数学分析讲义

第 二 册

东北三省函授教材
协作编写组编

1 9 7 9 年12月

目　录

第六章　导数的应用

这一章要利用导数来研究函数的增减性、极值及其作图等问题。其中函数的极值，不仅用以刻划函数图象的特征，而且在工程技术和人们的生活中也有广泛的应用。

§6·1　函数的增减性

函数的增加与减少的性质统称为函数的单调性，我们在第一章已给出了这个概念的定义，并且利用初等方法判断了几个比较简单函数的这种性质。如今已经学了导数，并知导数的几何意义就是函数曲线的切线斜率。如图 6—1 所示，当沿着增函数的曲线从左向右移动时，曲线逐渐上升，它的切线斜角是锐角，从而斜率为正数；又如图 6—2 的情况，当沿着减函数的曲线从左向右移动时，曲线逐渐下降，它的切线斜角为钝角，从而斜率为负数。但在个别点处，切线可

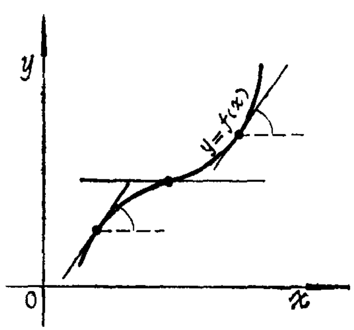

图　6—1

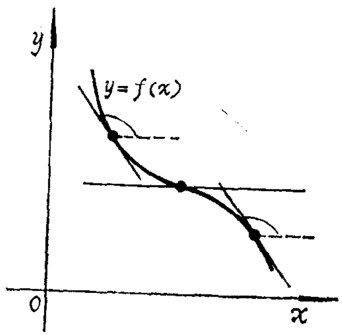

图　6—2

能是水平的，从而导数是零。由此可见，导数的符号与函数的增减变化有着密切的关系。

定理 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可导函数，如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增（递减）函数；如果在 (a,b) 内，$f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格递增（严格递减）函数。

证明 因为证法类似，我们只证递增及严格递增的情形。假设在 (a,b) 内，$f'(x)\geqslant 0$ 则由拉格朗日中值定理，对 $[a,b]$ 内任意两点 x_1 和 x_2 有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant 0,\ \text{当} x_1<x_2 \text{时}。$$

因此函数 $f(x)$ 是递增的。

如果在 (a,b) 内，$f'(x)>0$，则上式变成

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0,\ \text{当} x_1<x_2 \text{时}。$$

因此函数是严格递增的。

（注）1°如果把定理中的闭区间换成其他各种区间（包括无穷区间），定理的结论仍然成立。

2°值得注意的是，在 (a,b) 内，$f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$，只是函数严格递增（严格递减）的充分条件。因此，不能排除在区间的个别点处 $f'(x)=0$，甚至可以在无穷多个点处，有 $f'(x)=0$，只要这样的点不充满一个部分区间就可以。（参考图6—1及6—2）

例 1. 讨论函数 $f(x)=x^3$ 的增减性。

解： 这个函数的定义域是整个数轴。求出它的导数：

$$f'(x)=3x^2$$

可见，只当 $x=0$ 时，$f'(0)=0$，此外对于任何的 $x\neq 0$，都有 $f'(x)>0$。根据上述定理，便知 $f(x)$ 在整个数轴上是严格递

增的。

例 2. 讨论函数 $f(x)=\sin x-x$ 的增减性。

解 求导数得 $f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，只当 $x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，才有 $f'(x)=0$。即是说，虽然有无穷多个使导数为零的点，但这些点都是孤立的点。因此在整个数轴上函数是严格递减的。

上述二例，都是函数在整个定义域上表现为递增或者递减。但很多的函数并不是这样，它们的定义域被分成若干个区间，在某个区间上可能是递增的，而在另一区间上则又是递减的。对于这样的函数，要作进一步的考虑。我们容易得出："如果导函数 $f'(x)$ 是连续的，则使 $f'(x)$ 等于零的相邻两点之间，导数的符号一定是相同的。事实上，如果上述两点间的导数符号不相同，那么根据连续函数的性质（§3·4 定理 3 的推论），在过两点之间必有使导数为零的其他点存在，而这就与上述两点是使导数等于零的相邻两点的假定相矛盾了。既然使导数为零的相邻两点之间的导数具有相同的符号，从而在这两点间的函数性态，不是严格递增的，就是严格递减的。因此我们可以提出一个判别函数增减性的一般步骤：

i）求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$。

ii）令 $f'(x)=0$ 求根。

iii）以导函数的根将 $f(x)$ 的定义域分成小区间，然后判别每个小区间内的导数符号，从而可以确定函数的增减性。

例 3. 讨论函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的增减性。

解 i）$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

ii）令$-2xe^{-x^2}=0$，因$e^{-x^2}>0$ 所以$x=0$。

iii)① 以 $x=0$ 将函数定义域$(-\infty, +\infty)$分成两个区间：$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$。在各小区间内任取一数代入导数中，以确定导数符号。

