机械制造中的统计方法

[保] А. Л. 米特柯夫
[苏] С. В. 卡尔达雷夫斯基

焦直仁
沙立功 译 高镇同 校

机械工业出版社

本书是苏联和保加利亚作者的共同著作，是关于应用数理统计方法解决机械科研和试验问题的专著。本书探讨了概率论和数理统计的基本理论及其在评价机械的质量、可靠性等指标方面的应用，对机械工作过程的数学描述和最佳化在试验中的应用进行了研究，并列举了应用实例。

本书适于从事机械研究、设计、试验及应用的工程技术人员阅读，也可供高等院校师生参考。

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СЕЛЬХОЗМАШИНОСТРОЕНИИ

А. Л. МИТКОВ

С. В. КАРДАШЕВСКИ

МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1978г.

СОФИЯ «ЗЕМИЗДАТ» 1977г.

* * *

机械制造中的统计方法

[保]А. Л. 米特柯夫

[苏]С. В. 卡尔达雪夫斯基

焦宝仁 沙立功 译 高镇同 校

责任编辑 贺[illegible]

封面设计 刘珊

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

重庆印制一厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 · 印张$13^3/_4$ · 字数305千字

1987年5月重庆第一版 · 1987年5月重庆第一次印刷

印数 0,001—3,800 · 定价 3.25 元

*

统一书号：15033·6176

目　录

绪　论

在极不相同的工作条件下工作的机械系统，其条件与大量的经常变化（在一定的范围内变化）的因素有关。例如，对于整地机组，这些因素是指地形、土壤种类、土壤的物理-机械性能等，收获机组的工作条件是由作物的物理-机械性能、产量、地形等所决定的。

这些因素变化的复杂性对机械系统的研究和描述带来了困难，有些甚至使之成为不可能。另一方面，机械所有质量的、功效的、可靠性的及其它的指标又在不同程度上与这些因素有关。

既然决定机械系统工作条件的因素还未被认识，因此其各种工作指标也是难以预测的（在进行相应的试验之前是不确定的），也就是说，具有随机的性质。

“随机”一词决不意味着“不存在”，只是由于我们尚未认识，情况不明和缺少必要的信息，该词意味着“不可预测”。“随机”也决不意味着是“无根据的”，每一个事件及其结果（事实）都是严格地由一定的原因决定的，每一个原因又可能是另一个原因作用的结果。当因果链比较简单时，显然容易分析，也可以准确地预测其最终结果，也就是说其中没有什么是随机的因素。例如，众所周知，向上抛的硬币只会落在地板上，而不会落在天花板上。但要知哪一面朝上就不那么简单了。当因果链较长而且复杂时，当它未能被完全掌握时，最终的结果就是不可预测的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

但这是不是意味着，当人们将来掌握了足够的知识和经验，随机现象就会从我们的生活中消失呢？无疑，在某些知识领域中随机性会有所减少，某些目前对人们是随机的现象，随着时间的推移也可能成为非随机的。但至于说到随机性的完全消失，则应当同意 Л. A. 拉斯特立金的观点。那就是，至少由于三个原因使之是不可能的：1.由于测量的精确度是有限的；2.由于宇宙是无限的；3.由于存在有测不准原理（海森堡提出）。

随机现象具有一定的属性并服从于特殊的规律。例如，众所周知，上抛的硬币有一半的机率是国徽面朝上，被掷的骰子每一面朝上的机率为 1/6。

数学的一个专门分支——概率论就是以随机现象的规律作为研究对象的。一般地说，用概率论的语言可以定量地表明最终结果不确定的那些情况。

概率论的理论于十七世纪随着赌博的兴起而发展起来，（法语“博奕”一词就是“机会”的意思），并长期在这个领域内发展。П. Л.切比雪夫为它在新的严格的数学基础上的发展奠定了基础（1845年）。今天，概率论几乎在所有的人类知识领域里都得到了广泛的应用。一般认为在数学的各个分支里，概率论最具有实际应用的价值。概率论的一些分支已发展成为单独的数学科目，如博奕论、信息论、公共服务论和可靠性理论等。这些科目的名称实际上都是基于数理统计学而形成的。在现代的试验研究中，数理统计学的作用一点也不比概率论小。数理统计学的发展与概率论紧密相关，它所解决的问题与概率论所解决的问题大体相反，但广泛采用了概率论的方法。在数理统计学和概率论的基础上近年来发展了试验理论，该理论正在成为独立的数学科目。

