变质量系统力学

杨来伍　梅凤翔　编著

北京理工大学出版社

变质量系统力学

杨来伍　梅凤翔　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括变质量质点动力学基本方程、变质量质点的动力学普遍定理、变质量体动力学普遍定理、变质量刚体一般运动动力学微分方程、考虑微粒内部运动时的变质量力学问题、变质量力学系统的变分原理、变质量力学系统的分析动力学方程、变质量力学系统的积分方法以及变质量力学系统动力学若干专门问题。

本书可作为高等院校力学、航空、机械等类专业本科生和研究生的教材，也可作为高等院校教师、力学工作者和有关科技人员的参考书。

变质量系统力学

杨来伍　梅凤翔　编著

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

地质出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　11.625印张　259千字

1989年12月第一版　1989年12月第一次印刷

ISBN 7-81013-289-×/O·53

印数：　1—1500　定价：　2.50　元

前　言

变质量质点或变质量物体这样的术语，在许多科技文献里，已得到广泛的传播，特别是在喷气、火箭以及航天技术等方面。所谓变质量物体，就是指在运动过程中质量随着时间而不断变化的物体。当然，这里所说的物体质量的变化，并不是说有质量的消灭或产生，而是说在某一瞬时以前或以后，物体中有一部分质量不予考虑进去。前者相当于有质量并入而使物体质量增加的情况；后者相当于有质量分离而使物体质量减少的情况。如果变质量物体作平动，或者虽作一般运动，但其转动运动学要素在所研究的问题中与它的移动运动学要素比较起来可以忽略，则变质量物体可视为变质量质点。

变质量系统力学研究质量变化物体的运动与作用其上的力之间的关系。它的理论是在牛顿定律的基础上建立起来的，属于经典力学的范畴，因此通常把它看成经典力学的一个新的分支。

火箭是变质量体的理想模型。大家知道，火箭是靠喷射燃气而获得向前的运动的，火箭在飞行时燃料逐渐消耗，质量不断减少。因此，即使在大气层外它仍然可以正常地工作，这样，火箭就成为宇宙飞行的重要工具。

由于火箭、航天技术的发展，变质量力学的研究越来越显得重要。当然，变质量系统力学所适用的范围，不仅限于研究火箭的运动。在工程技术和自然界，可以举出许多变质量物体的实例。吸入空气又同时喷出燃气的喷气式飞机；投

掷载荷的飞机或气球；棉纺厂的纱锭在转动过程中不断改变其质量与转动惯量；陨石在大气中下落，其质量由于燃烧而减少，浮冰由于冻结使其质量增加或由于溶化而使其质量减少，以及带变质量盛金属铸罐的铸锭机翻料装置等。要研究与解决有关这些变质量物体的动力学问题，都需要运用变质量力学的基本理论。

早在十九世纪中叶，人们就曾提出了变质量力学的问题，但直到 1897 年，俄国学者 *Мещерский*（密歇尔斯基）才首先建立了变质量质点动力学的基本方程。1929年，苏联力学家 *Циолковский*（齐奥尔柯夫斯基）提出用多级火箭实现宇宙飞行，对变质量力学作出了重要贡献。随着科学技术的发展，变质量系统力学的基本理论体系已逐步完善。近代变质量力学的重要课题，一方面是理论上的继续探讨，另一方面也是极重要的方面就是与解决实际问题相联系。

本书包括两篇，既有联系，又各自独立。第一篇是变质量系统的牛顿力学，主要用理论力学的方法处理变质量系统动力学，包括变质量质点动力学基本方程、变质量质点的动力学普遍定理、变质量体动力学普遍定理、变质量刚体动力学微分方程、考虑微粒内部运动时的变质量力学问题等。第二篇是变质量系统的分析力学，主要用分析力学的方法处理变质量系统动力学，包括变质量力学系统的变分原理、变质量力学系统的分析动力学方程、变质量力学系统的积分方法、变质量力学系统动力学若干专门问题等。

本书初稿成于1981年，并在1982年在北京工业学院油印试版，书名为《变质量体力学》，作者是杨来伍。那个版本作为教材，曾为北京工业学院应用力学系1980级本科生、1984级、1985级和1986级研究生讲授过。本书是在这些实践基础

