出 版 说 明

为适应成人教育事业的发展，进一步完善北京市成人中等专业教育的教学基本建设，在总结近10年教学经验的基础上，我们组织力量重新编写了这套供成人中专财经、文科类专业使用的《数学》教材.

在这套教材的编写过程中，我们首先修订了《成人中等专业学校数学教学大纲（财经、文科》（1987年制定）；然后将大纲修订稿提交各成人中专校讨论修改. 在充分吸取各方面意见的基础上确定了新的《北京市成人中等专业学校数学教学大纲（财经、文科）》.这套教材是以新大纲为依据组织编写成的. 计划于1991年秋季始与大纲配套供各成人中专学校选用.

参与这套教材写作的同志都是长期从事成人中专数学教学的任课教师. 这些同志在编写过程中，为使教材能够突出成人教育特点，适合培训对象学习，在内容的选择、编排，文字的叙述，定理、定律的推演，习题、作业的遴选等方面都做了大量的工作，尽了最大的努力，也进行了一些新的尝试，具体说明见《后记》.

全套教材分为上、下二册，参加上册编写的有陈泰康、赵宝生、沙作钧、李培恒同志，参加下册编写的有何引、张任之同志。全部书稿由何引同志负责纂集并配画了插图. 沙作均同志对全书进行了审定。

北京市成人教育局中等教育处

1990年12月

目　　录

第六章　数　　列

数列是代数学方面的一个基础知识，它不但有广泛的应用，而且还是进一步学习高等数学的基础．本章将讨论数列的概念，以及数列中最简单的等差数列与等比数列．

6.1　数列的概念

我们先考察以下几个例子：

（1）自然数从1开始，依次排列起来，组成一列数：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots,n,\cdots;$$

（2）$-\frac{1}{2}$ 的1次幂、2次幂、3次幂、4次幂、…，顺序排列下来，得到一列数：

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots;$$

（3）把 π 精确到0.1、0.01、0.001、…，的不足近似值组成一列数：

$$3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ \cdots;$$

（4）后一个数总比前一个数多3的一列数：

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots;$$

（5）把函数 $f(n)=5-2n$ 中自变量依次取 1，2，3，4，5所得到的函数值排列起来组成的一列数：

$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5;$$

（6）由常数 3 组成的一列数：

$$3,\ 3,\ 3,\ \cdots3,\ \cdots.$$

通常我们把按一定次序排列着的一列数，叫做**数列**．一般用a_1，a_2，a_3，…a_n，…，表示，或记作$\{a_n\}$（$n\geqslant 3$）．

数列中的每一个数叫做数列的一项，各项依次叫做这个数列的第1项（首项）、第2项、…、第n项、…，其中第n项a_n叫做数列的**通项**或**一般项**．项数有限的数列叫做**有穷数列**．如上面例子中的数列（5）；项数无限的数列叫做**无穷数列**，如上面例子中的数列（1）～（4）；各项都等于同一常数的数列叫做**常数列**，如上面例子中的数列（6）．

数列$\{a_n\}$可以看作是定义域为自然数集（或它的有限子集）的函数．即当自变量从小到大依次取1，2，3，…自然数时，相应的一系列函数值就构成了数列．

一个数列的一般项a_n与项数n之间的函数关系若能用关于n的解析式表示，我们就称这个解析式为数列的**通项公式**．

当我们知道了一个数列的通项公式以后，就可以依次用1，2，3，…，去代替公式中的n，求出这个数列的各项．

值得一提的是，并非任一个数列都能写出它的通项公式．如上面提到的数列（3）就没有通项公式．

例1 根据通项公式$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，写出这个数列的前5项．

解 在通项公式中依次用1，2，3，4，5代入后得到

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2}、a_2=\frac{1}{2\cdot 3}、a_3=\frac{1}{3\cdot 4}、a_4=\frac{1}{4\cdot 5}、a_5=\frac{1}{5\cdot 6}.$$

例2 求数列$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right\}$的前4项

解 ∵通项公式$a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$．

$$\therefore\quad a_1=(-1)^{1+1}\frac{1}{1}=1,\quad a_2=(-1)^{2+1}\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$a_3=(-1)^{3+1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3},\quad a_4=(-1)^{4+1}\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

因此这个数列的前4项分别是1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$.