机械工作过程明显的随机特性及其相应的随机试验的数学模型，正是概率论和数理统计学的研究对象[76]。在不确定的条件下求解的理论等表明了解决机械研究和设计中的许多问题都应以这两门数学科目为基础。

所谓随机试验是这样的一些试验：该试验的最终结果不能由试验条件单独确定，即试验的最终结果不可能事先准确地被预测。值得注意的是，不但在科学研究中的试验是这样，而且在人类活动的各个方面也都是如此。

为了描述随机现象，在概率论中采用了如下一些抽象的模型：随机事件、随机变量和随机函数（随机过程）。

在本书所研究的问题中，基本上采用的是随机事件和随机变量。但在农业机械机组的研究中，在许多著作中采用了随机函数这个模型，其中最有名的是A．Б.鲁里的著作[45]。

第1章 随机事件

1.1 基本概念

概率论所研究的并非是所有的随机试验，而只是那些具有统计规律性的随机试验。在说明这种性质之前，首先引入某些基本概念。

随机试验取决于它所伴随的条件总体和所有可能结果的总体。在进行试验时假设满足所规定的综合条件，即进行试验并且得到相应的结果，则称之为随机试验[1、18、73]

确定随机试验的那些条件被认为在客观和主观上是不变的，与确定性条件同时影响随机试验结果的还有一系列其作用未知或部分已知的客观因素。确定性条件所定义的正是在随机现象中平均的稳定的，即有规律地稳定下来的条件。确定性条件使得有可能任意次重复随机试验，从而显示出来平均的、有规律的趋势。在随机试验中，变化因素（条件）定义为随机的，不可预测的。因此，在谈到相同条件下的重复试验时，必须注意到：只有第一组条件的确定性保持不变，具有恒定的型式。

在机床上加工某种零件时，可以保持恒定的速度、切削深度、走刀量和材料标号等，但是材料的均匀性，最初的毛坯尺寸，机床的振动等因素的某些变化，并不总是在我们已知的范围之内。因此，在相同的试验条件下，可能得到一些不同的结果，这种结果在试验之前是不能预测的。在确定条件下的试验可用平均值测定，从而知道哪一部分产品是合格的，

哪一部分产品将是不适用的。但是，由于变化的因素的影响，在加工某个零件时不可能判断它是合格的还是不合格的。

任何事情（开始、结果）在试验时可能出现也可能不出现，概率论中称之为随机事件。例如，加工的零件可能是合格的或者是不合格的。这两种随机事件中的每一种随机事件，在进行试验的结果中可能出现，也可能不出现。随机事件通常用大写的拉丁字母A、B、C、D等表示。

作为农业机械在工作时的随机事件，我们可以看到：例如单个的谷粒通过筛的格板孔或逐藁器的格板孔，单粒谷物落入选粮筒的网孔，在固定的间歇时间内农业机械具有不同的动力特性及其它指标的变化，某种机械或一批机械在使用一定期限后的报废数等。

现在来说明统计稳定性的概念，在概率论随机试验中必须研究这种概念。假设A是某个随机试验中的一个可能性事件，若这样的试验重复n次，该事件A出现m次时，则称

$$f_A=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

为事件A出现的相对频率。如果对n次相同的试验进行若干次重复试验，一般说来，随机变量f_A并非是恒定的。而且在数值n不同的条件下f_A的数值也是有差异的。随机数据稳定性的特性是：当n增加时，相对频率f_A便开始在某固定常数的附近微弱的波动。

在一个或多个随机试验的过程中，通过多次观察可以发现，某些事件经常出现，而另外一些事件则很少出现。这意味着，一种事件出现的可能性大，而另一种事件出现的可能性小。例如，多次由下向上抛掷两个骰子，统计出现相同点数的总和就可以发现，某些点数如6、7、8经常出现，而其它