上改写的，这次补充了许多新的内容，如凝固导数对普遍定理的应用、变质量体一般运动方程、变分原理、积分方法以及各种专门问题等。本书未编入习题，读者可参阅北京理工大学出版社1988年出版的《国外理论力学习题选编》下册以及《分析力学范例与习题》。

本书成稿过程中曾得到北京理工大学应用力学系理论力学教研室、分析力学教研室同志们的关心和支持。刘端同志曾阅读第二篇初稿，并提出宝贵意见。刘桂林副教授在百忙中仔细地审阅了书稿并提出中肯意见。作者在此向他们一并表示致谢。

限于作者水平，书中难免有疏漏之处，敬请读者指正。

杨来伍　梅凤翔

1989年1月

目　录

第一篇　变质量系统的牛顿力学

第一篇　变质量系统的牛顿力学

第一章　变质量质点动力学微分方程

本章首先建立变质量质点动力学的基本方程，举例说明变质量质点动力学两类基本问题以及逆问题的解法。然后，讨论一级火箭和多级火箭的运动问题。最后讨论变换了的 *Мещерский* 基本方程。

§1-1　变质量质点动力学基本方程

1．基本假定　设有一变质量质点，由于它在运动中连续地分离质量及并入质量，从而使其质量连续地变化。若以 m 表示变质量质点在瞬时 t 的质量，则 m 为 t 的单值连续函数。在推导变质量质点的动力学微分方程时，如果将并入变质量质点的质量以及从其中分离的质量与变质量质点视为一个系统，便得到一个不变质量的质点系。当知道了这个质点系中将并入和被分离质量的运动，就可确定变质量质点的运动。这样，只须应用理论力学中的常质量质点系的理论就够了。这种想法原则上是对的，但实际上是无法实现的。因为要知道将并入质量和被分离质量的运动是非常困难的，这实质上是一个至今尚未完全解决的天体力学中的多体问题。因

此，在研究变质量质点的运动时，不去研究那些将并入质量与被分离质量的运动，而只是通过并入质量和分离质量对质点的瞬间作用，研究变质量质点的运动规律。

在推导变质量质点的动力学微分方程时，作如下原则性的简化假设，即变质量质点并入质量或分离质量都是连续发生的，而且这种质量的并入或分离，是属于这些质量与变质量质点的接触作用。也就是说，这些质量与质点合并或分离时发生碰撞而产生速度的突变，从而使变质量质点的速度也产生连续的改变，并入或分离后，作用也就停止，因此问题就成为带有连续碰撞性质的问题了。

2. 基本方程

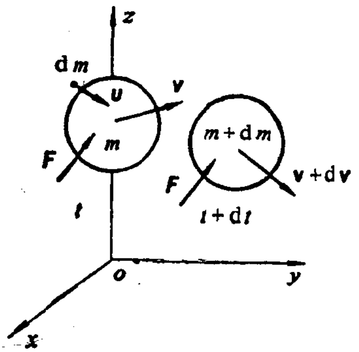

图 1.1

为明确起见，先研究只有质量并入变质量质点的情形。取定参考坐标系 $oxyz$，设瞬时 t 变质量质点的质量为 m，绝对速度为 $\boldsymbol{v}$；将与之合并的质量为 $\mathrm{d}m$，其绝对速度为 $\boldsymbol{u}$。在瞬时 $t+\mathrm{d}t$，这些质量与质点合并，变质量质点的质量变为 $m+\mathrm{d}m$，其绝对速度变为 $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$（图1.1）。研究变质量质点 m 与并入质量 $\mathrm{d}m$ 组成的质点系，根据质点系的动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \qquad (1.1.1)$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 为质点系的动量，$\boldsymbol{F}$ 为作用于质点系上外力的主矢

量。对于所研究的质点系，在瞬时 t 的动量为 $m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\mathrm{d}m$，在瞬时 $t+\mathrm{d}t$，其动量为 $(m+\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})$。$\mathrm{d}t$ 时间内动量的增量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K}=(m+\mathrm{d}m)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})-(m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\mathrm{d}m)$$

将上式展开并略去二阶小量，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K}=m\mathrm{d}\boldsymbol{v}-\mathrm{d}m(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$$