反过来，如果知道了一个数列的开头几项，也可用试探的方法写出它的通项公式.

例3 已知数列1，3，5，7，…，求这个数列的通项公式.

解 从观察可知数列的每一项都是项数的2倍减1，所以可写出这个数列的通项公式是

$$a_n=2n-1.$$

例4 写出数列 $\frac{3}{2}$，$\frac{8}{3}$，$\frac{15}{4}$，$\frac{24}{5}$，…，的通项公式，并写出其第9项.

解 比较题中所给数列各项的分子分母，可以看出，各项的分母比项数多1，而分子是其分母的平方数减1，

$$\therefore\quad a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}.$$

有了通项公式，要求第9 项即 a_9，只要将$n=9$代入通项公式就可求得

$$a_9=\frac{(9+1)^2-1}{9+1}=\frac{99}{10}$$

下面给出一些常用简单数列的通项公式：

（1）1，2，3，4，… $a_n=n$；

（2）1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，… $a_n=\frac{1}{n}$；

(3) 2, 4, 6, 8, … $a_n=2n$;

(4) 2, 4, 8, 16, … $a_n=2^n$;

(5) 1, −1, 1, −1, … $a_n=(-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}$;

(6) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, … $a_n=\frac{1}{n^2}$.

习 题 一

1. 写出下面各数列的前4项.

(1) 从小到大排列着的所有偶数.

(2) 从小到大排列着的奇数的倒数.

(3) 把$\frac{1}{3}$精确到0.1、0.01、0.001、…组成的一列数.

2. 按照下面各数列的通项公式写出每个数列的前4项.

(1) $a_n=\frac{1}{n+1}$; (3) $a_n=2^n+\frac{1}{n}$;

(2) $a_n=(-1)^n n$; (4) $a_n=9\times 0.1^n$.

3.

(1) 写出数列1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, …的通项公式，并求出第9项;

(2) 写出数列$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{6}{27}$, $\frac{8}{81}$, …的通项公式，并求出其第6项;

(3) 写出数列$1+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, …的通项公式;

(4) 写出本节开始时例子中给出的数列(4)的通项公式.

6.2 等差数列

1. 等差数列及其通项公式

在生产、生活、经济管理等许多方面，经常会遇到等差数列的问题。我们观察上节中提到过的数列

2，5，8，11，…

这个数列的特点是：从第二项开始，每一项与它前面一项的差都等于3。

一般地，如果数列从第二项开始，每一项与前一项的差为同一常数d，这个数列就称为**等差数列**。d 叫做等差数列的**公差**。

如果已知一个等差数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…的第1项是a_1，公差为d，根据等差数列的定义有

等差数列的第1项为：a_1；

等差数列的第2项为：$a_2=a_1+d$；

等差数列的第3项为：$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$；

………………………………………………

等差数列的第n项为：$a_n=a_1+(n-1)d$，

由此得到等差数列的通项公式是

$$a_n=a_1+(n-1)d. \tag{6-1}$$

这里首项a_1、公差d、项数n称为等差数列的三个要素。

从函数的角度来看，通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 是等差数列$\{a_n\}$的一种解析表示，因变量a_n是自变量 n 的函数。在同一个坐标系下，其图象是函数$y=a_1+(x-1)d$图象上的一串孤立点。

例1 等差数列的第1项是2，第9项是18，求公差d。

解 $\because$ $a_1=2$，$n=9$，$a_9=18$

$\therefore$ 根据公式（6-1）得到

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{18-2}{9-1}=2.$$

例2 求等差数列11，8，5，…的第20项。

解 ∵ $a_1=11$，$n=20$，$d=8-11=-3$

∴ 根据公式(6-1)得到

$$a_{20}=11+(20-1)(-3)$$
$$=11+19\times(-3)=-46.$$

例3 等差数列5，9，13，…的第几项是401？

解 ∵ $a_1=5$，$d=9-5=4$.