在$(-\infty, 0)$内取$x=-1$，有 $f'(-1)=-2(-1)e^{-1}>0$，从而$f(x)$递增。在$(0, \infty)$内取$x=1$，有$f'(1)=-2\cdot 1\cdot e^{-1}<0$，从而$f(x)$递减（图6—3）。

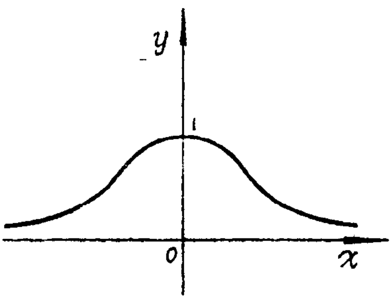

图 6—3

例 4. 讨论函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的增减性。

解 i）$f'(x)=6x^2-18x+12$

ii）令$6x^2-18x+12=0$，得二根：$x=1$，$x=2$。

iii）以 $x=1$，$x=2$ 把定义域$(-\infty, +\infty)$ 分成三个区间，在各区间内的增减情况如下表（参考图6—4）。为观察确定 $f(x)$在各区间的符号，把 $f'(x)$分解成：$f'(x)=6(x-1)(x-2)$。

① 第 iii）步的计算过程可以不写出来，而把判别的结果记入表格，见下例。此外，各小区间的导数符号，有的函数不必具体代值，通过观察即可确定。比如：由 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ 知：当$x<0$时，则$f'(x)>0$；当 $x>0$ 时，则$f'(x)<0$。

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

上述定理还可以用来证明一些常用的不等式。

例 5. 证明当 $0<x<\pi$ 时，$\sin x<x$。

证明： 令 $f(x)=x-\sin x$。当 $0<x<\pi$ 时，$f'(x)=1-\cos x>0$，故 $f(x)$ 是严格递增的。而 $f(0)=0$，所以当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)>0$，即 $\sin x<x$。

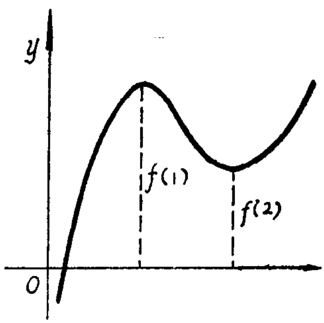

图 6—4

例 6. 证明当 $x>0$ 时，$e^x>1+x$。

证明 令 $f(x)=e^x-1-x$。当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，故 $f(x)$ 严格递增。而 $f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，即 $e^x>1+x$。

§6·2 极 值

在工农业生产和科学实验中，经常要考虑在一定条件下，怎样使材料最省、效率最高、性能最好等问题。这类问题在许多情形下，就归结为求函数的最大值和最小值。但是在讨论函数的最大值和最小值以前，我们首先需要研究函数的极值问题，因为它是讨论最大值和最小值的基础。

一、极值的概念 当我们讨论函数的增减性时，曾遇到这样的情形：函数先是递增的，到达某一点后它又变为递减的，也有与此相反的情形。还有，例如上一节的例 4，这两种情形都存在。函数的增减性发生转变的地方，就出现了这样的函数值：与附近的函数值比较起来，它是最大的或者最小的。比如图6—4中的函数值$f(1)$就大于附近的函数值，而$f(2)$便小于附近的函数值。象这样局部性的最大的或最小的函数值，统称为函数的极值，前者称为极大值，后者称为极小值。下面给出定义。

定义 如果对 x_0 点附近的任何 x，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0) \qquad (f(x)\geqslant f(x_0))$$

