目　　录

第一章　随机振动的特征量

随机振动是以概率论及数理统计为基础的，本书将直接从工程问题出发，定义描述随机振动的主要参量及数字特征。为了在应用上概念清晰，必要时，给出较详细的数学推导。从数学角度考虑，本章各节中所引入的基本参量都是同等重要的，但针对工程问题，将着重对几个量详细加以讨论。随着计算机的推广应用，一些量的重要与否，还将有所变化。例如，过去研究随机振动多用模拟量仪器，因此，功率谱密度这个量占据了首要地位，而与功率谱密度等价的量——相关函数，却较少为人们使用。由于计算技术的发展和计算机的应用，相关函数便于计算，且有更明确的物理意义，所以它就显得更加重要。在后面一些章节中，我们将会看到，利用随机振动的特征量、借助于计算机，可以解决较复杂的结构振动问题。

1.1　随机振动信号时间历程

1.1.1　随机变量

先观察一个具体的随机振动实例，图1－1中$x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$，…是多次记录的振动时间历程，$x(t)$可以代表位移，也可以代表速度、加速度、应力等参数，t是时间参数。每次的记录长度总是有限的，要用象图1－1的记录曲线完整地表示一个随机振动，就必须有无限多次的记录曲线，这点毋需过多解释。如果有限次的有限长度的记录能完整地代表一个振动，那么这个振动就是确定性的（非随机的）振动。

每个有限时间长度的记录 $x_k(t)$（$0<t\leqslant T$）称为样本函数，表示随机振动的无限多个样本函数的集合称为样本函数空间，T称为采样长度。

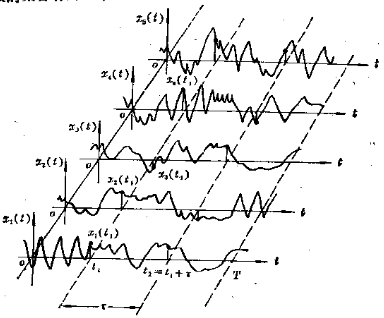


图1－1　样本函数空间

为了说明在样本函数空间中随机振动的情况，现把$t=t_1$时刻各样本函数上振动的瞬时值采集下来，组成一个序列

$$x_1(t_1),\ x_2(t_1),\ \cdots,\ x_n(t_1),\ \cdots$$

其中各个值称为样本值。这些样本值组成的序列是随机变化的，它是该随机振动在$t=t_1$这一瞬时振动可能取得的幅值集合，记为$X(\omega,\ t_1)=\{x_k(t_1)\}$，称$X(\omega,\ t_1)$为随机变量。每个样本值$x(\omega_k,\ t_1)$称为该随机变量的一个样本点。所有样本点的集合，称为样本空间，记为$\Omega=\{\omega_k\}$。这就是说，随机变量$X(\omega,\ t_1)$随着样本点的不同而随机地取不同的值。因此，$X(\omega,\ t_1)$是样本点的函数$(\omega\in\Omega,\ t_1\in T)$。为了书写方便，以后我们用$X(t_1)$表示一个随机变量，不再注明符号$\omega$。

在特定时刻采集振动的瞬时值组成一个随机变量，这是今后讨论随机振动的主要方法。当然，为了不同的目的，组成样本空间的办法还可以有所不同。例如图1－2，可以把每个样本函数第一次达到给定值的时刻取作一个样本点，所有这些样本点组成一个随机变量$\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,\ \cdots\}$，用$T(\omega)$表示。又如，单位时间内正的瞬时值等于给定值的次数$N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_n,\ \cdots$，这些次数可以组成一随机变量，用$N(\omega)$表示；单位时间内峰值数$x_{P_1},\ x_{P_2},\ \cdots,\ x_{P_N},\ \cdots$可以组成一个随机变量$X_P(\omega)$；等等。

