组合学原理

[法] C·贝尔热著

上海科学技术出版社

学原理

[法] C. 贝尔热 著
陶懋颀 李 乔 李炯生 译

内 容 提 要

组合学(即组合数学)是一门古老而又年青的数学. 近几十年来发展迅猛，并日益受到重视. 本书法文版是作者在1967—1968年间讲课的教材，专讲计数问题. 正文分五部分：基本计数函数，划分问题，反演公式及其应用，置换群，Pólya定理。正文前有作者关于什么是组合学的长篇论述和G.C.罗塔写的序言。全书叙述生动，例子很多，富于启发性，是组合学的一本出色的入门书.

本书可供各类高等学校理工科教师、学生、研究生、数学工作者和爱好者阅读.

Principes de Combinatorie

C. Berge

本书根据J.Sheehan的英译本

«Principles of Combinatorics»

(Academic Press, 1971年版)译出

组合学原理

[法] C. 贝尔热 著

陶懋颀 李 乔 李炯生 译

责任编辑 赵序明

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 江苏泗阳印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 5.5 字数 121,000

1986年11月第1版 1986年11月第1次印刷

印数 1—4,400

统一书号：13119·1362 定价：1.05元

序

当今，面临要作组合思考的论题的大多数数学家，都以下面两个习惯语句中的一句来应付：(a)“这是一个纯粹的组合论题”；(b)“这是一个困难的组合论题”。象施行催眠那样地重复念诵着这两句真言中的一句，对于唸它的人仿佛都能起相同的安慰作用：能使他不受一切良心上的责备而推卸责任，并把工作任务转嫁到别人的肩上。

由于技术专家们的势如潮涌般的各种问题，上述这段常被引用的小品的结局是：在数学家当中的压力增加了，尤其是对于那些“纯”数学家，他们象往日贵族老爷夸耀对于自己故土乡谈的无知那样，傲然夸耀对于组合理论的完全无知。

人们情不自禁地要反击这种排斥做法，这种做法在过去曾经成功地用“它无非如此而已”这样的“鸣叫”把组合学家贬为在数学上不值一提的人。反击本来可以用下列方式实现：集中火力攻击一个当今流行的数学分支，把用定义垒起的城墙和合乎逻辑的细节形成的上层建筑轰掉之后，必定会剩下一些虽不算多但不是微不足道的组合事实，它们可以容易之至地用标准的组合技巧“惠予解决”。

所幸，由于一个响亮的理由，人们没走这条路。这理由是：组合学家们有更好的事要干。在过去十年中——在 Claude Berge 的第一本书问世后很短的时间里——组合学这个领域无论在成果上、深度上和重要性上都成倍成倍地增长了，看

来，被颠倒了的事情很快就要被完全颠倒过来——如果现在还没有颠倒过来的话。

在复兴组合学方面，有两位法国人起过主要的作用：Berge和Schützenberger。Berge是一位多产作家。他的书在驾驭文字的深度与广度方面，事实上超过了任何地方的任何一本书。我想起了自己在读他的第一本书中的各种不同例子时的乐趣。这些例子使我忘不了书的内容。在那次阅读之后，很快我就同许多人一样，把自己从连续数学的束缚中解脱开，加入了离散数学这支"叛军"中。

当我在这本引论式的书中重新读到Berge的手笔的时候，我又一次感到多么愉快啊！题材大体上可说是他以前所写的各书的补充，并且大量地处理了计数方法问题。题目的选择很均衡；叙述上是完美无瑕的；内容上，任何对主题感兴趣并稍具代数准备知识的人都可以读懂。有些内容是第一次汇集入书的，其中特别值得注意的是优美的Robinson-Shensted定理，Eden-Schützenberger分解定理以及与Young氏图解、树及对称群有关的各种事实等。