则说函数 $f(x)$ 在 x_0 点取得相对极大值（相对极小值），简称**极大值**（**极小值**），而称x_0为**极大值点**（**极小值点**）。

极大值和极小值统称为**极值**，极大值点和极小值点统称为**极值点**。

由定义可知，函数的极值乃是在一点附近的小范围内的最大值或最小值，它是局部性的。因此，一个定义在区间$[a, b]$上的函数，它在$[a, b]$上可以有许多个极大值和极小值，但其中的极大值不一定都大于每一个极小值。例如图6—5中的函数 $y=f(x)$，它在x_1, x_3, x_5三点取得了极大值；而在x_2, x_4两点取得了极小值，但其极大值$f(x_1)$就小于极小值$f(x_4)$。在几何上，极大值对应于函数曲线的峰，极小值对应于谷，各别的谷可以高于个别的峰。

其次由定义可知，函数的极值一定在区间的某一内点达到，而不能在区间的端点出现，因为作一个极值，就要同它左、右两侧的函数值一同来比较。

同时注意到，定义中的不等式都带等号（广义不等式），如果对于x_0点附近的任何$x \neq x_0$，等号都不成立，那么这可以说是狭义极值。图 6—5 中的极值都是狭义的，属于这种意义的极值最常见，这也就是通常所说的极值。如果不等式中的等号也有时成立，即广义极值又是什么情况呢？我们利用图象加以说明。图 6—6 中的函数$y=f(x)$，就x_0点来说，在它的右邻域内的函数值都小于$f(x_0)$，而在左邻域内的函数值都等于$f(x)$，根据极值定义，$f(x)$在x_0点便达到了极大值，这种情形即属于广义极值。

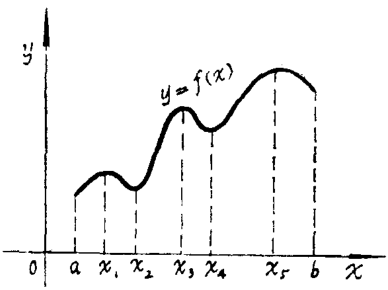

图 6—5

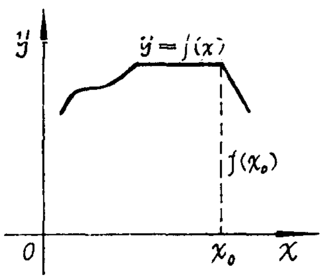

图 6—6

二、极值的判别 对于一个给定的函数，究竟它在哪一点能够取得极值，并且是取得了极大值还是极小值，这就涉及到极值的判别问题了。如果根据极值定义来判别极值的存在，那将是很困难的；不过在这个问题上，导数却可以起着重要的作用。

首先由 §5·1 中的费尔马定理立即可以得到下面的定理。

定理 1. （极值存在的必要条件）如果函数 $f(x)$ 在点

x_0可导，且在这点取得极值，则 $f'(x_0)=0$。

证明：由于$f(x_0)$ 是 $f(x)$的极值，因而对于x_0点附近的任意x，总有

$$f(x)\geqslant f(x_0) \quad 或 \quad f(x)\leqslant f(x_0)$$

根据费尔马定理便有$f'(x_0)=0$。

定理告诉我们：一个可导函数在某一点的导数为零，乃是函数在该点取得极值的必要条件。也就是说，如果可导函数在某一点的导数不为零，那么它在这一点就肯定不能取得极值。由此我们明确了一个十分重要的事实：一个可导函数的极值点必须在使它的导数为零的点当中去寻找，除此以外不会有的。那么是否使导数等于零的点都是极值点呢？这倒不一定，即是说上述定理的条件并不是充分的。事实上，也

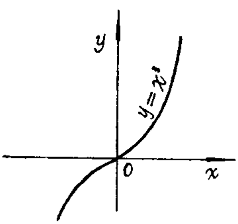

图　6—7

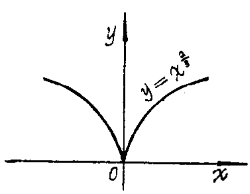

图　6—7(1)

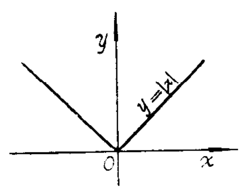

图　6—7(2)

确有这样的函数，虽然 $f'(x_0)=0$，但x_0点并不是极值点。例如函数 $f(x)=x^3$，它的导数是$f'(x)=3x^2$，于是在点 $x=0$ 的导数值为 $f'(0)=0$；但是这个函数是严格递增的，点 $x=0$并不是它的极值点（参考图6—7）。