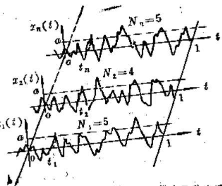


图1－2　样本函数空间

值得说明的是，由振动的瞬时值组成的随机变量X是最基本的，而$T(\omega)$、$N(\omega)$等可以用X表示，这一点在后面将有进一步的叙述。

以上所说的取自随机振动时间历程而组成的随机变量，当取的样本点足够多（严格地讲是无限多）时，$X(t_1)$连续取值，称为连续性随机变量。还有其它情况，例如，若分析的时间历程是加速度，在某一样本点上有一冲击信号，$X(t_1)$就不再是连续变量。另外，为了使用计算机进行分析，只能研究$X(t_1)$的离散值，这可以看成离散型随机变量。

1.1.2 随机过程

在一个随机振动的样本函数空间中，在$t=t_1,\ t=t_2,\ \cdots,\ t=t_n,\ \cdots$各个时刻采集样本，可以得到相应的随机变量，只有无限多个随机变量才能完整地描述一个随机振动。如果我们把时间t看作一个参数，它在$[0,\ T]$上连续变化，考察在各个时刻上采集的随机变量，就得到以时间t为参数的一族随机变量，我们称这一族随机变量为随机过程。换句话说，随机过程是所有样本函数的集合。因此，可以说一个随机振动即是一个随机过程。

应当指出，随机振动不都是以时间t为参数的随机过程。例如，当我们研究整个汽车或船体的振动时，既要讨论每一时刻的运动情况，又要讨论各个点的运动情况及其相互关系，因此，这种随机振动是以时间t和空间坐标s为参数的随机过程。又如路面的不平度，它可以用高度$h(s)$表示，s是沿道路的空间坐标，不平度是以s为参数的随机过程，亦称随机场。可见，随机过程也可能是以时间t和空间参数s为变量的多变量随机过

程，而且参数还可以取其它的物理参量。

在本书中，凡说明振动系统运动情况时，“随机过程”多用“随机振动”一词，在其它情况下，我们才用随机过程一词。另外，还要指出，随机变量是随机过程在参数取一定值时，例如$t=t_1$时刻的一组数据，称为随机过程在$t=t_1$时刻的状态，状态和随机过程是两个不同的概念，但在某些情况下，这两个概念并不能分辨得十分清楚。

一个随机过程是样本点 ω和参数t的函数（$\omega\in\Omega$，$t\in T$），可记为$X(\omega, t)$，一般简写为$X(t)$，我们采用把连续参数t在区间$[0, T]$离散化为t_1，t_2，…，t_n，…的形式，就得到随机过程在这些时刻的一组状态，即一族随机变量，这一族随机变量就是离散化的随机过程。

1.2 统计描述

随机振动的统计描述是用概率或概率密度描述随机振动的概率结构，但在许多实际问题中得到高阶概率密度函数非常困难。因此，研究随机振动的各阶矩就显得十分重要，尤其是二阶矩在随机振动分析中占有最重要的地位。

1.2.1 概率及概率密度

考察某一随机振动，在同样的条件下对其重复记录多次，组成样本函数空间，如图1-1所示。在这一样本函数空间中取N个样本函数，在$t=t_1$时刻就可采集到N个数据。

$$x_1(t_1),\ x_2(t_1),\ \cdots,\ x_N(t_1)$$

这N个数据的大小各异，表示一个随机变量$X(t_1)$所取的可能值。首先选取一个度量的尺度x，将这N个数据与尺度x相比较，假若有n个数据小于x，那么，小于x的个数占总数的比例为n/N，则定义

$$P(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N} \tag{1-1}$$

称为振动的瞬时值小于x的概率，即随机变量$X(t_1)$的一维概率分布函数，如图1-3(a)所示。

根据定义，概率分布函数有以下基本性质

（1）$P(x)=P[X<x]$是非负非降函数。即，当$x_2>x_1$时，有

$$P(x_2)\geqslant P(x_1)\geqslant 0$$

（2）$P(-\infty)=0$，$P(+\infty)=1$

（3）对任何一个x值，有

$$0\leqslant P(x)\leqslant 1$$

（4）若已知$P(x)$，就可以确定振动瞬时值取值在给定区间$[a, b]$上的概率$P[a<X\leqslant b]$，即有

$$P[a<X\leqslant b]=P(b)-P(a)$$

从实际中可观察到，一个随机振动取较大幅值的可能性较小，而经常在特定值的范围内变化。为了进一步说明它的变化规律，引入“概率密度”的概念。讨论$t=t_1$时刻代表随机振动瞬时值的随机变量$X(t_1)$，它的概率分布函数为$P(x)$，根据概率的定义，

