

高等代数习题解

上册

杨子胥 编
贾启恒 主审
陈蒙恩

山东科学技术出版社

高等代数习题解

杨子胥 编
贾启蒙 主审
陈恒恩

山东科学技术出版社

一九八七年·济南

高等代数习题解

杨子胥 编

贾启恒 主审
陈蒙恩

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 34.126印张 729千字

1982年10月第1版 1987年4月第3次印刷

印数: 55,001—64,500

ISBN 7—5331—0144—8

0.13

书号 13195·68 定价(上、下册) 6.45 元

内 容 提 要

本书从多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、集合与映射、线性空间、线性变换、 λ 矩阵、欧氏空间等方面，精选了1100道典型性较强的习题，做了全面详细的解答，并注意了一题多解。每章习题之前都作了简要的概述。内容丰富，重点突出，解答明确，启发性强，尤其便于自学。可供高等院校师生、中学教师和广大数学爱好者学习参考。

出版说明

数学是一门重要的基础学科，它已广泛地应用于生产、科研等各个领域。随着科学的迅猛发展，高等数学只靠大学的课堂讲授已远远满足不了高速前进的时代需要。为配合自学成才和职工业余教育及在校师生的学习，满足广大有志者的迫切需要，我们特编写了这本《高等代数习题解》。

本书从多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、集合与映射、线性空间、线性变换、 λ 矩阵、欧氏空间等方面，精选了1100道习题作了详细的解答。不少题作了一题多解。在编排上，注意了先后顺序和内容的衔接，避免了大幅度的跳跃。

本书概括了高等代数的主要内容。只要认真学习，既能巩固所学的基本概念，又可有效地提高运算能力和技巧，还可提高读者分析问题、解决问题的能力，是高等院校、电视大学、函授大学、职工业余大学的广大师生和中学教师、数学爱好者的一本理想的工具书。

在编写本书的过程中，我们特请贾启恒、陈蒙恩对全书作了重要仔细的审校，并增加了部分习题；李师正、孙宗明、倪炳华、王文省等也曾给予不少的帮助，特在此致谢。

一九八一年十月

目 录

上 册

第一章	数域上的一元多项式	1
§1.1	数环和数域.....	1
§1.2	多项式的运算.....	22
§1.3	最大公因式.....	48
§1.4	不可约多项式.....	80
§1.5	多项式的根.....	89
§1.6	根与系数的关系.....	112
第二章	有理数域、实数域和复数域上的多项式	124
§2.1	有理数域上的多项式.....	124
§2.2	复数域上的多项式.....	155
§2.3	实数域上的多项式.....	170
第三章	对称多项式	200
第四章	行列式	223
§4.1	排列与置换.....	223
§4.2	行列式的定义和性质.....	233
§4.3	行列式的计算.....	254
§4.4	拉普拉斯(Laplace)定理行列式的乘法.....	311
§4.5	克兰姆(Cramer)规则.....	327

第五章	线性方程组	347
§5.1	向量的线性相关性.....	347
§5.2	矩阵的秩.....	382
§5.3	线性方程组.....	388
§5.4	结 式.....	428
第六章	矩 阵	448
§6.1	矩阵的基本运算.....	448
§6.2	逆矩阵.....	494
§6.3	分块矩阵.....	516
§6.4	初等方阵.....	533

下 册

第七章	二次型	553
§7.1	二次型及其矩阵.....	553
§7.2	二次型的标准形.....	569
§7.3	正定二次型.....	598
第八章	集合与映射	626
§8.1	集 合.....	626
§8.2	映 射.....	636
§8.3	代数运算.....	644
第九章	线性空间	656
§9.1	线性空间定义、基底和维数.....	656
§9.2	子空间、直和.....	693
第十章	线性变换	730
§10.1	线性变换的运算及其矩阵.....	730
§10.2	特征值与特征向量.....	763

§10.3 不变子空间	803
第十一章 λ-矩阵	835
§11.1 λ -矩阵的不变因子和初等因子	835
§11.2 矩阵的相似与若当标准形	865
第十二章 欧氏空间	912
§12.1 欧氏空间的基本概念	912
§12.2 正交变换与正交矩阵	944
§12.3 对称变换与对称矩阵	969
第十三章 群、环、域基本概念	1017
§13.1 群	1017
§13.2 环与域	1057

