GAODENGSHUXUE

高等数学

（第三册）

欧维义 陈维钧 主编

吉林大学
出版社

高 等 数 学

（第三册）

欧维义　陈维钧　编

吉 林 大 学 出 版 社

高　等　数　学
(第三册)
欧维义　陈维钧　编

责任编辑:赵洪波　封面设计:孙　群

吉林大学出版社出版　吉林大学出版社发行
(长春市解放大路125号)　长春建筑高等专科学校印刷厂印刷

开本:850×1168毫米　1/32　1992年9月第2版
印张:11.5　1999年8月第4次印刷
字数:285千字　印数:13001－14200册

ISBN 7－5601－1972－7/O·138　定价:17.00元

第一版 序

《高等数学》一书共四册.第一册讲一元微积分和空间解析几何;第二册讲多元微积分和场的数学描写方法;第三册讲级数和常微分方程;第四册讲线性代数.

本教材在课程结构上,我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法(如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等).

在应用方面,我们注重物理、力学对数学的渗透,并尽可能地使学生获得应用方面的信息.

在培养能力方面,关键是培养学生有效地使用数学工具.为达到这个目的,重要的途径是解题.多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力.为此,在本教材各节之后,多数都配备了A、B、C三类习题.一般说,A类题是理解和消化所学内容的基本题;B类题是体现课程要求的中档题;C类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题.

总之,本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索.希望在同样的教学时间内,获得更好的教学效果.

在编写教材的过程中,得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助;得到赵为礼、王　毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助.在此,谨向他们致以谢意.

由于编者水平所限,错误和不妥之处,敬请读者指正和批评.

编　者

1986年4月于吉林大学

第二版　序

本书是欧维义、陈维钧、金德俊编写的高等数学第三册的修改本.这次修改主要是依据该书自 1987 年出版使用以来的教学实践和学生的学习实际,在对内容和习题做认真修改的同时,还对内容和习题做了较大的精简.

在酝酿和修改这本教材的过程中,多次召开了主讲过该课程的教师座谈会,赵为礼、王俊禹、王　毅、高玉环、张慎学、夏中勇、王秀岩、尹景学、马富明、李　勇、吕显瑞、李辉来等同志参加了会议.他(她)们对原教材存在的问题,教材的修改都提出了很多具体意见和建议.对修改好教材起了重要的作用.在此谨向他们的帮助致以谢意.

本书的原编者金德俊已于 1983 年调离吉林大学,没有参加这次修改.

编者

1992 年 1 月于吉林大学

目　录

第一篇　场的数学描写方法

第二篇 无穷级数

第一篇　场的数学描写方法

物理、力学中的场是物质存在的空间分布形式．场的数学描写方法，主要是引进描写场的各种分布特性的基本概念，建立场中所涉及的各种量的数量表示和计算方法，揭示场所遵循的基本规律．

本篇内容包括：数量场的梯度（第一章）；矢量场的散度（第二章）；矢量场的旋度（第三章）；▽算符和三度在球、柱坐标系下的表达式和计算式．

第一章　数量场的梯度

本章的主要内容是引入梯度概念，讨论其物理和几何性质．数量场的梯度，是由数量场生成的矢量场．梯度是用来刻划数量场的变化及其不均匀性的，梯度有明显的几何意义．

本章的重点是方向导数、梯度概念、计算方法及其物理和几何性质．

§1　场和场的图解

1.1　场的概念和场的数学表示方法

在物理学中我们已知，一种物理量随着它在空间或一部分空间的分布不同、时间不同，产生的物理现象也不相同．因此，

要了解一物理现象，必须掌握发生这个现象的有关物理量的分布情况以及它们随时间变化的规律. 例如，要了解电场的变化，必须知道电位、电场强度等物理量的分布及其随时间变化的规律. 同样，要预报一地区在某一段时间内的气候，必须掌握该处附近地区的气压、气温的分布情况以及它们随时间变化的规律. **这种物理量在空间或一部分空间上的分布就称为场.**

场的数学表示方法. 研究场和研究物理学、力学一样，是离不开数学工具的. 当我们研究场的客观规律时，我们总是要研究它的数量关系，一定的客观规律必须用一定的数量形式才能表示出来.

下面通过例子来说明，场是如何由数量函数和矢量函数来表示的.