设 $a_n=401$，则根据公式（6-1）有

$$401=5+(n-1)\times4$$

∴ $n=100$.

答：这个数列的第100项是401.

例4 已知等差数列的第4项是10，第7项是19，问它的前8项分别是多少？

解 设所求的各项分别为a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8.

则 ∵ $a_4=10$，$a_7=19$.

而 $a_4=a_1+3d$，$a_7=a_1+6d$，故有

$$\begin{cases}a_1+3d=10\\ a_1+6d=19\end{cases}$$

解此方程组，得到

$$\begin{cases}a_1=1\\ d=3.\end{cases}$$

∴ $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times3=3n-2$.

在 $a_n=3n-2$中依次令$n=1,2,3,\cdots,8$得到

$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=7$，$a_4=10$，

$a_5=13$，$a_6=16$，$a_7=19$，$a_8=22$.

答：这个数列的前8项依次为1，4，7，10，13，16，19，22。

例5　如果x、A、y这三个数成等差数列，那么A叫做x和y的等差中项，求证：$A=\frac{x+y}{2}$。

证　∵　x、A、y成等差数列。

∴　$A-x=y-A$

整理后得到

$$2A=x+y$$

即
$$A=\frac{x+y}{2}$$

例6　已知a_1、a_2、a_3三个数成等差数列，并且$a_1=3$，$a_3=7$，求a_2的值，并且在直角坐标系上将此数列的图象画出。

解法一　由题条件知所求数列为3、$3+d$、7。

因此有$(3+d)-3=7-(3+d)$，即

$$d=2。$$

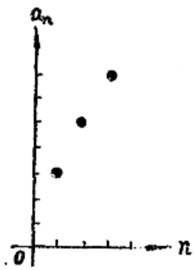

图 6-1

从而得到

$$a_2=3+d=3+2=5$$

图象如图6-1所示。

解法二　由题条件知a_2是a_1、a_3的等差中项，故由例5的结论，得

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{3+7}{2}=5。$$

2．等差数列的前 n 项和

在实际生活当中经常会遇到一些求等差数列前 n 项和的问题．例如，一垛钢管共8层，最上一层有5根，每往下一层就多一根，最下一层是12根．如果要求这垛钢管的总数，实际上就是求 5，6，7，8，9，10，11，12 的总和，即求这个等差数列的总和．

经过观察分析，可以看出，上面等差数列中，与首末项等距项的和都相等，即

$5+12=6+11=7+10=8+9=17.$

写成算式：

$$
\begin{array}{r}
S=5+6+7+8+9+10+11+12 \\
S=12+11+10+9+8+7+6+5 \\
\hline
2S=17+17+17+17+17+17+17+17
\end{array}
$$

$2S=17\times 8$

$$S=\frac{1}{2}\times 17\times 8=68.$$

一般地，设等差数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…的公差是d，前n项和是S_n，则

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+\cdots+[a_1+(n-1)d] \quad (1)$$

又

$$S_n=[a_1+(n-1)d]+\cdots+(a_1+3d)+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \quad (2)$$

（1）+（2）有

$$2S_n=n[2a_1+(n-1)d]$$

$$\therefore \quad S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]。 \tag{3}$$

将$a_n=a_1+(n-1)d$代入（3）式，得

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n). \tag{6-2}$$

由（3）式得

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}. \tag{6-3}$$

公式（6-2）与（6-3）称为等差数列前n项和公式．在上述两个公式中a_1，a_n，n，d，S_n这5个量如果已知其中的3个，就可以通过公式变形求出另外两个．

例7 计算$25+50+75+\cdots\cdots+1\ 000$．

解 $\because$ $a_1=25$，$d=25$，$a_n=1\ 000$．

$\therefore$ 根据公式（6-1）有

$1\ 000=25+(n-1)\times 25$

即有

$$1\ 000=25n$$

$$n=40$$

故

$$a_{40}=1\ 000.$$

$$S_{40}=\frac{40\times(25+1\ 000)}{2}=20\ 500.$$

例8 在等差数列中，已知$a_1=3$，$d=-\frac{1}{2}$，$n=10$，求S_{10}．

解 $\because$ $a_1=3, d=-\frac{1}{2}$，$n=10$．

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

$$\therefore\quad S_{10}=10\times 3+\frac{10\times(10-1)}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=30+\left(-\frac{45}{2}\right)=7\frac{1}{2}.$$