遗憾的是，为了缩小书的篇幅，未能用纯组合的方式给对称群的表示理论以充分的描述；但从另一方面讲，这或许以自成一本书为宜。本书中所写的，已经足可刺激读者的胃口，并能把读者引向其它的原始材料——为了使有关材料更加充实，给出了丰富的文献目录。

本书的主要长处，也许是它那富有启示、激人向上的品质。那种把读者装进刻板的程序之中的、旧的"定理——证明"式的数学陈述格式已经一去不复返了——请代数学家们注意——正被代之以一种具有论证性的、例子丰富的行文潮流。这使人忆起往昔的经典著作：Salmon，Webe，Bertini…的作

品*)。

Berge 是这种新潮流的一位权威。因而，我想建议把本书的书名改成"有魅力的组合学"。

Gian-Carlo Rota

*) George Salmon, 19 世纪几何学家，有«A Treatise on Conic Sections»、«Analytische Geometrie des Raumes»等名著；Heinrich M. Weber, 19 世纪数学家，有«Lehrbuch der Algebra»等名著；Eugenio Bertini 19—20世纪代数与几何学家，著有«Geometria Proiettiva degli Iperspazi»。——译注。

目　录

组合学是什么

现今，组合分析(或“组合学”)已经成为大量关注的集中点，可是在文献中似乎还没有这门学科及其许多分支的令人满意的定义。

实际情形是：数学工作者们凭本能感觉到某些问题具有“组合的本性”，应该系统地研究解决这些问题的方法。上面这些话，归根结底就是 Pólya 在《组合理论杂志》*) 第一卷的导言中所说的意思。

我们希望在这里提供组合学的一个定义，这个定义有赖于“组态”这个相当精确的概念。

每次把分布对象按某个预先确定的约束条件进行分布，都会产生一个组态。把各种各样的盒子塞进抽屉，就是组态的一个例子。

例如，考察两个互相正交的拉丁字方块：

Aa	Gh	Fi	Ej	Jb	Id	Hf	Bc	Ce	Dg
Hg	Bb	Ah	Gi	Fj	Jc	Ie	Cd	Df	Ea
If	Ha	Cc	Bh	Ai	Gj	Jd	De	Eg	Fb
Je	I	Hb	Dd	Ch	Bi	Aj	Ef	Fd	Gc
Bj	Jf	Ia	Ac	Ee	Dh	Ci	Fg	Gb	Ad
Di	Cj	Jg	Ib	Hd	Ff	Eh	Ga	Ac	Be
Fh	Ei	Dj	Ja	Ic	He	Gg	Ab	Bd	Cf
Cb	Dc	Ed	Fe	Gf	Ag	Ba	Hh	Ii	Jj
Ec	Fd	Ge	Af	Bg	Ca	Db	Ij	Jh	Hi
Gd	Ae	Bf	Cg	Da	Eb	Fc	Ji	Hj	Ih

*) Journal of Combinatorial Theory，创刊于 1966 年，由纽约学术出版社(Academic Press)出版。——原注

在这个例子中，分布对象是笛卡儿积

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$$
$$\times \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

中的元素，把它们映入 10×10 方块的 100 个“盒子”中，约束条件是：

（1）映射是一个全单射，即每个盒子恰含有一个对象，并且每个对象在方块中只出现一次。

（2）在同一行或同一列中，无论大写字母还是小写字母都不会出现一次以上。

上面这个方块在组合学历史上是最有纪念意义的组态之一，因为 Euler 曾猜想它是不存在的。Euler 的猜想到 1960 年才被 Bose、Shrikhande 和 Parker[14] 驳倒。他们证明了，除 6 阶方块以外，这种方块都是存在的。

可以把组态的概念写成一个数学上精确的概念。办法是把它定义为“把一个由对象组成的集映入具有已知结构的抽象有限集”；例如，n 个对象的一个排列，就是一个“把 n 个对象的集合映入有序集合 $1, 2, \cdots, n$ 的全单射”。不过，我们只对满足某些约束条件的映射感兴趣。

