经济数学

上册

刘兴权 朱宪章 主编
陈晓燕 李德祚 副主编

JING JI SHU XUE JING JI SHU XUE

黑龙江教育出版社

编 者 的 话

《经济教学》一书是按国家教委，人事部有关文件精神，由全国经济管理干部学院校际数学研究会委托黑龙江省工业交通管理干部学院，吉林省长春市中国农业银行管理干部学院，黑龙江省科技职工大学，黑龙江省电力职工大学，哈尔滨市工人业余大学，哈尔滨市经济管理干部学院，哈尔滨市建委建筑工程学院，黑龙江省尼龙厂，黑龙江省纺织印染厂，牡丹江市一轻局，内蒙古自治区兴安盟梨子山铁矿，内蒙古鄂旗吉文林业水泥厂，哈尔滨锅炉厂平山分厂，哈尔滨建成机械厂分厂，甘南县柴油机厂等编写的经济、管理、财会，金融等大专科层次的数学教材。

本书分上、下两册，是按140～190学时编写的，具有一定弹性，其中上册包括一元微积分，多元微分学和线性代数的基础知识（80～100学时），下册包括概率与数理统计初步和线性规划的基础知识（60～90学时）。

全套书坚持体现成人教育的特点，力求深入浅出，通俗易懂、便于自学，每一概念都从实例引入，使用方法条理化，每章备有习题并附有答案。

全书由刘兴权副教授主编，参加编写人员有：上册朱宪章(主编)，陈晓燕（副主编)、李德祚（副主编)，彭秋艳，沈喜成、李玉祥、李明放、牛双民、翼中立。

下册王家兴副教授（主编），马文祥（副主编），陈晓英（副主编)，王印平、吴金锋，孔祥德，岳秋春，刘为。

全书由黑龙江省工业交通管理干部学院教务长朱少毅副教授，全国经济管理干部学院校际数学研究会理事长刘生锋副教授，常务理事朱宪章担任主审。

编者水平有限，时间又仓促，错误在所难免，恳请读者批评指正。

一九九〇年十二月

目　　录

第一章 行 列 式

在初等代数中，我们已经学过用加减消元法求二元一次方程组及三元一次方程组的解，但在实际应用中所遇到的方程组，未知数有时不止三个，如果继续用加减消元法求解，计算是很麻烦的，本章介绍一种常用的数学工具——行列式，来解线性方程组会带来很大的方便。

在这一章里，从二阶、三阶行列式出发引入 n 阶行列式，并讨论行列式的性质，计算方法及克莱姆法则。

§1.1 n阶行列式

一 二阶和三阶行列式

1．二阶行列式

含有两个未知数的线性方程组的一般形式为：

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2)\end{cases}$$

用加减消元法解方程组（Ⅰ）：

(1) $\times a_{22}-$(2) $\times a_{12}$ 得

$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{11}-b_2a_{12}$

(2) $\times a_{11}-$(1) $\times a_{21}$ 得

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组(Ⅰ)的解是

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & (3) \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_2} & (4) \end{cases}$$

我们观察（3）与（4），发现它们的分子和分母具有相同的数学形式，都是由两个数之积减去另外两个数之积

定义 设a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}为四个数，用式子

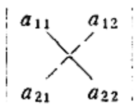
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

其中a_{ij}称为二阶行列式的元素，第1个足标$i(i=1, 2)$表示元素所在的行，第2个足标j（$j=1, 2$）表示元素所在的列。二阶行列式含有二行二列(横排称为行，竖排称为列)。

二阶行列式可按下图展开：



（－）　　　　（＋）

即实线(称为主对角线)上两个元素a_{11}与a_{22}之积为正，虚线(称为副对角线)上两个元素a_{12}与a_{21}之积为负，从而，可由(1.1)左端得到（1.1）式右端，这种展开法称为对角法则。

如果设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

其中D_1与D_2分别是常数项b_1，b_2替换行列式D中x_1与x_2所在列的系数后构成。于是，当$D\neq0$时，方程组（Ⅰ）的解可表示为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为线性方程组（Ⅰ）的系数行列式。

例1 解方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=5 \\ 2x_1+3x_2=-7 \end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot3-(-1)\cdot2=11\neq$$

又，

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}=5\cdot3-(-1)(-7)=22$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & -7\end{vmatrix}=3\cdot(-7)-5\cdot 2=-11$$

利用公式（1.2）得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{22}{11}=2\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-11}{11}=-1\end{cases}$$