的点数，如2、3、11、12则很少出现。

某个随机事件A发生的可能性的客观度量是它的概率$P(A)$。某个事件发生的概率是一个客观的数值，它不依赖于试验而存在。概率取决于可能出现某事件的整个条件总体。这里所说的定义没有从数学上解释概率的概念，因为它没有定量地确定概率。用纯粹的数学方法描述这种概念仍然是不可能的[1,85]，尽管不同的学者已对此作了大量的研究工作[23]。作为理论和实践的重要意义在于用进一步的简化方法确定这种基本概念。

1.2 古典的、几何的和统计的概率定义

根据概率的古典定义引入一个关于等可能事件的基本概念，等可能事件不必定义[1]。如果在某个随机试验中具有等可能事件，那么在多次重复的条件下进行试验时，这些事件出现的次数则相等。抛掷骰子或者硬币的游戏就是等可能事件的典型例子。

如果某些随机试验的可能事件不可能分解为更加简单的事件，则把它们称为这些随机试验的基本事件。概率的古典定义考虑的是等可能的且在任何试验中仅出现其中之一的所有基本事件。

若使我们感兴趣的随机试验具有n个等可能的基本事件，且在此条件下事件A出现m次。则由此可以说明，来自全部n个等可能的基本事件中有m次对事件A的出现“有利”。这时概率$P(A)$将等于事件所包含的基本事件数（即有利于事件A的数目）与可能的基本事件的总数之比，即

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2}$$

这就是所谓概率的古典定义。

例 1.1 在一组10个零件中，有 3 个是次品。从中随机地[1]抽取 4 个零件，其中的 2 个是次品，试确定其概率。

解 从10个零件中抽取 4 个，可能抽取的总次数等于组合数 C_{10}^4，即从10个元素中取 4 个组合。那么可能的基本事件的总数为

$$n=C_{10}^4=\frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}=210$$

抽取的 4 个零件中有 2 个是次品，则确定有利于事件 A 的基本事件数的方法是：从 3 个次品零件中每次抽取 2 个，计有 $C_3^2=3$种不同的方式。4 个零件中剩下的 2 个零件必定是合格品，它们必须从 $10-3=7$ 个合格零件中取来，计有 $C_7^2=21$ 种不同的取法。这21种取法可以以任意的三种方式组合，且从 3 个次品零件中取 2 个，因此有利于事件A 的基本事件数为

$$m=3\times21=63$$

此时可求得概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{63}{210}=0.3$$

根据概率的古典定义，确定一切可能的基本事件数和对事件A 有利的基本事件数是关键。为了使基本事件成为等可能事件，这是绝对必要的。

如果事件 I 与 n 个基本事件中的任何一个同时出现，则所有的这些事件对事件 I 是有利的，即 $m=n$，按式(1.2)有

---

[1] 随机地抽取意味着对于所研究的每一个元素在抽取时都具有同样的可能性。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$P(I)=\frac{n}{n}=1 \tag{1.3}$$

这种事件称为必然事件。在进行有关的试验时，这种事件必然发生。

如果事件Φ不可能出现，且也不属于n个基本事件中的一个事件，则$m=0$，按式(1.2)有

$$P(\Phi)=\frac{0}{n}=0 \tag{1.4}$$

这种事件称为不可能事件。在进行有关的试验时，这种事件在任何时候都不会发生。

如果n个基本事件中只有一部分对事件A“有利”，则$0<m<n$，因此有

$$0<\frac{m}{n}=P(A)<1 \tag{1.5}$$

对于随机事件A，在进行试验时可能出现也可能不出现，从式(1.5)可知，随机事件A的概率是小于1的正数。

至此，我们讨论了等可能的基本事件n，也是随机事件，它们具有相同的概率$P(E)=1/n$。

等式(1.3)、(1.4)以及不等式(1.5)描述了概率的基本性质。

概率的古典定义不包括实际发生的一切随机事件。例如，可能的基本事件数和有利事件数为无限的或有限的，而基本事件不是等可能事件。

概率的几何定义假设随机试验的基本事件数是无限的，这种假设的目的是使这种事件成为等可能事件，且在这里起主要作用。

假定在任意平面上给定面积为F_G的区域G，和属于区

域G的面积为F_g的第二个区域g（图1.1a）。在区域G内随机地投点，确定投点落入区域g的概率。随机投点意味着，点可能落入区域G内任一处，同时落入区域G内某一部分的概率正比于该部分面积的大小，且不取决于其位置和形式。落入区域g的点数的概率为[28]

