材料力学
解题辅导

[苏] И. Н. 米罗柳博夫 等著
刘乐耕 谢祚济 等译

中南工业大学出版社

内 容 简 介

本书旨在为学习材料力学课程的学生提供一本解题方法和技巧的教学参考书。

全书共十七章，除材料力学的传统内容外，还有平板理论，薄壁杆件，局部应力，蠕变与松弛等。各章都包括基本理论，典型例题和独立练习三大部分，书末附有习题答案。

本书具有题型新颖、内容全面、思路开阔、启发思维的特点，堪称当今必备的一本材料力学教学参考书。

本书适用作工科大学生的教学参考书，也是工程技术人员的案头参考书。

本书由刘乐耕、王梦玉、谢祚济、宋大智、江汉、黄秀娟、刘厚民、黄丽欣译，吴力力、王力民校

Пособие к решению задач по сопротивлению материалов

И. Н. МИРОЛЮБОВ, С. А. ЕНГАЛЫЧЕВ, Н. Д. СЕРГИЕВСКИЙ,

Ф. З. АЛМАМЕТОВ, Н. А. КУРИЦЫН, К. Г. СМИРНОВ-ВАСИЛЬЕВ, Л. В. ЯШИНА

Издательство《Высшая школа》, 1985

材料力学解题辅导

[苏] И·Н·米罗柳博夫 等著

刘乐耕 谢祚济 等译

责任编辑：田荣璋

插图责任编辑：刘梧英

*

中南工业大学出版社出版发行

中南工业大学出版社印刷厂印装

湖 南 省 新 华 书 店 经 销

*

开本：787×1092 1/16 印张：24.25 字数：605千字 插页：2

1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

印数：0001——1500

*

ISBN 7-81020-265-0/O·042

定价： 4.75 元

序　　言

材料力学，是一门关于结构构件和机器零件强度的学科。它是工程教育的主要基础，将训练未来的工程师计算出坚固、可靠而又经济的机器或结构物。这在当今社会对国民经济的发展。无疑是极为重要的。

学生在学习《材料力学》这门课程时，最感到困难的往往是解答习题。这本书简化了学习该课程的过程，能够帮助学生掌握解题方法，并获得必要的解题技巧。

书中包括了理论的基本原理，必要的方法提示，解典型题目的例题，不用机器的程序测验题卡，独立解算的习题，习题答案，以及参考资料。为了便于使用参考和易于消化理解，书中的每一独立部分都辟有上述之各项内容，全部习题的答案和参考资料附于书末。我们规定学生应根据所研究的那部分内容，先去熟悉相应的理论原理、方法提示和列举的例题。这样，才会使学生得以回忆、体会和掌握所需的理论基础，较好地理解该类题型的解法，并具备一定的独立解题能力。

独立解算的习题条件，均以带有所需原始量之数值的简图来表示的。因为每个简图所表示的不光是某个结构，而是几个结构，甚至是用途不同结构的类似工作，所以，给出的大多数题目中，都没有夹进限制某个简图用在任何一种单独情况上的文字条件。

属于同类型而又用处相同的每套题目，都给出了解题中应达目的的简要提示。这就迫使学生不得不独立地表述题目的条件，因此能够更好地体会被解题目和原始数据的意义所在。

这本书的第五版，虽说在篇幅上与前一版没有不同，但有重大地修订，书中删除了一些次要意义的节条，增补了一些新的、比较重要的章节。就中有：平板与考虑边缘效应时薄壁壳的计算，薄壁杆件的弯曲和扭转，局部应力的确定，结构构件在应力和应变间呈非线性关系时的计算，蠕变和松弛。