令

$$\Delta P(x)=P(x+\Delta x)-P(x)$$

表示瞬时值取值在$[x,x+\Delta x]$范围内的概率，如果分布函数$P(x)$是连续可微的，则有下面导数存在，即

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{dP(x)}{dx} \tag{1-2}$$

称$p(x)$为随机变量 $X(t_1)$的一维概率分布密度函数，简称概率密度，如图1-3 (b) 所示。就随机振动的瞬时值而言，它的物理意义是瞬时值落在单位区间上的概率。根据定义则有

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(\xi)d\xi \tag{1-3}$$

$$P(\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\xi)d\xi=1$$

$$P[a<X\leqslant b]=\int_{a}^{b}p(x)dx=\int_{-\infty}^{b}p(x)dx-\int_{-\infty}^{a}p(x)dx$$

$$=P(b)-P(a) \tag{1-4}$$

这就是说，随机变量$X(t_1)$取值在区间$(a, b]$上的概率是概率密度函数$p(x)$曲线在该区间上曲边梯形的面积，如图1-3 (b) 所示。$p(x)dx$是随机变量 $X(t_1)$取值在区间dx上的概率。由于分布函数$P(x)$是非降的，所以概率密度函数$p(x)$是非负函数，即$p(x)\geqslant 0$。

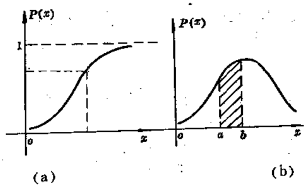


图1-3 一维概率分布函数（t_1时刻）

需要说明的是，随机变量有连续型、离散型和混合型之分。如果一个振动系统既承受冲击振动，又承受随机振动，那么，系统的振动将是冲击和随机变化的复合运动，由加速度记录所得到的随机变量可能有可数个非零概率离散值，它的概率密度函数有如下形式

$$p(x)=\bar{p}(x)+\sum_i P_1(x_i)\delta(x-x_i)$$

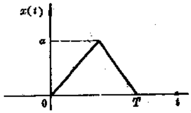
其中$p(x)$是不计离散分量时的概率密度，$P_1(x_i)$是离散点$x=x_i$处计算得到的概率，$\delta(x-x_i)$是狄拉克(δ)函数。这种随机变量的概率分布函数为

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi=\int_{-\infty}^{x} \overline{p}(\xi)\,d\xi+\sum_{x_i<x} P_1(x_i)$$

当$x\to\infty$时，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{p}(x)\,dx+\sum_i P_1(x_i)=1$$

例1－1　对一规则的锯齿形波$x(t)$采样，在时间间隔$[0, T]$内，采样的时刻是随机性的，并且彼此的机会是均等的，采样结果组成一个随机变量X，求X的概率及概率密度。



例1－1　图

解　因为采样的时刻是随机的，在区间$[0, a]$上取每一样本值的机会均等，因此，$P(0)=0$，$P(a)=1$，即$0\leqslant P[0\leqslant X\leqslant a]\leqslant 1$。概率密度函数在$[0, a]$内是一常数，大小为$1/a$，在$[0, a]$之外其值为零，可用下式表示

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<x\leqslant a\\ 0, & x\leqslant 0，或x>a\end{cases}$$

概率分布函数为

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{a}, & 0\leqslant x\leqslant a\\ 1, & x>a\end{cases}$$

例1－2　下图所示锯齿波$x(t)$，在随机选择的时间内采样，得到随机变量X。若采样时刻的选择都是等可能的，求X的概率密度函数$p(x)$和概率分布函数$P(x)$。

解　由图示，计算一个周期内随机变量X在x和$x+dx$之间的概率

$$P[x\leqslant X<x+dx]=p(x)\,dx=\frac{dt}{T}$$

而

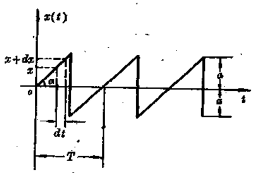
$$dt=\frac{dx}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{T}{2a}dx$$