代入（1.1.1）得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \tag{1.1.2}$$

式中$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$是变质量质点质量的变化率，在并入质量的情况下，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}>0$，$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ 是并入质量相对于变质量质点的速度，即相对并入速度，以$\boldsymbol{v}_r$表示，有

$$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \tag{1.1.3}$$

故（1.1.2）可写为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r \tag{1.1.4}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{\Phi} \tag{1.1.5}$$

其量纲为$\frac{[\text{质量}]}{[\text{时间}]}\cdot\frac{[\text{长度}]}{[\text{时间}]}=[\text{质量}][\text{长度}]/[\text{时间}]^2$，即$\boldsymbol{\Phi}$具有力的量纲，称为反推力。于是（1.1.4）最后可写为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{\Phi} \tag{1.1.6}$$

这就是变质量质点的动力学基本方程，又称为*Мещерский*方程，因该方程是他在1897年首先得出的。式（1.1.6）表明：

如果在作用于变质量质点的外力中加上反推力，则变质量质点动力学基本方程具有与常质量质点动力学基本方程相同的形式。

对于变质量质点运动中连续地分离质量的情况，亦可得出与（1.1.6）完全相同的方程。但是，此时 $dm<0$，或 $\frac{dm}{dt}<0$，故在推导上述方程时，分离的质量应为$(-dm)$。

必须指出，由式（1.1.5）确定的反推力$\boldsymbol{\Phi}$是一矢量，等于变质量质点的质量对时间的导数与并入（分离）质量的相对速度矢量的乘积。以火箭为例，当火箭连续喷出燃气时，$\frac{dm}{dt}<0$，燃气的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 与火箭速度相反，所以$\boldsymbol{\Phi}$的方向与火箭的速度方向相同，对火箭起推力的作用，反推力之称即由此而得。

3. 两种特殊情形 下面讨论两种特殊情形。

（1）如并入（分离）质量的绝对速度为零，即$\boldsymbol{u}=0$，则由（1.1.2）得

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}$$

或

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{1.1.7}$$

式（1.1.7）形式上与常质量质点动量定理的微分形式相同。

（2）如并入（分离）质量的相对速度为零，即$\boldsymbol{v}_r=0$，则由（1.1.4）得

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{1.1.8}$$

即此时变质量质点运动的动力学基本方程，具有与常质量质

点运动基本方程相同的形式。

必须指出，所有这些方程，质量m都不是常数，而是与时间 t 有关的。它或者是时间的显函数，或者是质点位置、速度及时间的复合函数。并入（分离）质量的绝对速度为零的情况，对于火箭是不适用的，但在天体力学的一些问题中可找到应用。至于相对速度为零的情况，则可见于浮冰等一类问题。

4．基本方程的投影形式 在应用中，常将（1.1.6）投影于定参考坐标系$Oxyz$轴上，得直角坐标形式的变质量质点运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \Phi_x \\ m\ddot{y} &= F_y + \Phi_y \\ m\ddot{z} &= F_z + \Phi_z \end{aligned}\right\} \tag{1.1.9}$$

式中$\ddot{x}$、$\ddot{y}$、$\ddot{z}$分别表示变质量质点的加速度在x，y，z轴上的投影，F_x、F_y、F_z与Φ_x、Φ_y、Φ_z分别为外力$\boldsymbol{F}$与反推力$\boldsymbol{\Phi}$在x，y，z轴上的投影。

若变质量质点作平面曲线运动，则可应用式(1.1.6）的自然坐标形式的运动微分方程：

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F_\tau + \Phi_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + \Phi_n \end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

式中$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$、$\dfrac{v^2}{\rho}$分别表示变质量质点的切向加速度与法向加速度，$F_\tau$、$F_n$与$\Phi_\tau$、$\Phi_n$分别为外力$\boldsymbol{F}$与反推力$\boldsymbol{\Phi}$在切线与法线上的投影。

§1-2 变质量质点动力学的两类基本问题

与常质量质点动力学相类似，变质量质点动力学也可分为两类基本问题：已知质点的运动，求作用于质点的力；已知作用于质点的力，求质点的运动。前者是第一类基本问题，后者是第二类基本问题。但是，在应用方程（1.1.6）求解变质量质点动力学两类问题时，与常质量质点问题的主要区别在于：变质量质点的质量m是时间的函数，必须已知其变化规律，同时，还必须知道并入（分离）质量dm的相对速度$\boldsymbol{v}_r$或绝对速度$\boldsymbol{u}$。下面举例说明这两类问题的求解方法和步骤。