所有这些变更和增补，都符合苏联高教部审定的，供机械类专业用的《材料力学》课程教学大纲。

每个主要章节的末尾，都附有不用机器的程序测验题卡范例，限于此书的篇幅，我们不能把列宁格勒机械学院和我国许多高等工业院校的教研组，在教学过程中经多年核准的全部题卡方案，都包括在内。我们认为所给的这种题卡范例，能够使其它高等院校的教研室，在符合自己教学大纲的范围内，编制出类似的题卡。无须作特殊的变更，这些测验题卡，借助适当的控制装置，对知识测验的机器方法也能使用。在解决计算工作要求大的某些问题时，建议利用电子计算机。鉴于此目的，书中举有电子计算机在稳定计算中应用的实例，以及由电子计算机教研室主任、技术科学候补博士斯·伊·阿尔谢尼耶夫编制的 FORTROH-Ⅳ语言的计算程序。

我们对技术科学博士普·阿·帕夫洛夫教授和技术科学候补博士伊·恩·伊佐托夫副教授给予本书第五版的仔细审阅和宝贵指示，深表感谢。同时，对所有寄来自己意见的诸君，致以谢意。

我们将非常感谢帮助改进本书质量的任何批评意见。请将信寄至：101430，Москва，ГСП-4，Неглинная ул.，29/14。

题目条件的一般规定

1. 全部题目中，凡图上已指出的量，均为已知的，而未知量则用问号标出
2. 图上的几何尺寸，凡未注明单位者，皆以毫米计。
3. 图上画阴影线的构件，均指绝对刚体。
4. 对于所有的受压结构构件，如无特殊的说明，则一律视之为稳定的。
5. 国际单位制和工程单位制中的某些个物理量的关系，列于附录7。
6. 线膨胀系数α为1℃的数值。

目 录

序　言

材料力学，是一门关于结构构件和机器零件强度的学科。它是工程教育的主要基础，将训练未来的工程师计算出坚固、可靠而又经济的机器或结构物。这在当今社会对国民经济的发展。无疑是极为重要的。

学生在学习《材料力学》这门课程时，最感到困难的往往是解答习题。这本书简化了学习该课程的过程，能够帮助学生掌握解题方法，并获得必要的解题技巧。

书中包括了理论的基本原理，必要的方法提示，解典型题目的例题，不用机器的程序测验题卡，独立解算的习题，习题答案，以及参考资料。为了便于使用参考和易于消化理解，书中的每一独立部分都辟有上述之各项内容，全部习题的答案和参考资料附于书末。我们规定学生应根据所研究的那部分内容，先去熟悉相应的理论原理、方法提示和列举的例题。这样，才会使学生得以回忆、体会和掌握所需的理论基础，较好地理解该类题型的解法，并具备一定的独立解题能力。

独立解算的习题条件，均以带有所需原始量之数值的简图来表示的。因为每个简图所表示的不光是某个结构，而是几个结构，甚至是用途不同结构的类似工作，所以，给出的大多数题目中，都没有夹进限制某个简图用在任何一种单独情况上的文字条件。

属于同类型而又用处相同的每套题目，都给出了解题中应达目的的简要提示。这就迫使学生不得不独立地表述题目的条件，因此能够更好地体会被解题目和原始数据的意义所在。

这本书的第五版，虽说在篇幅上与前一版没有不同，但有重大地修订，书中剔除了一些次要意义的书条，增补了一些新的、比较重要的章节。就中有：平板与考虑边缘效应时薄壁壳的计算，薄壁杆件的弯曲和扭转，局部应力的确定，结构构件在应力和应变间呈非线性关系时的计算，蠕变和松弛。

所有这些变更和增补，都符合苏联高教部审定的，供机械类专业用的《材料力学》课程教学大纲。

每个主要章节的末尾，都附有不用机器的程序测验题卡范例，限于此书的篇幅，我们不能把列宁格勒机械学院和我国许多高等工业院校的教研组，在教学过程中经多年核准的全部题卡方案，都包括在内。我们认为所给的这种题卡范例，能够使其它高等院校的教研室，在符合自己教学大纲的范围内，编制出类似的题卡。无须作特殊的变更，这些测验题卡，借助适当的控制装置，对知识测验的机器方法也能使用。在解决计算工作要求大的某些问题时，建议利用电子计算机。鉴于此目的，书中举有电子计算机在稳定计算中应用的实例，以及由电子计算机教研室主任、技术科学候补博士斯•伊•阿尔谢尼耶夫编制的 FORTROH-Ⅳ语言的计算程序。