由此得

$$p(x)\,dx=dx/2a$$

所以

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & -a\leqslant x\leqslant a\\ 0，其它\end{cases}$$



例1－2　图

概率分布函数为

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi=\int_{-a}^{x} p(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+1\right)$$

所以

$$P(x)=\begin{cases}0, & x<-a\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{a}+1\right), & -a\leqslant x\leqslant a\\ 1, & x>a\end{cases}$$

1.2.2　随机变量的数字特征量

一个随机变量的概率分布函数完整地描述了随机变量的概率特性，知道了概率分布，就可以知道该随机变量取些什么值，以及它以多大的概率取这些值。在实际问题中，求一个随机变量的分布函数并不是一件容易的事，对许多问题一般不需要全面地考察随机变量变化的情况，所以，不必求出它的分布函数，而只须求出随机变量的某些概率特征就够了。例如，在测量一个系统的随机振动的振幅时，人们往往关心的是振幅的平均值和振幅瞬时值偏离平均值的情况，虽然这些参数不能完整地描述随机振动，但可以避开求概率分布函数的困难。我们把那些能够反映随机变量主要概率特征的参量称为随机变量的数字特征量。下面介绍随机振动分析中常用的一些数字特征量。

数学期望

设X是一随机变量，$p(x)$是它的概率密度函数，若积分$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)dx$存在，则定义$X$的数学期望为

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx \tag{1-5}$$

式中E是数学期望符号。若x表示振动的位移，那么期望就是位移的加权平均值，权函数为$p(x)$。特别注意，切勿将数学期望与时间平均相混淆。

在工程问题中，一个随机振动往往是几个随机振动的合成，所以还经常使用随机变量函数的数学期望。若X是一连续随机变量，$p(x)$是它的概率密度，则它的函数$Y=f(X)$也是一个随机变量，其中f是一个确定的连续实函数，又若积分$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p(x)dx$收敛，则$Y=f(X)$的数学期望为

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p(x)dx \tag{1-6}$$

平均值、均方值与方差

若$Y=X^n$时，则有

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}x^n p(x)dx \tag{1-7}$$

称为随机变量X的n次原点矩，或n次矩，用符号M记之

$$M_n=E[X^n]=\int_{-\infty}^{\infty}x^n p(x)dx \tag{1-8}$$

当$n=1$时，M_1是X的一次矩，即X的数学期望，记为

$$\mu_x=M_1=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx \tag{1-9}$$

它表示在某一时刻t振动瞬时幅值的平均值，这个值往往对应着振动的平衡位置。鉴于它的重要性，这里用一个专用符号μ表示，以示它的特殊地位。但在实际工程中，不少随机振动的平均值为零。

当$n=2$时，M_2是X的二次矩，记为

$$\sigma_x^2=M_2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)dx \tag{1-10}$$

它表示在某一时刻t振动瞬时值的均方值。在一般的振动理论中，均方值是振动功率的度量。同样，在随机振动中也有类似的意义。它也是一个很重要的量，用一专用符号σ_x^2来

表示。σ_x表示均方根值。

如前所述，μ往往对应着运动的平衡位置，在平衡位置附近分析振动情况时，下面定义的中心矩有着明显的含义。所谓中心矩N_n（称n次中心矩），由下式定义

$$N_n = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^n p(x)dx \tag{1-11}$$

其中μ_x是随机变量X的平均值。

当$n=2$时，N_2称二次中心矩，记为ε_x^2

$$\varepsilon_x^2 = N_2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 p(x)dx \tag{1-12}$$

二次中心矩特别称之为方差，而$\sqrt{\varepsilon_x^2}=\varepsilon_x$称为标准差。方差（或标准差）是衡量随机振动瞬时值相对于平均值离散程度的一个量，ε_x越大，则该随机振动的瞬时值相差越大，反之亦然。

可以证明，一随机变量的均方值和方差之间有下面关系式

$$\varepsilon_x^2 = \sigma_x^2 - \mu_x^2 \tag{1-13}$$

事实上，由式（1-12）

$$\varepsilon_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2\mu_x x+\mu_x^2)p(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)dx - 2\mu_x\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx + \mu_x^2\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx$$

$$= \sigma_x^2 - 2\mu_x\mu_x + \mu_x^2 = \sigma_x^2 - \mu_x^2$$

例1-3 对例1-1，其概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & 0<x\leqslant a \\ 0, & x\leqslant 0 \text{及} x>a \end{cases}$$