正如算术（用标准的运算）处理整数、代数在一般意义下讨论运算、分析讨论函数、几何讨论刚性形状、拓扑学讨论连续那样，组合学讨论的是组态。组合学对于具有一些特定性质的组态作计数、枚举*)、检验并研究其存在性。人们用组合学寻求组态的内在性质，并且研究从一个组态变入另一个组态的变换及一个已知组态的“子组态”。

组合学的当务之急与现代数学的其它分支是完全一样的。然而，令人惊讶的是：数学的这个特殊分支的发展却是沿

*) 参看本引言中所列的第五个方面。——原注

着现代数学主流的边缘或者是离开主流进行的。这一主题的基本的定理多次被忘却又多次被重新发现，笔名为 Nicolas Bourbaki 的数学家集体几乎不注意 Pólya 定理。在他们已出版的二十卷书中，虽然通篇采用了许多基本的组合公式，但是只写入了很少几个一般的组合定理。纠正这个偏向是一件重要的事。

第一个方面：研究已知的组态

组合数学发展的第一个阶段，是研究已知的或易于构作的组态的内在性质。从纪元之初，搞泥土占卜的占卜系统的人们就研究过机遇性组态[1]。在一封标明为 Archimedes 写给 Cyrene 的 Eratosthenes 的信中，提出了在某些条件下去"计算太阳神的牛数"。这个问题的一部分陈述是*)：

当白公牛与黑公牛数目相混时，它们纹丝不动地排成一个正方形，牛群把向四外延伸的 Thrinacia 平原充满。此外，当黄公牛与花公牛合成一群时，它们这样排列：数目由 1 开始，慢慢加多，直到排成一个三角形，其中既没有别色的公牛，也没有空缺。[2]**)

---

*) 很有意思的是：这个问题引出了 Fermat 方程：

$$y^2-410,286,423,278,424x^2=1.$$

牛群的总牛数的最小解数量级应为 $7766\times10^{206,541}$。——原注

**) 这段话只是问题的一部分陈述，所以只看这段话是无法了解整个问题的。这时只能粗略地知道，在这里给了两个组态：其一是白公牛与黑公牛排成的正方形；另一为黄公牛与花公牛排成的正三角形。

这个问题引起后人注意是因为在 1773 年 Gotthold Ephraim Lessing 发表了一首叙述它的二十四行诗。其后，数学家们讨论这个问题达一百多年。在数学上，这个问题是要找满足 7 个线性方程和两个附加条件的 8 个未知量的正整数解。上面所引的段落相当于两个附加条件；以 W、X、Y、Z 分别表示白、黑、黄、花公牛数，则应有

$$W+X=\square,\ Y+Z=\triangle.$$

其中□表示平方数；△表示三角形数。

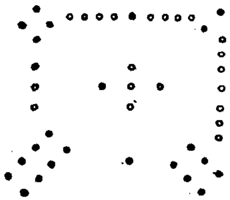
鉴于问题的重点是在数论方面，读者无必要深究，只承认它与组态有关即可。

除正文所引的文献外，有关历史可参看 L.E.Dickson:《History of the Theory of Numbers》, Vol.II, Chelsea publ. Co., New York, 1952, 第 342—345 页。——译注

这个问题是古代旁及组合学的罕见事例之一。实际上，它与算术有关，特别是与 Pythagorus、Nicomachus 和 Diophantus 的多角数有关。当然，在 Euler 以前还谈不上有什么真正的组合数学学派。

第二个方面：考察未知的组态

组合学的另一个方面，是考察具有某些特定性质的组态的存在性与不存在性。这就是在有名的 Königsberg 城（今称 Калининград）七桥问题中或在 Euler 的三十六名军官问题中出现的情形。或者，举个更抽象些的例子：在构作有限几何中出现的情形。在易经[3] 中发现这种类型的考察是颇使人困惑的。易经是在中国被道士用来算卦的书，并且是现今留存的最古老的教科书之一（约在公元前 2200 年）。这本宗教著作描画了两个组态：洛书与河图。“洛书”传说是在从洛河中浮出的一只神龟背上画着的，其图样如图 1 所示。用整数代替各样点集，就可以得到著名的“农神”幻方：