我们对技术科学博士普•阿•帕夫洛夫教授和技术科学候补博士伊•恩•伊佐托夫副教授给予本书第五版的仔细审阅和宝贵指示，深表感谢。同时，对所有寄来自己意见的诸君，致以谢意。

我们将非常感谢帮助改进本书质量的任何批评意见。请将信寄至：101430,Москва, ГСП-4,Неглинная ул.,29/14。

题目条件的一般规定

1. 全部题目中，凡图上已指出的量，均为已知的，而未知量则用问号标出.
2. 图上的几何尺寸，凡未注明单位者，皆以毫米计。
3. 图上画阴影线的构件，均指绝对刚体。
4. 对于所有的受压结构构件，如无特殊的说明，则一律视之为稳定的。
5. 国际单位制和工程单位制中的某些个物理量的关系，列于附录7。
6. 线膨胀系数α为1℃的数值。

第一章　拉伸和压缩

§1.1　轴力

弹性法向力在横截面上的合力，称为轴力。轴力可用截面法求得。杆件任一横截面上的轴力N，其数值必等于沿所研究截面一边作用在杆上的所有轴向外力（集中力P和按任意规律分布的集度为q_x的分布力）的代数和。轴力或为拉力，或为压力。我们规定：拉力为正，压力为负。确定杆件任一横截处轴力的一般公式，具有下述形式：

$$N=\sum P+\sum\int q_x \mathrm{d}x \tag{1.1}$$

积分是对作用有分布力的每一段长度进行的，求和是对位于所研究截面一边的全段长进行的。如果轴力N的矢量，从研究截面向外指，则杆件截开部分的平衡条件，即公式(1.1)，将给出力的大小和相应的符号。

例题1.1　给出：$P_1=P$；$P_2=3P$；$P_3=2P$，分布载荷q_x，该分布载荷从$q=0$到$q=P/a$按线性规律变化（图1.1）。

试作杆的N图。

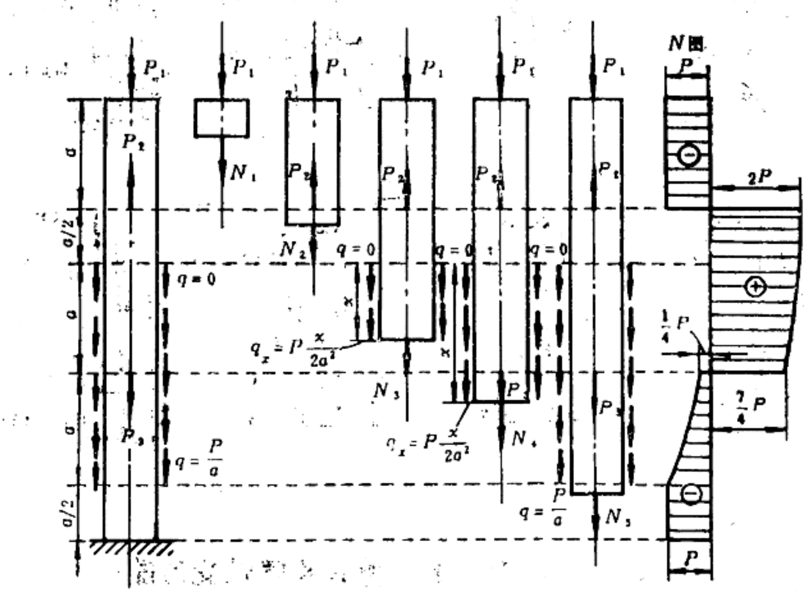


图1.1

解 对杆分段计算轴力。借公式（1.1）可得下列轴力值：

$$N_1=-P_1=-P$$

$$N_2=-P_1+P_2=-P+3P=2P$$

$$N_3=-P_1+P_2-\int_0^x P\frac{x}{2a^2}\mathrm{d}x=-P+3P-P\frac{x^2}{4a^2}=P\left(2-\frac{x^2}{4a^2}\right)$$

