对任意自然数 n，若 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$，则

$$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=4^{n-1}\sqrt{3}.$$

证 因为

$$x_n+\mathrm{i}y_n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3}\right),$$

所以 $x_n=2^n\cos\frac{n\pi}{3}$，$y_n=2^n\sin\frac{n\pi}{3}$，于是

$$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=2^{2n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$-2^{2n-1}\cos\frac{n\pi}{3}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}=2^{2n-1}\sin\left[\frac{n\pi}{3}-\frac{(n-1)\pi}{3}\right]$$

$$=2^{2n-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=4^{n-1}\sqrt{3}.$$

例 17 求下列根式的值：

(1) $\sqrt{1+\mathrm{i}}$； (2) $\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}}$； (3) $\sqrt{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)\mathrm{i}}$.

解 计算根式的值，首先要设法去掉根号，一般用取分式指数方法去根号.

(1) $\sqrt{1+i}=[\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}]^{1/2}=2^{1/4}e^{i(\pi/8+k\pi)}, k=0,1.$

(2) $\sqrt[3]{-2+2i}=[\sqrt{8}e^{i(3\pi/4+2k\pi)}]^{1/3}=\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi/3)}$, $k=0,1,2.$

(3) $$\sqrt{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)i}=[\sqrt{12(2-\sqrt{3})}e^{i(\pi/12+2k\pi)}]^{1/2}$$
$$=[12(2-\sqrt{3})]^{1/4}e^{i(\pi/24+k\pi)},$$
$k=0,1.$

例 18 复数 $z^3=8$，求 z^3+z^2+2z+2 的值.

解 $z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)=0$，有 $z=2$ 或 $z^2+2z+4=0$，舍去 $z=2$.

由 $z^2+2z+4=0$，得 $z^2+2z=-4$. 于是
$$z^3+z^2+2z+2=z^3+(z^2+2z)+2$$
$$=8+(-4)+2=6.$$

例 19 设 $a\geqslant 0$，在复数范围内解方程：$z^2+2|z|=a$.

对于一个方程的情形，一般用组合的方式变形化简，然后用棣美弗公式或直接开方的方法求解. 对于特殊的情形，也可以用其他方法.

解 将方程变形为：$z^2=(a-2|z|)$，所以，z 或为实数，或为纯虚数.

(1)设 z 为实数，则 $z^2=|z|^2$. 原方程化为
$$|z|^2+2|z|-a=0, a\geqslant 0.$$
解得 $|z|=-1\pm\sqrt{a+1}$，舍去负值，得 $|z|=-1+\sqrt{1+a}$. 即，当 $a\geqslant 0$ 时，$z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$.

(2)设 z 为纯虚数，$z=iy$. 原方程化为
$$y^2-2|y|+a=0 \text{ 即 } |y|^2-2|y|+a=0.$$
解得 $|y|=1\pm\sqrt{1-a}$，故 $z=\pm i(1\pm\sqrt{1-a})$，$0<a\leqslant 1$，所以
$$z=\begin{cases}\pm(1-\sqrt{1+a}), a\geqslant 0,\\ \pm i(1\pm\sqrt{1-a}), 0<a\leqslant 1.\end{cases}$$

例 20 解方程 $z^2-4iz-(4-9i)=0$.