第一章 数域上的一元多项式

§1.1 数环和数域

1° 若非空数集 R 中任两数的和、差、积均仍属于 R ，则称 R 是一个数环。

2° 设 P 是至少包含两个数的数集，如果 P 中任两数的和、差、积、商（除数不等于零）均仍属于 P ，则称 P 是一个数域。

3° 任何数域都包含有理数域。

1. 证明：若数环 $R \neq 0$ ，则 R 必为一个无限数集。

证 因为数环 $R \neq 0$ ，则 R 必含有不等于零的数 a 。于是

$$2a = a + a, \quad 3a = a + 2a, \dots$$

都属于 R ，且互不相等。因若有

$$ma = na,$$

则 $(m-n)a = 0$ 。但 $a \neq 0$ ，故

$$m-n = 0, \quad \text{即 } m = n.$$

从而 R 必含有无穷多个数。

2. 有没有不含非零整数的数环？如果有，举出实例；如果没有，加以证明。

解 有这样的数环。例如：

$$R = \{a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n\},$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 为任意整数， n 为任意的正整数， π 为圆

周率.

R 显然作成一数环.而且 R 不包含不等于零的整数.若不然,设 R 含有非零整数 a ,则令

$$a = a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots + a_n\pi^n,$$

于是 π 为整系数方程

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x - a = 0$$

的根,这与 π 是超越数相矛盾.故数环 R 不包含非零整数.

3. 设 F 是至少含有两个数的数集.证明:如果 F 中任两数的差与商(除数不为零)仍属于 F ,则 F 必为数域.

证 设 a, b 为 F 中任两数,由于 F 中任两数的差与商仍属于 F ,故

$$a - a = 0 \in F,$$

且当 $b \neq 0$ 时,

$$\frac{b}{b} = 1 \in F, \frac{1}{b} \in F.$$

于是

$$0 - b = -b, a + b = a - (-b),$$

$$a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$$

都属于 F .即 F 对加、乘也是封闭的,从而 F 作成一数域.

4. 设 F 是至少含有两个数的数集,且 F 对加法与乘法封闭.证明:如果对 F 中任意数 a , $-a$ 也属于 F ;而且当 $a \neq 0$ 时, a^{-1} 也属于 F ,则 F 必为一数域.

证 只需证 F 对减法与除法也封闭即可.

对于 $a, b \in F$,由于 $-b \in F$,则

$$a - b = a + (-b) \in F;$$

当 $a \neq 0$ 时, 由于 $a^{-1} \in F$, 而 F 对乘法封闭, 故

$$\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1} \in F.$$

即 F 对减法与除法也封闭. 故 F 作成数域.

5. 下列各数集是否作成数环或数域:

- 1) $P_1 = \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b \text{ 为任意有理数}\};$
- 2) $P_2 = \{a + bi \mid a, b \text{ 为任意有理数}\};$
- 3) $P_3 = \{a + bi \mid a \text{ 为任意有理数, } b \text{ 为任意实数}\};$
- 4) $P_4 = \{a + bi \mid a, b \text{ 为任意整数}\};$
- 5) $P_5 = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \text{ 为任意有理数}\};$
- 6) $P_6 = \{\frac{2n}{2n+1} \mid n \text{ 为任意整数}\};$
- 7) $P_7 = \{a\sqrt{5} \mid a \text{ 为任意有理数}\};$
- 8) $P_8 = \{\text{全体非负有理数}\}.$

解 1) P_1 作成数环, 也作成数域.

首先, $0 \in P_1, 1 \in P_1.$

其次, 设

$$a + b\sqrt{3}i \in P_1, \quad c + d\sqrt{3}i \in P_1$$

为任意两个数, 因为 a, b, c, d 是有理数, 所以对 a, b, c, d 进行加、减、乘、除(除数不为零)后仍为有理数, 故

$$\begin{aligned} & (a + b\sqrt{3}i) + (c + d\sqrt{3}i) \\ &= (a + c) + (b + d)\sqrt{3}i \in P_1, \\ & (a + b\sqrt{3}i) - (c + d\sqrt{3}i) \\ &= (a - c) + (b - d)\sqrt{3}i \in P_1, \\ & (a + b\sqrt{3}i) \cdot (c + d\sqrt{3}i) \\ &= (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}i \in P_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c+d\sqrt{3}i}{a+b\sqrt{3}i} &= \frac{(c+d\sqrt{3}i) \cdot (a-b\sqrt{3}i)}{(a+b\sqrt{3}i) \cdot (a-b\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{ac+3bd}{a^2+3b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+3b^2} \sqrt{3}i \in P_1, \\ &\quad (a+b\sqrt{3}i \neq 0), \end{aligned}$$