$$N_{3x=0}=2P \qquad N_{3x=a}=\frac{7}{4}P$$

$$N_4=-P_1+P_2-\int_0^x P\frac{x}{2a^2}\mathrm{d}x-P_3=-P\frac{x^2}{4a^2}$$

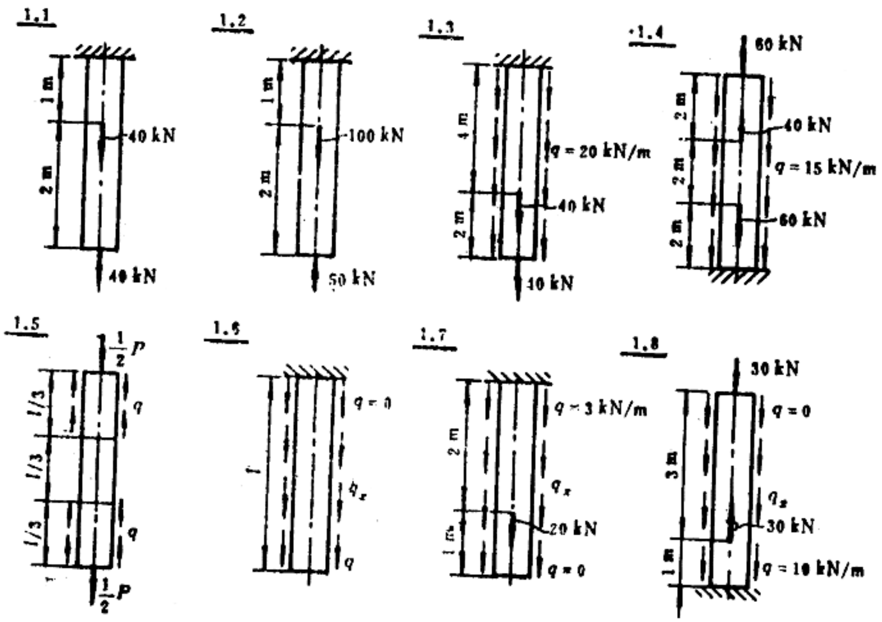
$$N_{4x=a}=-\frac{1}{4}P$$

$$N_{4x=2a}=-P$$

$$N_5=-P_1+P_2-\int_0^{2a} P\frac{x}{2a^2}\mathrm{d}x-F_3=-P$$

N图示于图1.1

习题1.1~1.8 试作轴力N图。在习题1.6，1.7，1.8中，假设分布载荷集度q按线性规律变化。



§1.2 正应力、绝对伸长和弹性变形能

假设正应力σ，在受拉或受压杆件的整个横截面上是均匀分布的。这个假设也近似地适

用于变截面杆，因此，杆件任一横截面上的正应力 σ，可用该横截面上的轴力 N 与其面积 F 之比来确定，这就是

$$\sigma = N/F \tag{1.2}$$

假设杆件材料服从虎克定律，则杆的绝对伸长可按下面的一般公式求得：

$$\Delta l = \sum \int N \,\mathrm{d}x/(EF) \tag{1.3}$$

式中 E 是杆件材料的纵向弹性模量。

积分是对杆的各段长度进行的，求和是对杆的全长进行的。如果在杆的长度 l 内，N 和 F 均保持不变，则

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

确定杆件受拉（压）时所贮存的弹性变形能 U 的数值，其一般公式具有如下形式：

$$U = \sum \int \frac{N^2 \mathrm{d}x}{2EF} \tag{1.4}$$

式中的积分和求和，须按确定杆件伸长时那样进行。

因为在材料的弹性极限范围内，可以认为变形能的数值等于外力所作的功，所以对于端部受有拉力或压力 P 作用的杆，其弹性变形能为

$$U = \frac{1}{2} P \Delta l \tag{1.5}$$

例题1.2 给出：$P = 10$ kN；$l = 0.3$ m；$d = 0.01$ m；$d_x = (0.01 + x^2)$ m；$E = 2 \times 10^5$ MPa（图1.2）。