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1　洛书

这个组态之所以值得注意，是因为它的每行、每列以及每条对角线上各数之和都相同，即都等于 15。

“河图”据传说也是画在从河里浮出的神龟背上的（这条

河今天叫黄河)，其图样重绘于图 2；代之以整数，即得到下列组态：

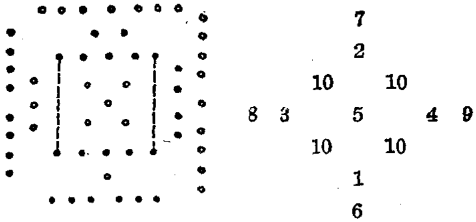


图2 河图

用观察法就能清楚地看到：在这个图中，相邻数字之和相对于中心的对称性质。例如 $5+3=8$；$5+1=6$；等等。$3+10+2=8+7$；$3+10+1=8+6$；等等。

懂得构造这种组态的困难，就不能说在中国古代不曾有过组合学。

第三个方面：组态的计数

对于某些易于得到的组态，例如每次从 n 个对象中取 p 个的组合，很自然地要问这样的组态有多少个？因此，在组合学演化过程中的一个新的进展，就是得出计算满足某些特定性质的组态数目的准确公式。

当然，在这个方向上，组合学的发展是受统计学与概率(按“概率”一词的原本定义)计算强烈影响的结果。实际上，在很长一段时间里，大多数数学工作者把组合学与“计数”当作一回事。比如 Riordan 的书[6]，它的主要任务就是“找出进行某个确定的运算的方法的个数”。

如果我们把自己局限于这个观点来看问题，那么组合学

难以继续发展下去的苗头几乎到处可见：它的大部分公式曾经被发现又发现多次以上。这种苗头的最早的例子是二项式系数，12 世纪印度算学家 Bhaskra 的学派就已知道了它们*)，但西方世界对它们一直不知道，直到 Pascal 和 Fermat 把它们作为研究机遇性游戏的副产品时才发现。最近发现，在 1265 年，波斯哲学家 Nasir-Ad-Din 就讲授过求二项式系数的递归方法与“Pascal 三角形”[7]. 大约在 1560 年 Cardan 曾证明 n 元集的全部子集数是 2^n。

在 1666 年，二十岁的 Leibniz 发表了组合学的第一本著作《Dissertatio de Arte Combinatoria》。他在序言中解释了他怎样预见了一个其分支可以伸入逻辑、历史、甚至伦理、形而上学以及“全部科学领域”的新学科！

随着组态变得更复杂，从 Euler 算起的组合学者们在实践中逐渐地变得对计数技巧感兴趣了；大多数概率论学者、统计学者和工程师对于计数的兴趣收到了成果。沿着这条路线所得到的最有意义的发现是生成函数（它们是由 Laplace 发现的，但已为 Euler 在暗中应用过）以及归功于 Pólya 的一个定理。不过，这个定理已早就被 Redfield[5] 所明白地发表过[4]。至少在 Blanche Descartes 的一首诗中是这样断定的。下面是这首诗的全文：

“枚　举”