即 P_1 对加法、减法、乘法、除法是封闭的，所以 P_1 作成数环，也作成数域。

2) P_2 作成数环，也作成数域，验算同1)。

3) P_3 既不作成数环，也不作成数域。因为， $0+1 \cdot i$ ， $1+\sqrt{2}i \in P_3$ ，但是，由于 $\sqrt{2}$ 是无理数，故

$$i \cdot (1+\sqrt{2}i) = -\sqrt{2}+1 \cdot i \notin P_3.$$

即 P_3 对乘法不封闭。

4) P_4 是数环，但不是数域。是数环的验算同1)。又由于 $-1+3i, 2i \in P_4$ ，但是

$$\frac{-1+3i}{2i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \notin P_4.$$

即 P_4 对除法不封闭，故不能作成数域。

5) P_5 既不作成数域，也不作成数环：因为对乘法不封闭。例如， $\sqrt[3]{2} \in P_5$ ，但是

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \notin P_5.$$

事实上，若 $\sqrt[3]{4} \in P_5$ ，设

$$\sqrt[3]{4} = a + b\sqrt[3]{2}, \quad a, b \text{ 为有理数.}$$

则 a 与 b 都不能是零，且

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - b) \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - b)(\sqrt[3]{2} + b)}{\sqrt[3]{2} + b} = \frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} - b^2)}{\sqrt[3]{2} + b} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 - b^2 \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} + b}.$$

或 $2 - ab = (a + b^2) \sqrt[3]{2}$ (1)

但 $a + b^2 \neq 0$, 因若 $a + b^2 = 0$, 则 $2 - ab = 0$, 由此可得

$$b = -\sqrt[3]{2}.$$

这与 b 是有理数相矛盾, 故 $a + b^2 \neq 0$. 于是由 (1) 得

$$\frac{2 - ab}{a + b^2} = \sqrt[3]{2}.$$

即有理数等于无理数, 这是矛盾的. 故 $\sqrt[3]{4} \notin P_5$.

6) P_6 既不成数域, 也不成数环, 因为对加法不封闭. 例如,

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5} \in P_6, \text{ 但是 } \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15} \notin P_6 \text{ (因}$$

为分母减分子不等于 1).

7) P_7 既不成数域, 也不成数环, 因为对乘法不封闭. 例如,

$$\sqrt{5} \in P_7, \text{ 但是, } \sqrt{5} \sqrt{5} = 5 \notin P_7.$$

8) P_8 虽对加、乘、除三种运算都封闭, 但对减法不封闭, 故不能作成数环.

6. 证明: 一切形如 $\frac{m}{2^n}$ 的有理数作成的集合 R (其中 m 为任意整数, n 为任意非负整数) 是一个数环. 问: R 是否作成数域?

证 任取 $a, b \in R$, 且令

$$a = \frac{m}{2^n}, \quad b = \frac{s}{2^t}.$$

不妨设 $n \geq t$, 则

$$a \pm b = \frac{m}{2^n} \pm \frac{s}{2^t} = \frac{m \pm 2^{n-t}s}{2^n} \in R,$$

$$ab = \frac{m}{2^n} \cdot \frac{s}{2^t} = \frac{ms}{2^{n+t}} \in R.$$

故 R 作成数环.

但 R 不作成数域: 例如

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in R, \text{ 但 } \frac{3}{2} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{5} \notin R,$$

也就是说 $\frac{3}{5}$ 不能表示成 $\frac{m}{2^n}$ 的形状, 即 R 对除法不封闭.