试作 σ 图，求 Δl 和 U。

解 杆件任一横截面上的轴力 $N = P = 10$ kN。横截面面积各为：

在圆柱部分

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0.25\pi \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

在过渡部分

$$F(x) = \frac{\pi d_x^2}{4} = \frac{\pi}{4}(0.01 + x^2)^2\ \mathrm{m}^2$$

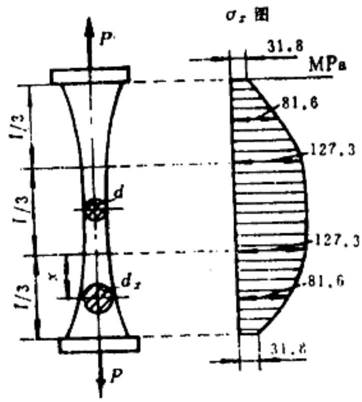


图1.2

正应力各为：

在圆柱部分

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{10^4}{0.25\pi \times 10^{-4}} \text{或}\ \sigma = 1.273 \times 10^8\ \mathrm{Pa} = 127.3\ \mathrm{MPa}$$

在过渡部分

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{4P}{\pi(0.01 + x^2)^2}$$

$$=\frac{4\times10^4}{\pi(0.01+x^2)^2}\text{Pa}$$

$$=\frac{127.3}{(1+100x^2)^2}\text{MPa}$$

$$\sigma_{x=0}=127.3\text{ MPa}$$

$$\sigma_{x=l/6}=\frac{127.3}{(1+100\cdot0.5^2)^2}\approx81.6\text{ MPa}$$

$$\sigma_{x=l/3}=31.8\text{ MPa}$$

σ图绘于图1.2。

杆的绝对伸长，按式（1.3）为

$$\Delta l=\sum\int\frac{N\,dx}{EF}$$

$$=\frac{pl}{3EF}+\frac{2p\times4}{\pi E}\int_0^{l/3}\frac{dx}{(0.01+x^2)^2}$$

$$=\frac{pl}{3EF}+\frac{8p}{\pi E}\left|\frac{x}{2(0.01+x^2)}\times\frac{1}{0.1^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\times0.1^3}\arctan\frac{x}{0.1}\right|_0^{0.1}=\frac{10\times10^3\times0.3}{3\times2\times10^{11}\times0.25\pi\times10^{-4}}$$

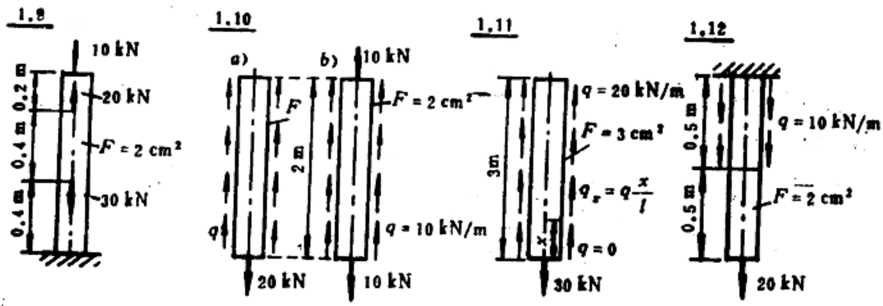
$$+\frac{8\times10^4}{\pi\times2\times10^{11}}\left(\frac{0.1}{2(0.01+0.1^2)\times0.1^2}+\frac{1}{2\times0.1^3}\arctan1\right)$$