求X的平均值、均方值和方差。

解 根据定义

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx = \int_0^a \frac{1}{a}xdx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^a = \frac{1}{2}a$$

X的均方值为

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)dx = \int_0^a x^2\frac{1}{a}dx = \frac{1}{3}a^2$$

方差为

$$\varepsilon_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 p(x)dx = \frac{1}{12}a^2$$

1.2.3 特征函数

为了说明概率密度和各阶矩在描述随机振动中的地位，这里引入特征函数的概念，在很多场合下用特征函数来说明问题更方便。令$f(X)=e^{i\theta X}$为随机变量X的复函数，这里θ为实数，$e^{i\theta X}$为一复随机变量，定义它的数学期望为特征函数，记为$\varphi(\theta)$。$\varphi(\theta)$和

X互成傅立叶变换关系，即

$$\varphi(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}p(x)dx$$

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta x}\varphi(\theta)d\theta \qquad (1-14)$$

所以，特征函数$\varphi(\theta)$同概率密度$p(x)$一样，可以用来描述一个随机变量。特征函数与各阶矩M_n之间存在下列关系式

$$\mu_x=M_1=\frac{1}{i}\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=0}$$

$$\sigma_x^2=M_2=\frac{1}{(i)^2}\frac{d^2\varphi(\theta)}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=0} \qquad (1-15)$$

$$M_n=\frac{1}{(i)^n}\frac{d^n\varphi(\theta)}{d\theta^n}\bigg|_{\theta=0}$$

将$\varphi(\theta)$展成麦克劳林级数，并注意到$\varphi(0)=1$，则有

$$\varphi(\theta)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^nM_n}{n!}\theta^n \qquad (1-16)$$

由式（1－16）可知，如果一随机变量的各阶矩已知，那么特征函数$\varphi(\theta)$便被确定。因此，各阶矩M_n（$n=1$，2，…，∞）特征函数及概率密度三者在描述随机变量时是等价的。

总之，在特定时刻从一随机振动的样本函数空间中采集的随机变量，可用三种等价的量来描述：

（1）概率密度函数$p(x)$，

（2）随机变量的各阶矩M_n，$n=1$，2，…，∞，有时用各阶中心矩N_n，$n=1$，2，…，∞，

（3）特征函数$\varphi(\theta)$。

例1－4 一随机变量X的分布密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon_x}\exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\varepsilon_x^2}\right]$$

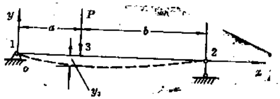
求X的特征函数。

解 根据特征函数的定义

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_x}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\theta x-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\varepsilon_x^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon_x}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{1}{2\varepsilon_x^2}\right)x^2+\left(i\theta+\frac{\mu_x}{\varepsilon_x^2}\right)x-\frac{\mu_x^2}{2\varepsilon_x^2}\right]dx=\exp\left[i\theta\mu_x-\frac{\theta^2\varepsilon_x^2}{2}\right]$$

例1－5 已知简支梁上作用一随机力P,如下图所示,其平均值为μ，方差为ε^2，μ、ε均为常数。不计梁的质量，求梁上点3处的挠度及支座反力的方差值。梁的弯曲刚度为EJ_x。



例 1－5 图

解 根据材料力学，支反力为

$$N_1=\frac{b}{a+b}P,N_2=\frac{a}{a+b}P$$

点3处的挠度为

$$y_3=\frac{a^2b^2}{3EJ_x(a+b)}P$$

则相应的方差值为

$$\varepsilon_{N_1}^2=\frac{b^2}{(a+b)^2}\varepsilon^2$$

$$\varepsilon_{N_2}^2=\frac{a^2}{(a+b)^2}\varepsilon^2$$

$$\varepsilon_{y_3}^2=\left[\frac{a^2b^2}{3EJ_x(a+b)}\right]^2\varepsilon^2$$

1.2.4 常用的几种分布规律

这里首先给出用函数形式表示的概率分布密度，然后联系随机振动加以说明。

高斯分布

若一随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon_x}\exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\varepsilon_x^2}\right],\quad -\infty<x<\infty \tag{1-17}$$

