高等师范专科学校教育学院协编教材

概率论与数理统计

主　编　张文忠

副主编　秦志仁

编　委　陈仁远　李家荣　巫承彩
　　　　但冰如　颜敬先　简大权

西南师范大学出版社

1990年

高等师范专科学校教育学院协编教材

概率论与数理统计

主编　张文忠

西南师范大学出版社出版

（重庆　北碚）

新华书店重庆发行所经销

达县新华印刷厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:13.625 插页:1 字数:295千

1990年5月第一版　　1990年7月第一次印刷

印数:1-5,000

*

IBSN 7-5621-0274-0/O·23

定价:2.70元

前　言

这是受国家教委委托，西南师范大学出版社组织编写的一本师专、教院《概率论与数理统计》教材，其内容以国家教委1988年组织新编的二年制师专《概率论与数理统计》教学大纲为准，并兼顾到三年制师专和教院的需要。书中的基本内容（除注有星号•的几小节外）可按新编的二年制师专教学大纲规定的60学时讲完，包括注有星号•的全书内容可按三年制师专、教院教学大纲规定的68学时讲完。

出版一本适合师专、教院需要的《概率论与数理统计》教材是广大师生多年来的心愿，现在高兴地见到这一愿望得以实现。这本教材的编写坚持从师专、教院的培养目标和教学要求出发，注意了“加强基础，精选内容，联系实际，易于阅读”的原则。它与理科院校该课教材的差异主要体现在适当降低理论起点和习题难度，削减超出师专教学大纲的内容。但并没有削减必要的理论阐述、证明和计算的步骤，对于基础部分和与中学数学结合较紧的内容还适当详讲并增加了一些典型的例子。在讲述概念和结论时，尽量从实际例子引入，以使读者明了其概念或结论的直观背景，加深对内容的理解。习题的安排注意了与教材内容相呼应，使难度和数量适当，并安排了部分标准化题型。编者尽力使它成为具有师专、教院特色的教材，本书也适于中学教师和自学者参考。

这本教材是西南三省师专、教院友好合作的结晶，有不少在师专、教院多年讲授《概率论与数理统计》课的老师仔细审阅过本书编写中的一、二、三稿，并提出十分有益的建议，我们特别要感谢的是周仁庚、窦鼎孝、谭东北、陈德勤、胡太培、张乃光、潘杰、张驰、全宏发、廖学文、张浩光、李荣杰、党华周、罗国俊等同志所作的审稿工作。

这本教材的编写一直得到了国家教委和云、贵、川三省教委的热忱关心，得到了西南师范大学出版社的认真指导，得到了西南三省师专、教院的领导和老师的积极支持，在此深表谢意！限于我们的水平，编写中若有错谬之处，敬望读者惠于指正。我们热忱地期望这本教材能在大家的关心下修改得更好，使它更加适合师专、教院这门课程的教学需要。

编　者

1988年12月

目　　录

第一章　事件与概率

§1·1　随机事件

一、随机事件与样本空间

在自然界和人类社会中，我们所遇到的各种现象一般说来可以分为两类：一类是必然现象，另一类是随机现象。概率论就是研究随机现象数量规律的数学分支。

必然现象与随机现象　我们把在一定条件下，必然出现某一种结果的现象称为**必然现象**。例如：

"在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾"；

"三角形中，任意两边之和一定大于第三边"；

"掷出的石头一定会下落"；

"异性电荷必然会相互吸引"，

等等。必然现象是大量存在的。自然科学的很多学科揭示各种必然现象产生的条件和规律，人们可以根据所揭示的规律来预测各种必然现象。每当具备一定的条件，我们就可以预言必然现象的结果。

除了必然现象以外，在自然界和人类社会中，还存在另一类现象，它在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且不能预先断言出现哪种结果，这种现象称为**随机现象**。例如：

掷一枚硬币，可能出现正面（有国徽的一面）向上，也

可能出现反面向上，但是究竟出现哪面向上，事先却不能准确地预言；

从一批小麦种子中取3粒试种，发芽的种子可能是0粒、1粒、2粒或3粒，事先也不能准确地预言会有几粒发芽；

打靶时，弹着点离靶心的距离可以是某个范围以内的任意一个非负实数，我们也不能准确地预言这一距离的确切值。

还可以举出许许多多的例子，总之，随机现象是大量存在的．过去我们所学的数学的各种分支研究的都是必然现象的数量规律．从十七世纪开始，人们才注重对随机现象的研究．概率论就是在研究随机现象数量规律中建立和发展起来的，现在已成了数学中一个应用广泛的重要分支*．