$$\Delta l\cong1.46\times10^{-4}\text{ m}=0.0146\text{ cm}$$

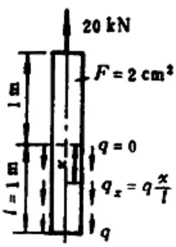
杆内所贮存的弹性变形位能的数值，按式（1.5）为

$$U=\frac{P\Delta l}{2}=\frac{10^4\times1.46\times10^{-4}}{2}=0.73\text{ J}$$

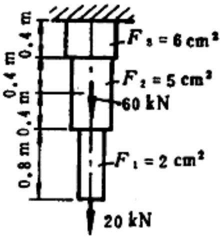
习题1.9—1.16 绘正应力σ图，杆的绝对伸长Δl和杆内所储存的弹性变形位能U。假设$E=2\times10^5$ MPa。



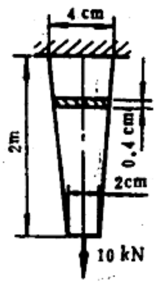
1.13



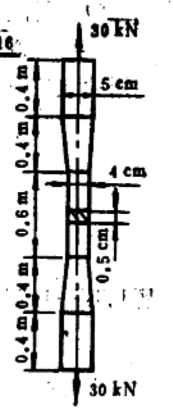
1.14



1.15



1.16



§ 1.3 横向变形和体积改变量

根据虎克定律，受轴向拉伸或压缩的杆件的纵向应变和横向应变分别为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{1.6}$$

及

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E} \tag{1.7}$$

式中μ是材料的泊松比或横向变形系数。

杆件横截面积的相对改变量，可按下式求出：

$$\frac{\Delta F}{F} \cong -2\mu\varepsilon = -2\mu\frac{\sigma}{E} \tag{1.8}$$

确定杆件体积绝对改变量的表达式为

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E}\sum\int N\,\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

积分是对杆的每一段进行的，求和是对杆的全长进行的。

如果杆受施于端部的力P作用而拉伸或压缩，则

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E}Pl \tag{1.10}$$

例题1.3 给出：$P, q, l, F(x), E, \mu$（图1.3）。求 $\varepsilon_x, \Delta F(x)/F(x), \Delta V$。