此外，有的函数在它不存在导数的点处也可能取得极值。例如 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$及 $f(x)=|x|$，显然都在点 $x=0$取得极

小值（图6-7-（1），（2）），但这两个函数在点 $x=0$ 都不可导（前者的导数是无穷大；后者的左、右导数不相等，即不存在导数）。

但是，函数在它的不可导点，并不是都能取得极值。例如 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，在 $x=0$ 不可导（导数为无穷大），但它在这一点并没有取得极值（图6—8）。

为了叙述上的方便，我们把导数等于零的点称为函数的**稳定点**。根据以上的讨论，当我们判定一个函数的极值时，只须考察函数的稳定点以及导数不存在的点。下述定理提供了判别函数极值的方法。

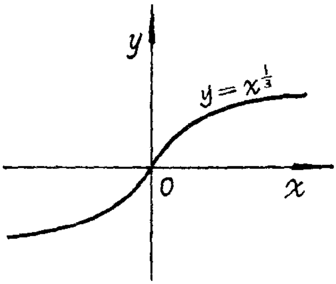

图 6—8

定理 2. （极值第一判别法）设 x_0 是函数 $f(x)$ 的稳定点或不可导点，在 x_0 点附近，如果

i）当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$ 则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值。

ii）当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极小值。

iii）如果 x_0 点的左、右邻域内的导数同号，则 $f(x)$ 在 x_0 点没取得极值。

证明：i）根据§6·1定理，便知 $f(x)$ 在 x_0 点的左邻域内严格递增，而在右邻域内严格递减，所以 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值 $f(x_0)$。

同理可证 ii）。

iii）显然$f(x)$在x_0点的整个邻域内是严格递增或严格递减的，因此$f(x)$在x_0点未取得极值。　　证毕

这个判别法也可以描述为：当x从x_0点的左侧变到右侧时，如果$f'(x)$改变符号，则函数取得极值，若由正变负则取得极大值，若由负变正则取得极小值；如果$f'(x)$不变号，则未取得极值。

上述判别法是利用导数的符号来判别函数的极值的，因为在几何上，导数是切线的斜率，如果把导数符号与切线的斜角联系起来（$f'(x)>0$时，斜角是锐角，$f'(x)<0$时，斜角是钝角），对于理解定理是很有帮助的，可以参考图6-9-（1）、（2）、（3）。

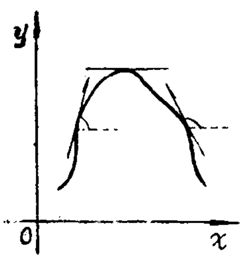

图 6-9-1

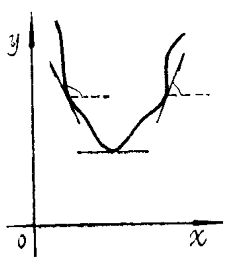

图 6-9-2

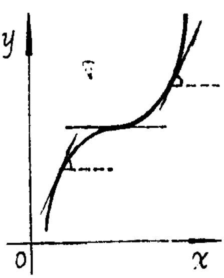

图 6-9-3

整个判别过程，按以下三个步骤进行：

i）求导数$f'(x)$。

ii）求稳定点（即求方程$f'(x)=0$的根）和不可导点。

iii）以稳定点及不可导点作为分点，把函数的定义域分成小区间，然后考察各小区间内的导数符号，从而求出极值

点及极值。

例 1. 求函数 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$ 的极值。

解： 函数的定义域是整个数轴，并且处处可导。

i） $f'(x)=2(x+2)(x-1)^3+3(x+2)^2(x-1)^2=$

$$=(x+2)(x-1)^2(5x+4)$$

ii） 令 $(x+2)(x-1)^2(5x+4)=0$

解得 $x_1=-2,\quad x_2=-\frac{4}{5},\quad x_3=1$

iii）经过计算，得出下表（参考图 6—10）。

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,-\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\left(-\frac{4}{5},1\right)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 -8.4	↗	无极值	↗

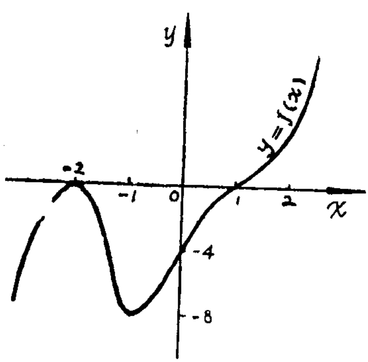

图 6—10

例 2. 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值。

解： i) $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$

ii) 令$\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0$，解得 $x=\frac{2}{5}$，又当$x=0$时，导数不存在（无穷大）。

iii) 经计算得到下表（参考图 6—11）。

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	↗

上面介绍的判别法是根据导数$f'(x)$在点 x_0 附近的符号来判别的。如果函数$f(x)$不仅在点x_0附近有一阶导数，而且在点x_0处有二阶导数的话，还有以下的判别法。