随机试验 对于随机现象，我们感兴趣是那些在相同的条件下可以重复出现的随机现象．在研究它们时，总要进行观察、测量或试验．为了叙述方便起见，以后把这些工作统称为试验．例如：掷一枚硬币，观察哪一面向上；向一靶子射击，测量弹着点与靶心的距离；从某班任抽一名学生，记录他的年龄，等等．这些都是试验．仔细分析，这些试验具有如下的共同特点：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是事先知道的，而且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，

---

* 有关概率论的历史，请参看本书附录：概率论与数理统计发展简史．

但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言。

如掷硬币的试验是可以在相同的条件下重复进行的；我们在试验前就知道，试验的可能结果有两个，即正面向上或反面向上；每次试验必出现其中之一，但在投掷之前不可能确切预言是正面向上还是反面向上。

我们将满足上述三个条件的试验，称为**随机试验**，简称**试验**

随机事件　在研究随机现象时，我们主要关心的是随机试验的结果。随机试验的每一个可能的结果，称为**基本事件**。由两个或两个以上的基本事件所组成的结果，称为**复杂事件**。无论是基本事件还是复杂事件，它们在试验中发生与否，都带有随机性，所以都叫做**随机事件**，简称为**事件**。以后我们用大写字母A、B、C等表示事件。

例1　抽签考试时某学生从编号为1、2、3、4的4张试题中任抽一份，记录他抽得的编号。则基本事件共有如下4个

$$A_1=\{\text{抽得 1 号}\},\qquad A_2=\{\text{抽得 2 号}\}$$
$$A_3=\{\text{抽得 3 号}\},\qquad A_4=\{\text{抽得 4 号}\}$$

此时事件

$B=\{$抽得偶数号$\}$或$C=\{$抽得的号数小于4$\}$就是复杂事件。因为事件B是由A_2和A_4两个基本事件组成的，而事件C是由A_1、A_2、A_3这三个基本事件所组成。

我们把在每次随机试验中一定会出现的事件称为**必然事件**，而把在任何一次随机试验中都不会出现的事件称为**不可能事件**。以后我们用Ω表示必然事件，用$\varnothing$表示不可能事件。如在例1的试验中，事件

$$\Omega = \{\text{抽得的号数小于 5}\}$$

显然一定会发生，故为必然事件。而事件

$$\phi = \{\text{抽得 5 号}\}$$

肯定不会发生，故为不可能事件。

由于必然事件与不可能事件的发生与否已失去了随机性，因而本质上它们已不是随机事件。但为了研究的方便，我们还是把必然事件与不可能事件当作两种极端情况的随机事件。

值得注意的是，“基本事件”的“基本”二字是相对试验的目的和要求而言的，而不是绝对的。例如，考虑随机试验：甲、乙两人对同一目标各射击一次。如果需要考查两人的射击情况，则试验有如下 4 个基本事件

$A_1 = \{$甲、乙都未中$\}$， $A_2 = \{$甲、乙都射中$\}$

$A_3 = \{$甲中，乙未中$\}$， $A_4 = \{$甲未中，乙中$\}$

如果只需要记录目标被命中的次数，则试验的基本事件为如下 3 个

$B_1 = \{$命中 0 次$\}$， $B_2 = \{$命中 1 次$\}$，

$B_3 = \{$命中 2 次$\}$

因此，为描绘一个随机试验必须说清两点：一是要指明试验的条件，二是要指出试验一切可能的基本事件。

样本空间 如果抛开基本事件的具体含义，把一个试验的全体基本事件看成一个抽象的点集，称这点集为**样本空间**或**基本事件空间**。通常用字母Ω表示样本空间。此时，Ω中的每一个点就是一个基本事件，有时也称为**样本点**。通常用ω表示这样本点。样一来，我们就有可能用点集的知识来描述随机试验。在具体问题中，写出样本空间是描述随机试验