例 1.1 生活常识告诉我们，就是在同一时刻，物体在各点的温度往往是不一样的. 例如夏季晴天中午的时候，靠近地面的空气层就比较热. 同一天中午，长春、南京、哈尔滨的气温也各不相同. 所以在同一时刻，物体在点 (x,y,z) 处的温度，是由点 (x,y,z) 的位置决定的. 通常用 D 表示我们考察气温的空间范围，用符号

$$T = T(x,y,z) \quad ((x,y,z) \in D) \tag{1.1}$$

来表示温度与位置的依赖关系. 这样一来，对于 D 中每一点 (x,y,z)，按照公式(1.1)都对应着一个温度，这些温度的全体，就给出温度在空间 D 上的分布，称它为温度场.

例 1.2 我们知道，一个面上的压强等于所受压力跟受力的面积的比. 我们还知道，在静止液体的某一深处，液体重量所引起的压强是与深度有关的，越深压强越大. 当然液体各点的压强不仅与重量有关，而且还与外力有关. 外力一定，液体中每一点 (x,y,z) 处的压强 P 就是确定的. 如果用 D 表示被我们研究的液体的空间范围，用符号

$$P = P(x,y,z) \qquad ((x,y,z) \in D) \tag{1.2}$$

表示压强与位置之间的关系．这样，对于 D 中每一点 (x,y,z)，由(1.2)式对应着一个压强，这些压强的全体，就给出压强在空间 D 上的分布，称它为压力场．

例 1.3 河里的水在每一点 (x,y,z) 处都有个速度 $v=\{v_x,v_y,v_z\}$．我们知道水在河当中的地方流得比较急，靠近岸边的地方流得比较慢．而河面窄的地方的水则往往要比河面宽的地方的水流得快些等等．所以在给定的时刻，河里每一点处水流速度的三个分量 v_x,v_y,v_z 的数值，依赖于所考虑的位置，即

$$v=\{v_x(x,y,z),v_y(x,y,z),v_z(x,y,z)\}$$

假如还考虑潮水的涨落等等，就应该考虑时间的因素，每个速度分量就要依赖于四个变量 (x,y,z,t)．这些速度 v，就给出了速度在河里的分布，把它叫做**速度场**．

1.2 场的分类和场的图形表示法

场因它的数学表现形式不一样可分为两种：**数量场**和**矢量场**．如果描写场的量是数量函数，我们就称这个场是数量场．例如温度场、压力场就是数量场．如果描写场的量是矢量函数，就称这个场是矢量场．速度场、电磁场及引力场都是矢量场．

如果场描写的物理量，仅随位置变化，则称此场为**稳定场**；如果场描写的物理量，不仅随位置变化，而且也随时间变化，则称此场为**非稳定场**，或称**变化场**．现实中的场多是非稳定场．但在某些实际问题中，如果在较短时间内，在同一位置上的物理量变化不大，为简化研究，可以把非稳定场看作稳定场．一般的电磁场是非稳定的矢量场，静电场和静磁场则都是稳定场．

场的图形表示法．除用点的函数来描写场的物理、力学性质外，为了形象地表示场的分布，常在场中按一定规则绘出曲面或曲线来表示场中物理量的分布．

对于稳定的数量场 $u=u(x,y,z)$，为了研究数量场 $u(x,y,z)$ 的分布情况，考察场中有相同值的各点，也就是适合方程

$$u = u(x,y,z) = c \tag{1.3}$$

的点(式中 c 是常数)，这些点构成一个或几个分离曲面，我们称这些面为等值面. 温度场中的等值面是等温面，大气中气压相等的点构成等压面，在电学中则有等位面等等.

每间隔一定的函数值，由方程(1.3)就可以绘出一系列的等值面. 数量场 $u(x,y,z)$ 则可看作是由一层层等值面裹起来的. 这些等值面的稀密程度，就表示数量场的分布状态. 显然等值面密集之处，数量场的空间变化快；反之，等值面稀疏之处，数量场的空间变化慢. 从理论上讲，只要按上述方式作出了数量场的一系列等值面，数量场的分布情况就一目了然.

在军用地图上，每隔一定高度，画出相应的等高线，它们的疏密程度各处是不一样的，等高线稀的地方，说明地面的坡度小. 反之，密的地方坡度就大.

把小磁针放在条形磁铁周围的某个地方，小磁针就会静止在一个固定的方向上，这个方向就是磁针北极所受的磁场力的方向. 小磁针放在不同的地方，就有各种不同的静止方向(图1.1).

图 1.1

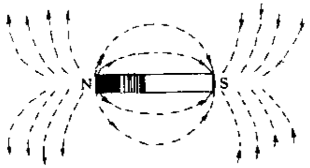

图 1.2

物理中把通过磁针在各处静止方向连成的线叫做磁力线(图 1.2). 它是可以用形象化方法显示出来的. 例如把条形磁