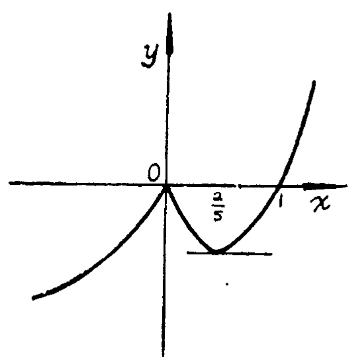

图 6—11

定理 3. （极值第二判别法）设函数$f(x)$在 x_0 点附近有一阶和二阶导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，于是

i) 若$f''(x_0)>0$，则$f(x)$在 x_0 点取得极小值；

ii) 若$f''(x_0)<0$，则$f(x)$在 x_0 点取得极大值。

证明 i) 由二阶导数定义，且因$f'(x_0)=0$，我们有

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0。$$

于是，根据极限性质（§2·4—三），当 $|\Delta x|$ 充分小时，$\dfrac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0$。由此可知，当 $\Delta x>0$时，$f'(x_0+\Delta x)>0$；当$\Delta x<0$时，$f'(x_0+\Delta x)<0$。这就是说，当 x 取值于 x_0 点的左近傍时，$f'(x)<0$；当x取值于x_0点的右近傍时，$f'(x)>0$，由上述定理 3，便知x_0是$f(x)$的极小值点。

同理可证 ii)。

（注）如果 $f'(x_0)=0$，并且 $f''(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点可能有极大值，也可能有极小值，也可能没有极值。

例 3. 求函数$f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$的极值。

解 $f'(x)=2x-\dfrac{432}{x^2}$

令 $2x-\dfrac{432}{x^2}=0$，即$x^3-216=0$，

得稳定点 $x=6$。

又 $f''(x)=2+\dfrac{864}{x^3}$，

以 $x=6$代入$f''(x)$，有$f''(6)=2+\dfrac{864}{216}>0$，故在点 $x=6$，$f(x)$有极小值：$f(6)=6^2+\dfrac{432}{6}=108$。

例 4. 求函数$f(x)=x^3(x-5)^2$ 的极值。

解 $f'(x)=3x^2(x-5)^2+2x^3(x-5)=5x^2(x-5)(x-3)$

令 $5x^2(x-5)(x-3)=0$，得稳定点：$x=0, 3, 5$

又 $f''(x)=10x(x-5)(x-3)+5x^2(x-3)+5x^2(x-5)$

$$=10x(2x^2-12x+15)$$

以稳定点代入 $f''(x)$，得

$f''(3)=-90<0$，在$x=3$ 有极大值 $f(3)=108$，

$f''(5)=250>0$，在$x=5$ 有极小值 $f(5)=0$，

$f''(0)=0$，因此判别法二无效。

对于点$x=0$，可按判别法一来确定。对

$$f'(x)=5x^2(x-5)(x-3)$$

视察可知，当 x 取绝对值很小的负数时，则$f'(x)>0$；当 x 取很小的正数时，仍然$f'(x)>0$，所以在点 $x=0$，$f(x)$无极值。

三、最大值和最小值 如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，根据连续函数性质，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值。下面就来讨论最大最小值的求法。因为最大值和最小值在求法上是一样的，我们仅就最大值进行讨论。

首先应当注意的是，所说在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值，是指的在整个区间上的所有函数值当中的最大者，从而它具有整体性，这就与极大值的概念不相同了。我们知道，极大值带有局部性，只要求它与左、右近傍的函数值相比较为最大。不难想象，函数的最大值既可能在区间 $[a,b]$ 的某一内点取得，也可能在区间的端点取得。如果最大值在区间的内点取得，那么这个最大值同时也必是一个极大值，并且它是所有极大值当中的最大者。当然，如果最大值在区间的端点取得，那么它就不可能同时也是极大值了。

根据以上的探讨，可以得出求最大值的方法：

先求出$f(x)$ 在区间$[a,b]$内的所有极大值，然后把这些