的第一步。

例 2 掷一枚硬币，观察出现正面还是反面。令

$$\omega_1=\{出现正面\},\quad \omega_2=\{出现反面\}$$

则 $$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$$

例 3 记录某电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数。令

$$i=\{收到的呼唤次数为 i\}$$

则 $$\Omega=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots\}$$

例 4 测量某个温泉的水温。令

$$t=\{测得的水温为 t℃\}$$

则 $$\Omega=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 100\}$$

例 5 向直角坐标平面上的圆形区域$x^2+y^2\leqslant r^2$上随意投掷一质点，观察其落点的位置。令

$$(x,\ y)=\{落点的坐标为(x,\ y)\}$$

则 $$\Omega=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$$

所举的例 2 中，样本点为有限个，例 3 中样本点为可列个。通常我们称样本点个数有限或可列的样本空间为**离散的样本空间**。

不同的随机试验，其基本事件和样本空间一般是不同的。同一个随机试验，由于试验的目的与要求不同，前面已指出它的基本事件可能不同，因而相应的样本空间亦可能不同。

从集合论的角度看，一个随机事件不过是样本空间Ω的一个子集而已。如例 3 所述的试验中，若我们研究如下三个随机事件：{收到的呼换次数等于10}，{收到的呼唤次数≤20}，{收到的呼换次数≥30}，用该例的记法可分别写为

$A=\{10\}$,　$B=\{0, 1, 2, \cdots, 20\}$

$C=\{30, 30, 32, \cdots\}$

显然可见，它们都是样本空间

$$\Omega=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

的子集，其中A只含有一个样本点，是一个基本事件；B和C都含有两个以上的样本点，故为复杂事件。

在随机试验中，如果出现A所包含的某一个基本事件ω，则称为**事件A发生**，并记作$\omega\in A$。

因为样本空间Ω是所有的基本事件组成，因而在任一次试验中，必然要出现Ω中的某一个基本事件ω，即$\omega\in\Omega$。也就是在试验中，Ω必然发生，所以Ω就是一个必然事件。这正是我们把样本空间和必然事件都用同一字母Ω表示的原因。相应地，空集$\varnothing$可以看作是Ω的子集，在任意一次试验中，不可能有$\omega\in\varnothing$。也就是说$\varnothing$永远不可能发生，所以$\varnothing$是不可能事件，这里与前面表示的记号也是一致的。

二、事件的关系与运算

在同一条件下发生的各种随机事件，往往不是孤立的，而是彼此有联系，互相影响的。弄清它们之间的关系，将有助于通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律。为此，需要研究事件之间的关系和事件之间的运算。

以后如没有特别的说明，总认为样本空间Ω已经给定，并且还给定了Ω中的一些事件，如A、B、A_i（$i=1$、2、$\cdots$）等等。

为方便起见，后面讲述事件之间的关系和运算时，都以如下一个随机试验的样本空间为例：

例 6　一个盒子中有10个完全相同的球，分别标有号码

1、2、…、10，从中任取一球并记录其标号，令

$$i=\{\text{取得球的标号为}i\}$$

则 $$\Omega=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$$

1. 包含关系 若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含了事件A，记作$A\subset B$或$B\supset A$。

如在例6中，若

$$A=\{\text{球的标号为}4\}$$

$$B=\{\text{球的标号为偶数}\}$$

则A发生就会导致B发生。因为取到标号为4的球就意味着标号为偶数的球出现了，故$A\subset B$。

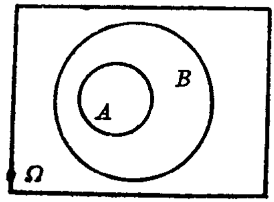

图1.1

包含关系可以用图1·1直观地说明。图中的长方形表示样本空间，A、B两个圆形区域分别表示事件A和事件B，它们是Ω的两个子集。“A发生必然导致B发生”意味着“属于A的样本点ω必然属于B”，即A是B的子集。

因为不可能事件$\varnothing$不含任何样本点ω，所以对任一事件A，我们可约定

$$\varnothing\subset A$$

又因为必然事件Ω包含了全体样本点ω，所以对任一事件A，都有

$$A\subset\Omega$$

2. 相等关系 若事件B包含事件A，事件A也包含事件B，即$A\subset B$，且$A\supset B$，则称事件A与事件B相等。记为$A=B$。

如在例6中，若