例1-1 单位长度质量为ρ(kg/m）的均质链条在水平面上卷成一堆，其一端在力$\boldsymbol{F}$(N）的作用下使链条沿铅直方向以匀速$\boldsymbol{v}$(m/s）向上运动（图1.2）。设堆积在地面的链条对提起部分没有力作用，试求力$\boldsymbol{F}$之值与上升高度x或时间t的关系。

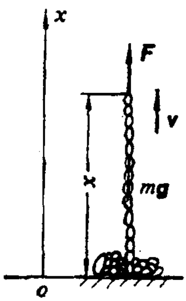

图 1.2

〔解〕 链条作平动，且运动中质量是不断变化的，可视为变质量质点。据题意，此为已知运动求作用于链条一端的力$\boldsymbol{F}$，属第一类问题。考察链条的运动，其一是以匀速$\boldsymbol{v}$铅直向上离开水平面的质量不断变化的一段链条的运动，其二是链条剩余部分仍旧静止在水

平面上，但质量不断减少。

取向上运动长度为x、质量为m的链条为研究对象。于是$m=\rho x$，并入质量$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}x$。长度$x$部分链条的速度$\boldsymbol{v}$铅直向上，$\mathrm{d}m$的绝对速度$\boldsymbol{u}$因进入运动前是静止的，故为零，即$\boldsymbol{v}_r=-\boldsymbol{v}$。作用于链条$x$上的外力为重力$m\boldsymbol{g}$和作用力$\boldsymbol{F}$。反推力$\boldsymbol{\Phi}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r=-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}$。应用方程（1.1.6）在$ox$轴上的投影可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F-mg-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v \tag{a}$$

由题设，知

$$v=\text{常量},\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \tag{b}$$

又

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\rho v \tag{c}$$

将（b）和（c）代入方程（a）得力F与x的关系为

$$F=\rho xg+\rho v^2(\mathrm{N}) \tag{d}$$

因$x=vt$，故F与t的关系为

$$F=\rho v(v+gt)(\mathrm{N}) \tag{e}$$

例1-2 质量为M的气球在高度H处由静止开始铅直上升，气球下端悬挂一单位长度质量为ρ的长且柔软的均质重索，索的未带起部分完全卷聚在气球的正下方，如图1.3所示。作用在气球上的力，除重力外，还有阻力$R=\beta v^2$（其中β为常数，v为气球速度）和已知升力$\boldsymbol{F}$。取坐标轴如图，原点取在地面上，试求气球的速度表为高度的函数。

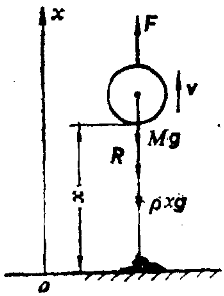

图 1.3

〔解〕 气球与重索作平动，可视为变质量质点。取气球及进入运动长为 x 的重索为研究对象，其质量为 $m=M+\rho x$，并入质量 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}x$。因为重索进入运动前为静止，故 $\mathrm{d}m$ 的绝对速度 $u=0$，其相对速度 $v_{rx}=-v_x=-\dot{x}$。作用于研究对象的外力有重力 $mg=(M+\rho x)g$，升力 $F_x=F$，阻力 $R_x=-\beta v_x^2=-\beta\dot{x}^2$。这是已知力求运动的问题。根据式(1.1.6)有

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=F-(M+\rho x)g-\beta\dot{x}^2+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_{rx} \qquad (a)$$

或

$$(M+\rho x)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F-(M+\rho x)g-\beta\dot{x}^2-\rho\dot{x}^2 \qquad (b)$$

考虑到 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\ \dfrac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}$，上式写为

$$\frac{1}{2}(M+\rho x)\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}+(\rho+\beta)\dot{x}^2=F-(M+\rho x)g \qquad (c)$$

令 $\dot{x}^2=y$，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2(\rho+\beta)}{M+\rho x}y=\frac{2F}{M+\rho x}-2g \qquad (d)$$

方程（d）为一阶线性变系数非齐次微分方程，由常微分方程理论可知它的解为