例9 某粮库有粮600吨，第一天运走33吨，以后每天比前一天多运走6吨，问这批粮食在几天内可以运完？

解 由题条件有$a_1=33$，$d=6$，$S_n=600$，根据公式(6-3)得

$$600=33n+\frac{n(n-1)}{2}\times 6.$$

整理后得到

$$n^2+10n-200=0$$

$$(n-10)(n+20)=0$$

$\therefore\quad n_1=10$，$n_2=-20$.(不合题意，舍去)

答：10天内可运完这批粮食.

习 题 二

1．求等差数列8，3，－2，…的公差d，通项公式a_n和第78项的值.

2．已知等差数列的第4项是5，第10项是29，求第8项的值.

3．求下面各组数的等差中项

（1）25与42；（2）$a-b$与$a+b$.

4．在10与28中间插入两个数，使它们同这两个数成等差数列.

5．在等差数列里

（1）$d=0.7$，$a_{11}=32$，求a_1；

（2）$a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$，求S_n；

（3）$a_1=16, a_n=-2$，$S_n=70$，求d及n；

（4）$d=\frac{1}{3}$，$n=37$，$S_n=629$，求a_1及a_n.

6．求等差数列1，5，9，…的前50项的和.

7．某工人自制一存放圆钢的斗子，其底层可放某种圆钢6根，每上一层多放一根，一共可放5层.这样放满一斗共有圆钢多少根？

6.3　等比数列

1．等比数列及其通项公式

等比数列在实际生产和生活中有着广泛的应用．例如在计算利息、经济增长速度、固定资产折旧及人口增长等方面都要用到等比数列的概念．

我们观察下面两个数列：

（1）$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…；

（2）$3\cdot2$，$3\cdot2^2$，$3\cdot2^3$，…，$3\cdot2^n$，….

这两个数列的特点是：从第二项起，每一项与它的前一项的比都是相等的．

一般地，如果一个数列从第二项开始，每一项与它的前面一项的比为同一非零常数，这个数列就叫做**等比数列**．其中非零常数叫做等比数列的**公比**．例如上边提到的两个数列的公比分别是$\frac{1}{2}$和2．

如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\cdots$$

是等比数列，它们的公比是q，则根据等比数列的定义有

$$a_2=a_1q,$$

$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2,$$

$$a_4=a_3q=(a_2q)\cdot q=(a_1q^2)\cdot q=a_1q^3,$$

…………………

$a_n=a_1q^{n-1}$.

从而得出等比数列的通项公式是

$$a_n=a_1q^{n-1}\quad(q\neq 0).\qquad(6-4)$$

这里首项a_1，公比q，项数n称为等比数列的三个要素.

从函数的角度来看，通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$是等比数列$\{a_n\}$的一种解析表示.因变量a_n是自变量n的函数，在同一坐标系下.当$q>0$且$q\neq1$时，其图象是函数$y=aq^x\left(其中a=\frac{a_1}{q}\right)$图象上的一串孤立点。

例1 求等比数列$2,-\frac{1}{2},\frac{1}{8},-\frac{1}{32},\cdots$的第6项.

解 $\because\quad a_1=2,\ q=-\frac{1}{4},\ n=6.$

$\therefore$ 根据公式（6-4）得

$$a_6=2\left(-\frac{1}{4}\right)^{6-1}=-\frac{1}{512}.$$

例2 已知等比数列中$a_1=3$，$q=2$，$a_n=48$，求项数n，并将此数列的图象在直角坐标系上画出.