则称X满足高斯分布或正态分布，记为$N(\mu_x,\ \varepsilon_x^2)$。式中$\mu_x$、$\varepsilon_x^2$分别是$X$的平均值和方差。如图1－4(a)中的三条曲线是三个随机变量的概率密度，三者的平均值相等，曲线关于$x=\mu_x$对称，方差大的肥一些，方差小的瘦一些，在平均值上概率密度也最大。(b)是平均值不等而方差相等的三个随机变量的概率分布密度。

若对原随机变量进行如下变换

$$\xi=\frac{X-\mu_x}{\varepsilon_x}$$

则ξ的概率密度$p_\xi(\xi)$为

$$p_\xi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \tag{1-18}$$

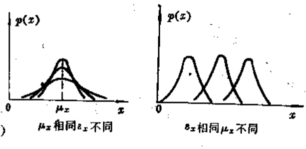


图1－4 高斯分布

容易验证，ξ的平均值$\mu_\xi=0$，ξ的方差$\varepsilon_\xi^2=1$，称ξ满足标准高斯分布，记为$N(0,1)$，如图1－5所示。这种变换称为标准化处理。在实际应用中，不只是对高斯分布的随机变量做标准化处理，在随机数据处理中，对任何分布形式的随机振动数据都要做标准化处理，这样可以提高数据处理的精度。对服从标准正态分布的随机变量X，

若用$\Phi(x)$表示它的概率分布函数，则有

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi$$

对给定的 x 值，可查表求得$\Phi(x)$的值。对非标准正态分布，可通过上述变换化为标准正态分布形式，然后再查表计算$\Phi(x)$的值。例如，X服从$N(\mu_x,\ \varepsilon_x^2)$分布，即$X$的分布函数为

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_x}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(\xi-\mu_x)^2}{2\varepsilon_x^2}}d\xi$$

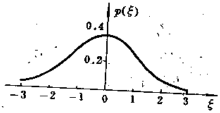


图1－5　标准化高斯分布

令

$$u=\frac{\xi-\mu_x}{\varepsilon_x}$$

则上式变为

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_x}{\varepsilon_x}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi\left(\frac{x-\mu_x}{\varepsilon_x}\right)$$

X取值在区间$(a,\ b]$内的概率可按下式查表计算

$$P[a<X\leqslant b]=\Phi\left(\frac{b-\mu_x}{\varepsilon_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu_x}{\varepsilon_x}\right)$$

实践证明，有许多工程随机振动满足高斯分布。因为许多随机振动都是无限多个相互独立的随机因素综合作用而产生的，根据中心极限定理，不管每个随机因素满足什么样的分布规律，这无限多个微小因素迭加而形成的随机振动都近似地服从高斯分布。因此，高斯分布对于随机振动的研究尤为重要。另外，高斯分布尚有下列重要性质。

（1）概率密度函数$p(x)$曲线关于$x=\mu_x$对称，且当$x=\mu_x$时$p(x)$取最大值，即

$$p(\mu_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon_x}$$

（2）对满足高斯分布的随机变量，只要知道它的方差和平均值，概率分布规律就完全确定。很多随机振动的平均值等于零，这时随机变量的概率分布仅取决于方差ε_x^2。

（3）各阶中心矩与方差之间满足下面关系式

$$N_x=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ 2^{\frac{n}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_x^{n}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), & n\text{为偶数}\end{cases}\tag{1-19}$$

其中$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$为$\Gamma$函数。根据这一性质，只要知道随机变量的平均值和方差（即μ_x和ε_x^2），所有各阶矩就可确定。