解 根据式（1.1）和式（1.2），杆件任一横截面上的轴力和正应力分别为

$$N(x) = P + qx$$

$$\sigma(x) = N(x)/F(x) = (P+qx)/F(x)$$

因为根据虎克定律，相对伸长为

$$\varepsilon_x = \sigma(x)/E = (P+qx)/[EF(x)]$$

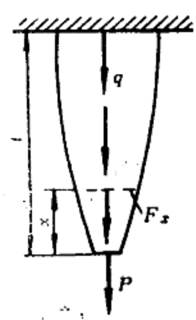


图1.3

故按式（1.8）得杆横截面积的相对改变量为

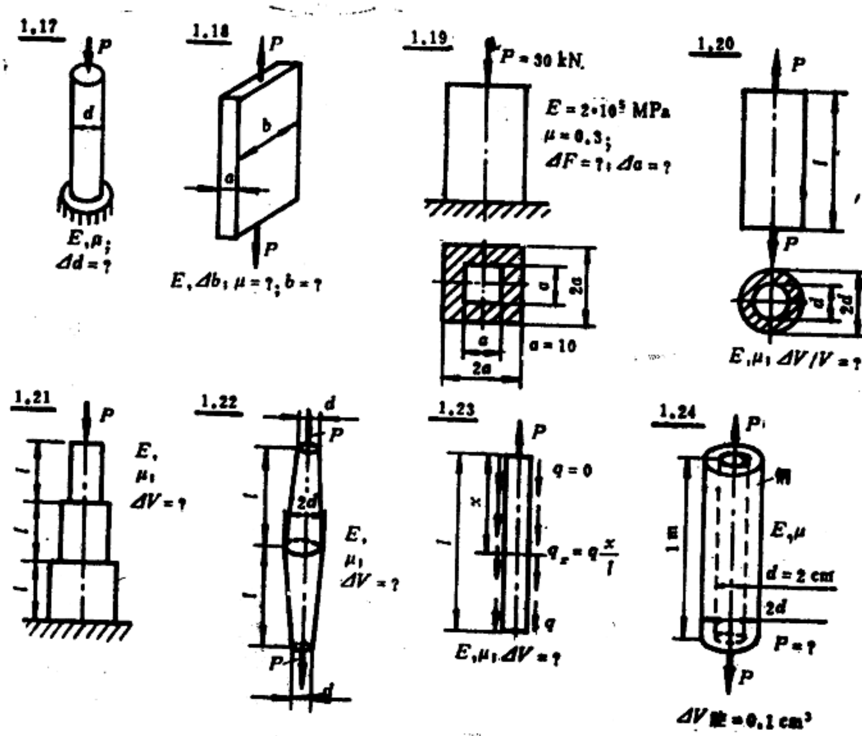
$$\Delta F(x)/F(x)=-2\mu[(P+qx)/EF(x)]$$

如利用式（1.9），便得出杆体积的绝对改变量：

$$\Delta V=\frac{1-2\mu}{E}\int_0^l N(x)\mathrm{d}x=\frac{1-2\mu}{E}\int_0^l (P+qx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1-2\mu}{E}\left(P+\frac{ql}{2}\right)l$$

习题1.17—1.24 试在图示条件下求出指定的量。



§ 1.4 静定铰接杆系的弹性位移

确定铰接杆系某点的弹性位移，其解的一般步骤如次：由静力学条件，求出系统的全部弹性构件的轴力。根据虎克定律确定构件的绝对伸长量。假设系统的构件在变形时不分离，利用交会法列出位移的相容性条件，即建立系统构件间的几何关系，从所得的诸关系式求出未知位移的数值。

在利用交会法时，须考虑到系统的每个构件，除有轴向变形外，还会有绕相应铰的转动。因此，构件的每一点，既有沿构件的轴向位移，也会有沿相应半经的圆弧作移动。这些

圆弧（交点）允许用垂直于旋转半径的直线来代替，因为构件的弹性伸缩较之本身的长度为小。

例题1.4 给出：P，a，E_1，F_1，E_2，F_2（图1.4a）。求力P作用点位移δ的水平投影δ_x和竖直投影δ_y。

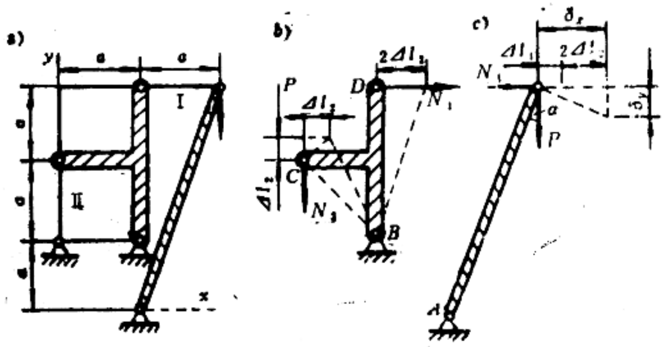


图1.4

解 用假想截面把杆Ⅰ和杆Ⅱ截开而成两个系统（图1.4b）。

根据静力学条件$\sum M_A=0$和$\sum M_B=0$，得拉杆力为

$$N_1=\frac{P}{3}\text{和}N_2=\frac{2}{3}P$$

根据虎克定律，则有

$$\Delta l_1=\frac{Pa_2}{3E_1F_1}\text{ 和 }\Delta l_2=\frac{2Pa}{3E_2F_2}$$

利用交会法（图1.4b），得C点的水平位移为Δl_2，C点垂直于BC线的位移为$\delta_C=\Delta l_2\sqrt{2}$。

D点只能沿着水平移动，其值为

$$\delta_D=\delta_C\frac{2a}{a\sqrt{2}}=2\Delta l_2$$

力P作用点的水平位移，是由D点的水平位移和拉杆Ⅰ的伸长组成的，这就是

$$\delta_x=2\Delta l_2+\Delta l_1=\frac{4}{3}\frac{Pa}{E_2F_2}+\frac{1}{3}\frac{Pa}{E_1F_1}$$