所以，方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-1\end{cases}$$

2．三阶行列式

含有三个未知数的线性方程组的一般形式为：

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

同二元线性方程组类似，可以用消元法求出它的解，但计算量较大，仿照二阶行列式的定义，我们引进下列的记号和规定。

定义 设a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}为九个数，则式子

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

称为三阶行列式（或称方程组（Ⅱ）的系数行列式）。其中

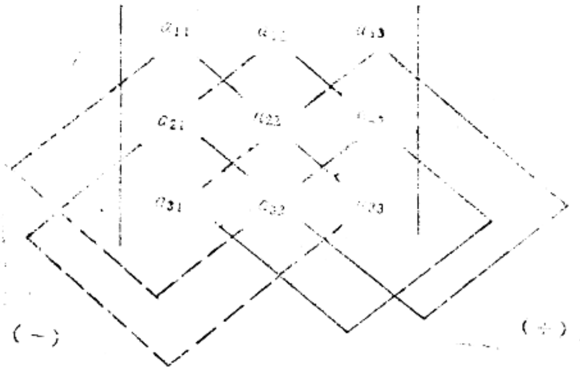
a_{ij} ($i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$)，称为三阶行列式的元素，显然三阶行列式含有三行三列，

三阶行列式也有简单的对角线展开方法，即实线（称主对角线）上三个元素之积取正号，即

$$+a_{11}a_{22}a_{33};\quad +a_{12}a_{23}a_{31};\quad +a_{13}a_{21}a_{32}$$

虚线（称副对角线）上三个元素之积取负号，即

$$-a_{13}a_{22}a_{31};\quad -a_{11}a_{23}a_{32};\quad -a_{12}a_{21}a_{33}$$



然后求和，就得到三阶行列的值，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{12}a_{23}a_{31}+$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1.3)$$

例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{vmatrix}=1\cdot5\cdot(-9)+2\cdot6\cdot(-7)+4\cdot(-8)\cdot3$$

$$-\cdot7\cdot(-7)-2.4\cdot(-9)-6\cdot(-8)\cdot13$$

$$=-45-84-96+105+72+48=0$$

需要指出的是：对角线法则只适用于二、三阶行列式，不适用高于三阶的行列式。

仿照二元线性方程组，如果设

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}。$$

其中，D_1，D_2，D_3 是把系数行列式 D 中的第一，二，三列分别换成方程组的常数项 b_1、b_2、b_3 而得到。则当 $D\neq0$ 时，方程组（Ⅱ）有唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3=0 \\ -3x_1-4x_2-2x_3-1=0 \\ 5x_1+x_2+4x_3+3=0 \end{cases}$$

解 将三元线性方程组改写成标准形式：

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=0 \\ -3x_1+4x_2-2x_3=1 \\ 5x_1+x_2+4x_3=-3 \end{cases}$$

因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 4 & -2\\ 5 & 1 & 4\end{vmatrix}=7\neq 0$$

所以，方程组有唯一解。

又因

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & -3 & 1\\ 1 & 4 & -2\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}=7$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & -2\\ 5 & -3 & 4\end{vmatrix}=0,\qquad D_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\ -3 & 4 & 1\\ 5 & 1 & -3\end{vmatrix}=-14$$

故方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{7}{7}=1\\[2mm] x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{0}{7}=0\\[2mm] x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-14}{7}=-2\end{cases}$$

二　n阶行列式的概念

前面，介绍了二阶与三阶行列式，并用它来解二元及三元线性方程组。但实际问题中所遇到的线性方程组，它的未知数的个数可能是 n 个或上百个，一般设未知数有 n 个，为了求 n 元线性方程组的解，我们来建立 n 阶行列式的概念。

由三阶行列式（1.3）式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

由取公因式，又可写成：

$$D=a_{11}\ (a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

$$+a_{13}(_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

提此可知，一个三阶行列式的值等于这个行列式第一行每个元素分别与划掉它们各自所在的行和列后剩余的二阶行列式的乘积之和，也就是说，一个三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义。类似，可以用三阶行列式去定义四阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

这样，就可以逐次逆推，用 n 个 $n-1$ 阶行列式（$n\geqslant 3$，n 是正整数）给出 n 阶行列式的定义。

定义　（递归定义）设 $n-1$ 阶行列式已经定义（$n\geqslant 3$，n 是正整数），则 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

n 阶行列式有 n 行，n 列，共有元素 n^2 个。如果将(1.5)式的右端继续展开下去，一共有 $n!$ 项，其 $\frac{n!}{2}$ 项是正的，$\frac{n!}{2}$ 项是负的，每一项都是 n 个不同行，不同列的元素的乘积，

例 3　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$