$$P(A)=\frac{F_g}{F_G} \tag{1.6}$$

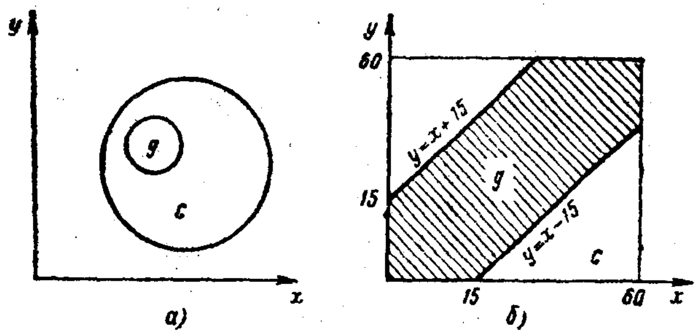

图1.1　概率的几何定义

例1.2　A和B二人约定在12点至13点之间在某地会面。他们之中的任何一个人独自在指定的时间间隔内到达而与另一人无关，先到达者候15分钟后离开，试确定他们相遇的概率。

解　题意表明，12点后，经过x和y时刻两人相遇。按照例题所给条件为$0\leqslant x\leqslant 60\text{min}$和$0\leqslant y\leqslant 60\text{ min}$，即在$G$范围内，确定二人相遇的所有可能的情况乃是以60min为边的正方形（图1.1б）。

首先到达的不仅可能是A，而且也可能是B。按题意，二人相遇的必要且充分的条件是$|x-y|\leqslant 15$，该式与下列两

个条件的意义是相同的：

$$y \leqslant x+15;\ y \geqslant x-15$$

由上述两个不等式确定了区域G内画有细实线的区域g（图1.1б）。

因此A、B二人相遇的概率为

$$P(A)=\frac{F_g}{F_G}=\frac{F_G-45^2}{F_G}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}=0.437$$

概率的几何定义不仅仅可用于平面问题。从数量的测度上，区域G和g也可用于多于二维的直线或者空间部分。

概率的统计定义较之前面所述的两种概率根据所含事件数量的定义更为广泛。其定义的唯一要求是有关随机试验的可能重复次数为无限多。在遵从这一要求的条件下，概率的统计定义为：当试验次数n趋于无穷大的情况下，随机事件A的概率等于对事件A的相对频率f_A取极限，即

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} f_A=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} \tag{1.7}$$

该极限的存在由f_A的“稳定”性质所决定。式(1.7)的数学基础是Я. 伯努利（Я. Бернулли）定理，群论中一般称为大数定理[18,23,70]。该定理可表述为：如果试验次数n趋于无穷大，且独立试验中的概率$P(A)$保持稳定，则相对频率f_A和概率$P(A)$之差的绝对值小于任意的正数ε的概率收敛于1。该定理还可以这样来描述：当试验次数为无穷大时，事件A的相对频率趋近于事件的概率$P(A)$。如果对比Я. 伯努利定理的两种表达式，便可知道“依概率收敛”所表示的含义。它在今后将得到更多的应用。

综上所述不难看出，概率的统计定义是没有缺陷的。但是我们不能求得式（1.7）右边的极限，这是因为表示试验次

数 n 的函数中未能反映出相对频率 f_A。唯一可得到的近似等式为

$$P(A)\approx f_A \tag{1.8}$$

经试验确定 f_A 之后，概率 $P(A)$ 可以通过已知的 f_A 的大小或者其它相类似的量而得到。

当试验次数足够多时，由于 f_A 和 $P(A)$ 的数值非常接近，便可取相对频率作为统计概率。

在其它定义不适用的场合下，概率的统计定义提供了关于某个事件发生的可能性的大小及其机会。

例 1.3 当播种某种作物时，要求谷粒的播种深度不大于 3cm，如果预定进行 200 次测量，仅有10粒谷物出现播种深度大于 3cm 的情况，试确定其概率。

解 根据概率的统计定义可得

$$P(A)=P(a\leqslant 3)\approx\frac{190}{200}=0.95$$

如果从一大批产品中或者直接从某个生产线上抽取不合格的产品，同样可以确定次品数及次品概率的近似值。该概率乘以100，即得到该产品的次品百分数。如果必然事件在相应试验条件下总会发生，不可能事件在任何时候都不出现，一个偶然事件或许出现或许不出现，即 $0\leqslant m\leqslant n$，则可记作