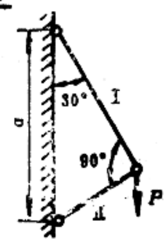
$$=\frac{Pa}{3}\left(\frac{4}{E_2F_2}+\frac{1}{E_1F_1}\right)$$

力P作用点的竖直位移（图1.4c）为

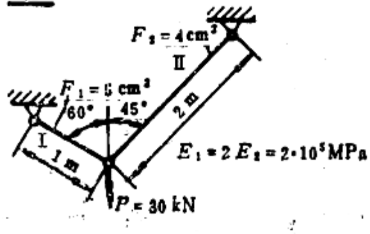
$$\delta_y=\delta_x\,\mathrm{tg}\,\alpha=\delta_x\frac{a}{3a}=\frac{Pa}{9}\left(\frac{4}{E_2F_2}+\frac{1}{E_1F_1}\right)$$

习题1.25—1.40 试确定外力P作用点（或条件上指出的其它点）的位移δ和弹性杆横截面上的正应力。

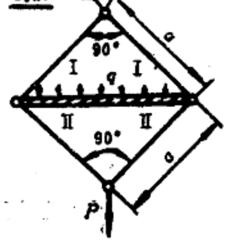
1.25



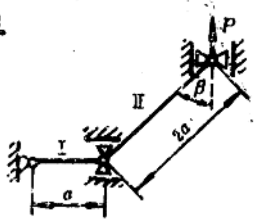
1.26



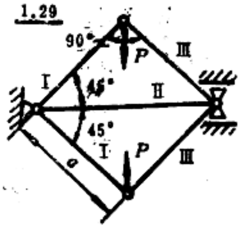
1.27



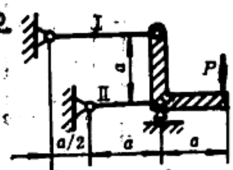
1.22



1.29

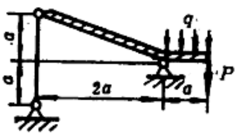


1.30

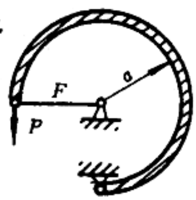


$F_1 = \frac{3}{2}F_2$

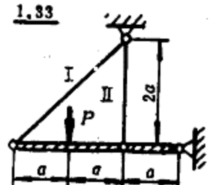
1.31



1.32

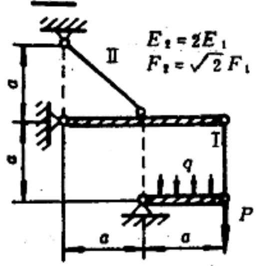


1.33

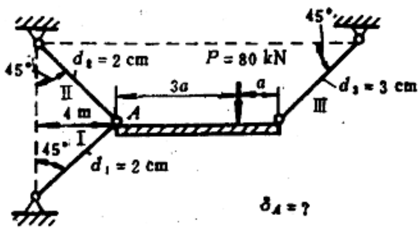


$E_1 = 2E_2$; $F_1 = \sqrt{2}F_2$

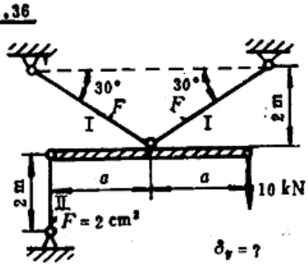
1.34



1.35



1.36



1.37