Pólya 有一个定理，
（它是 Redfield 早已证明了的）。
图论学家们寻求的秘密，
都凭了这定理传言授语！

*) 11 世纪宋朝的贾宪就已知道了它们。——译注

于是 Pólya 点数了有限树，
（正如 Redfield 以前所做的）。
“它们的数目恰如此，
一棵树苗也不多”。

Harary 数了有限图，
（像很早以前 Redfield 曾做过的）。
并指出我们得益良多，
就因为有了 Pólya 的工作。

接着 Read 把图叠起来一张压一张，
（Redfield 做过的就是这样）。
这样图的世界就编上了号，
使得没有一张图能够隐藏。

于是大家向 Harary、Pólya、Read 欢呼，
因为他们教大家图的学问，
但也要想一想 Redfield，
他毕竟早已走过这条路。

——Blanche Descartes

第四个方面：组态的近似计数

当组合学仅仅涉及“计数”的时候，这个学科仍是一堆零散的结果，虽然这个在本质上匠心独具的观点产生了许多很漂亮而且往往令人惊奇的算术公式。因为这个理由，组合学与数论紧密结合了两个世纪。

在二十世纪，出现了新的应用：在化学中(Pólya正是为了计算同分异构体*)的数目而证明了他的著名定理)，在物理中(二象性问题)，在经济与运筹学中(旅行推销员问题)，在统计学中(实验设计)，在信息论中(信号集合的容量问题)，等等。

当所研究的组态变得太复杂的时候，事实证明，企图把它们同已知的代数结构相联系并且用“优美的公式”去算它们的个数是徒劳无益的；这时不是用等式，而是需要求助于不等式、渐近值、模 p 同余式等等。

代替寻找具有一个已知性质的组态的准确数目的尝试，人们指望得到有关这个数目的信息，而不必给出求这个数目的精确公式，甚至也不必给出递归公式。这方面的一个特别奇怪的恰当例子是 Ramsey 数，它们同二项式系数很接近，但又很不可捉摸，以致当参数的值大于 7 的时候，人们甚至还不知道怎样计算它们。

第五个方面：组态的枚举

如果我们的兴趣在于寻求满足某些已知条件的组态的数目，那么这是一个计数问题；如果我们要实际列出这些组态，那么这就是一个枚举问题。[计数(counting) 与枚举(enumeration)这两个词，通常有着相同的意义，但是我们保留这里所说的区别]。

实际上，枚举组态通常是一种徒劳的工作，同时，也往往是不仅超出任何个人能力也超出最快的计算机能力的工作；可是，对于某些特别困难的问题，它仍然是仅有的证明方法(穷举推理法)。例如，拓扑学中的某些重要结果，就都是从列举凸多面体相应的性质出发而被发现的。

*) 原文误作聚合物。——译注

枚举的问题与分类的问题是分不开的；如果所考虑的组态的集合被分成了类，那么，有时候只要对每一类的某一个成员来证明所要的结果就可以了。

在很简单的情形(例如，n个对象每次取p个的组合)，计数公式是用先定出一种枚举方法的方式而得出的；但相反的过程也可以同样有成效：(对于数进行的)算术运算引出（对于组态集合进行的)代数运算，从而一个计数的方法就变成了一个生成组态的程序。在一个图中枚举具有已知长度的路时所发生的情况就是如此[8]；也许，大多数的古典组合学都可以用这个观点重写一次。

第六个方面：优化

下列问题是运筹学中遇到的一个典型问题：

假定对于具有某些特性的每个组态x，联系着一个数值$f(x)$（f称为经济函数)。问题是选择一个组态x_0，它使$f(x)$取极小，或者使$f(x)$ ε–极小，即：对于一切具有特定性质的组态x，都有

$$f(x)\geqslant f(x_0)-\varepsilon.$$

驰名的“旅行推销员问题”就是这种类型的问题的一个例子：如果一个推销员希望访问美国的50个州的首府各一次后回到他的出发点，试找出他最短的可能旅行的路线，迄今为止，对于这个看起来平淡无奇的问题，还没有实际上令人满意的解答。已提供的寻求最优旅行路线的算法，都包含着过多的步骤(所谓一个“好的”算法，其步骤的数目的数量级必须是n的多项式这样的级别；否则，计算将变得连计算机也无法处理)。

在很细致的情形，必须使用像“SEP”[9]或“分支定界法”那