$$0\leqslant f_A\leqslant 1$$

由此可以看出，概率的统计定义与概率的古典定义是不矛盾的。但必须指出这种统计概率的特性：如果某事件的概率很小，按照古典定义(如果可能)，则得到的数值大于零。但是，如果通过相对频率来确定这种概率，则完全可能得到等于零的概率。这种情况可以这样地来理解：由于试验次数

不够充分且概率小，即使进行了 n 次试验，某种事件也可能不出现。类似地，对于大概率事件，可以得到 $m=n$ 或 $f_A=1$，该事件在有限的实验次数下表现为必然事件。这可以从等式(1.8)的近似特点得出。

最后，我们在考查概率的不同定义之前，再次注意概率 $P(A)=0.20$ 的意思是，当多次进行重复随机试验时，事件 A 是其中的一个结果，从每 100 次的结果中，事件 A 的出现平均可望有20次。一次重复试验，不能说明出现什么样的结果。

目前基本上把集合论作为阐述概率论的基础，因此需要介绍集合论的基本概念。

1.3 集合论初步

具有一种或多种共同性质（特征）的对象（元素）的有限或无限总体称为集合。例如，所有的正整数组成集合，该集合中元素的共同性质是均为正整数。所有的拖拉机，在结构上各自有其特点，但同样组成集合，其元素的共同性质是都具有发动机，行走机构，悬挂系统，且按照同样的原理完成同样的工作。

从集合的概念可以导出子集的概念，如果集合 B 的任意元素也是集合 A 的元素，则把集合 B 称为集合 A 的子集。记作

$$B\subset A \quad 或 \quad A\supset B$$

给定的集合按照任何特征可以化成两个或者更多的子集。例如，各种各样拖拉机的集合，按照行走部分的型式，可以分为轮式拖拉机和履带拖拉机两个子集。

不包含任何元素的集合称为空集，用 Φ 表示。在理论

上引用这种集合非常方便，因为它是任何集合的子集。

包含所有被研究元素的集合本身叫作基本的原集[83]，用 I 表示。

对集合可以进行三种基本运算：并（和）集、交（积）集和余集。

两个集合 A 和 B 的并集称为集合 C_1，该集合由集合 A 或集合 B 中的元素，或者由两种集合的元素组成。另一种说法是，集合 C_1 包括了集合 A 和集合 B 的全部元素，两种集合中所包含的任何元素，都在并集 C_1 之中，且只参与一次。

集合 A 和 B 的并集 C_1 表示为

$$C_1=A+B \quad 或 \quad C_1=A\cup B \tag{1.9}$$

其中的符号 $+$ 和 $\cup$ 应读作“或”。

例 1.4 掷骰子游戏，集合 A 仅包含出现的偶数点，即 $A=\{2,4,6\}$，而集合 B 仅含有大于 3 的点数，也就是说 $B=\{4,5,6\}$。确定集合 A 与 B 之并集 C_1

解 根据式(1.9)，可得集合 A 与 B 之并集为

$$C_1=A\cup B=\{2,4,6\}\cup\{4,5,6\}=\{2,4,5,6\}$$

以同样的方法可确定两个以上集合的并集。

两个集合 A 和 B 之交集称为集合 C_2，C_2 的元素是集合 A 和 B 的共同部分。可表示为

$$C_2=AB \quad 或 \quad C_2=A\cap B \tag{1.10}$$

应读作 C_2 等于 A 和 B。

对于例 1.4 中的集合，一般只能得到元素 4 和 6，即

$$C_2=A\cap B=\{2,4,6\}\cap\{4,5,6\}=\{4,6\}$$

如果集合 A 和 B 无共同元素，则其交集是一个空集，这样的集合称为互斥。

同样可确定两个以上集合的交集。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com