（4）高斯随机变量在下面三个不同区间的概率分别为

$P[\mu_x-\varepsilon_x<X\leqslant\mu_x+\varepsilon_x]=0.6826$

$P[\mu_x-2\varepsilon_x<X\leqslant\mu_x+2\varepsilon_x]=0.9544$

$P[\mu_x-3\varepsilon_x<X\leqslant\mu_x+3\varepsilon_x]=0.9974$

由第三个式子可以看出，正态随机变量X的值落在区间$[\mu_x-3\varepsilon_x,\ \mu_x+3\varepsilon_x]$内几

乎是肯定的。或者说，若X表示一随机振动，且其平均值为零，即$\mu_x=0$，则它的幅值大小超出三倍ε_x值的可能性很小。这给工程上研究随机振动带来很大方便。

均匀分布

假若在区间$[a,\ b]$上任取一点，则所取点的坐标便是一个随机变量，用X表示。设它的概率分布函数为

$$P(x)=P[X<x]=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases} \qquad (1-20)$$

如图1－6所示，它的概率密度函数为

$$p(x)=P'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases} \qquad (1-21)$$

这样的分布称为均匀分布，如图1－6。它是模拟产生随机振动的基础，有重要的应用价值。

威布尔分布

如果随机变量X的概率密度函数由下式描述

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases} \qquad (1-22)$$

其中$\beta>0$，$\eta>0$，皆为常数，则称X服从威布尔分布。威布尔分布是可靠性理论中的基本分布之一。X的数学期望为

$$\mu_x=E[X]=\eta\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

它的均方值为

$$\sigma_x^2=E[X^2]=\eta^2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)$$

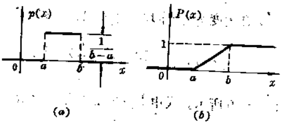


图1－6 均匀分布

其方差为

$$\varepsilon_x^2=E[X^2]-\{E[X]\}^2=\eta^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\right\}$$

当$\beta=1$时，称为指数分布，如图1－7所示，其概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\eta}e^{-\frac{x}{\eta}}, & x\geqslant 0\\ 0, & 其它\end{cases} \qquad (1-23)$$

指数分布的概率分布函数为

$$P(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\eta}}, & x\geqslant 0\\ 0, & 其它\end{cases} \qquad (1-24)$$

当$\beta=2$，$\eta=\sqrt{2}\,\varepsilon_x$时，$\varepsilon_x$是随机变量$X$的标准差，称瑞利分布，如图1－8所示，其分布密度是

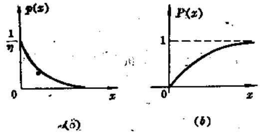


图1-7　指数分布

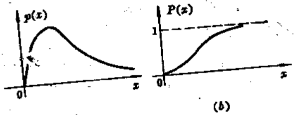


图1-8　瑞利分布

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\varepsilon_x^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon_x^2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{1-25}$$

分布函数为

$$P(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon_x^2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{1-26}$$

瑞利分布和指数分布在可靠性分析中都有重要的应用，这将在第八章叙述。

卡埃平方分布（χ^2分布）

令Z_1，Z_2，…，Z_n为n个独立随机变量，每个随机变量都服从标准正态分布，那么它们的平方和组成一个新的随机变量，记为χ^2，即

$$\chi^2=Z_1^2+Z_2^2+\cdots+Z_n^2 \tag{1-27}$$

称χ^2为自由度为n的卡埃平方变量，可以证明，χ^2的概率密度为

$$p(\chi^2)=\begin{cases}\left[2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}(\chi^2)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}e^{-\chi^2/2}, & \chi^2\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

如图1－9所示。式中$\Gamma(n/2)$是Γ函数。

χ^2在区间$[\chi^2_\alpha,\infty)$内的概率为

$$P(\chi^2_\alpha)=\int_{\chi^2_\alpha}^{\infty}p(\chi^2)d\chi^2=\alpha \tag{1-28}$$

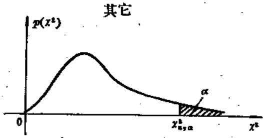


图1－9　χ^2分布

这里χ^2_α对应着概率为α的固定点。在计算时，先给定α（$0<\alpha<1$），再按式(1－28)求出满足该式的固定点$\chi^2_{n,\alpha}$，对于不同的α和n，相应的$\chi^2_{n,\alpha}$值已制成表格，可供查用。χ^2分布在工程振动中有很重要的地位，经常用χ^2分布来检验具体的随机振动是否满足高斯分布，也用于分析数据处理的误差。

例1-6　随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon_x}\exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\varepsilon_x^2}\right],\qquad -\infty<x<\infty$$