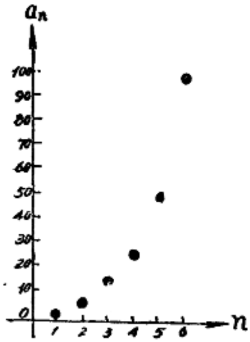

图 6-2

解 将已知数据代入公式（6-4）中得到

$$48=3\times2^{n-1}$$

$$2^{n-1}=16,$$

即 $$2^{n-1}=2^4.$$

从而 $$n-1=4$$

$$n=5$$

图象如图6-2所示。

例3 在1和 81 中间插入3个数，使它们和这两个数成等比数列，求这3个数。

解 ∵ $a_1=1$， $a_5=81$。

∴ 根据公式（6-4）得到

$$81=q^{5-1},$$

$$q^4=81,$$

故 $$q=\pm 3.$$

当$q=3$时，所求3数分别是3，9，27；

当$q=-3$时，所求3数分别是-3，9，-27。

例4 如果x，G，y三个数成等比数列，那么G叫做x和y的**等比中项**，求证：$G^2=xy$。

根据等比数列的定义得

$$\frac{G}{x}=\frac{y}{G}$$

即 $$G^2=xy.$$

例5 某地区计划第一年造林100亩，以后每年比前一年多造林10%，问第五年造林多少亩？

解 ∵ 每年造林是前一年的（1+10%）倍

∴ $a_5=100\times 1.1^{5-1}=100\times 1.1^4\approx 207$（亩）。

答：计划第五年造林约207亩。

2．等比数列的前n项和

设等比数列为a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，它的前n项和为S_n，则

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

或

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}. \tag{1}$$

（1）式两端同乘以q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n. \tag{2}$$

（1）－（2）得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

当公比$q\neq1$时有

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad (q\neq1). \tag{6-5}$$

这就是公比不等于1的等比数列前n项和的公式。

当公比$q=1$时，由（2）得 $S_n=na_1$。

例6 求等比数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$前7项的和。

解 ∵ $a_1=1$，$q=\frac{1}{2}$，$n=7$。

∴ 根据公式（6-5）得

$$S_7=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{32}.$$

例7 已知等比数列前5项的和是242，公比是3，求此数列的前5项。

解 ∵ $S_5=242$，$q=3$，$n=5$。

∴ 根据公式（6-5）得

$$242=\frac{a_1(1-3^5)}{1-3}.$$

即

$$121a_1=242$$

$$a_1=2.$$

因此这个等比数列的前5项是2，6，18，54，162。

例8 某工厂今年的纯利收入是5万元，计划在最近4年内，年纯利收入每年比上一年增长5%，计算这4年内（包括今年）纯利收入的总数（精确到1 000元）。

解 根据题中所给条件，知该厂在第一年、第二年、第三年、第四年的纯利收入成以下等比数列：

$$50\,000,\ 50\,000\ (1+5\%),\ 50\,000\ (1+5\%)^2,$$

$50\,000\ (1+5\%)^3$.

即 $a_1=50\,000,\ q=1.05,\ n=4$.

代入公式（6-5）中得到

$$S_4=\frac{50\,000(1-1.05^4)}{1-1.05}\approx 216\,000\text{（元）},$$

答：该厂四年中的纯利总收入为21.6万元。

由公式（6-4）与（6-5）可以看出，如果知道等比数列a_1，q，n，a_n，S_n这五个量中的任何三个量，就可利用这两个公式求出另外两个量。

习 题 三

1．求下列等比数列的公比、通项公式和第8项。

（1）2，4，8，16，……；

（2）15，-5，$\frac{5}{3}$，$-\frac{5}{9}$，……．

2．求下列各组数的等比中项：

（1）25和36；（2）$7+3\sqrt{5}$ 和$7-3\sqrt{5}$ ．

3．在160与5之间插入4个数，使它们成等比数列，求此4个数．

4．在下列各题中，根据给出的等比数列的3个量，求未知的两个量．