7. 设 m 是任意给定的正有理数, 证明:

1) 一切形如 $x + y\sqrt{m}$ (x, y 为任意有理数) 的数构成的集合 P 作成一数域;

2) P 是有理数域的充分与必要条件是, m 为一个有理数的完全平方.

证 1) P 对加、减、乘三种运算封闭是显然的. 下面证明对除法也封闭.

在 P 中任取 $\alpha = a + b\sqrt{m} \neq 0$. 若 $b = 0$, 则 $\alpha = a \neq 0$, 于是 $\alpha^{-1} = a^{-1} \in P$; 若 $b \neq 0$, 则当 $a - b\sqrt{m} = 0$ 时, 有

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}.$$

从而一切形如 $x + y\sqrt{m} = x + y \cdot \frac{a}{b}$ 的数就是全体有理数, 即此时 P 为有理数域.

当 $a - b\sqrt{m} \neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a - b\sqrt{m}}{(a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m})} = \frac{a - b\sqrt{m}}{a^2 - b^2m} \in P,$$

故可知 P 对除法封闭, P 作成数域.

2) 由于 $\sqrt{m} \in P$, 因此, 若 P 是有理数域, 则 \sqrt{m} 为有理数. 从而 m 为有理数的一个完全平方数.

反之, 若 m 是有理数的一个完全平方数, 则 \sqrt{m} 是一个有理数, 从而 P 为有理数域.

$$8. \text{ 设 } P = \left\{ a + b\sqrt{m} \mid a, b \text{ 为有理数, } m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

证明: P 作成一数域.

证 证法 I:

P 对加、减法封闭是显然的. 下面证明对乘、除法也封闭.

首先, 有

$$\begin{aligned} \sqrt{m} &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1 = m - 1. \end{aligned}$$

即 $m = 1 + \sqrt{m}.$

于是

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{m})(c + d\sqrt{m}) &= ac + bdm \\ &+ (ad + bc)\sqrt{m} = ac + bd(1 + \sqrt{m}) \\ &+ (ad + bc)\sqrt{m} = (ac + bd) + (ad + bc \\ &+ bd)\sqrt{m} \in P, \end{aligned}$$

即 P 对乘法封闭.

设 $c+d\sqrt{m} \neq 0$ ，即 c, d 为不全等于零的有理数. 若有

$$\frac{1}{c+d\sqrt{m}} = x+y\sqrt{m}, x, y \text{ 为有理数} \quad (1)$$

则根据 $m=1+\sqrt{m}$ 可得

$$\begin{aligned} 1 &= (c+d\sqrt{m})(x+y\sqrt{m}) \\ &= (c-d)x - cy + (dx+cy+dy)m, \end{aligned}$$

或 $(d-c)x+cy+1=[dx+(c+d)y]m.$

由于 m 是无理数，故必

$$\begin{cases} dx+(c+d)y=0 \\ (d-c)x+cy=-1. \end{cases}$$

但

$$D = \begin{vmatrix} d & c+d \\ d-c & c \end{vmatrix} = cd+c^2-d^2 \neq 0,$$

(否则，由一元二次方程求根公式知，

$$c = \frac{-d \pm d\sqrt{5}}{2}.$$

与 c, d 为不全等于零的有理数矛盾)

于是得

$$x = \frac{c+d}{D}, \quad y = \frac{-d}{D}.$$

代入(1)，并经验算有

$$\frac{1}{c+d\sqrt{m}} = \frac{c+d}{D} - \frac{d}{D}\sqrt{m} \in P.$$

由此可知 P 对除法也封闭，故 P 作成数域。

证法 II:

由
$$m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

得
$$\sqrt{m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

所以
$$a + b\sqrt{m} = a + b \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \left(a + \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{5}.$$

令
$$a + \frac{b}{2} = c, \quad \frac{b}{2} = d,$$

则 c, d 为有理数. 反之, 如果 c, d 为任意有理数, 则 a, b 也是有理数. 于是

$$\begin{aligned} P &= \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \text{ 为有理数}\} \\ &= \{c + d\sqrt{5} \mid c, d \text{ 为有理数}\} \end{aligned}$$

后者是数域, 所以 P 是数域.

9. 一切形如 $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ 的数作成的集合 (其中 a, b, c 为任意有理数) 用 $P(\sqrt[3]{2})$ 表示. 证明: $P(\sqrt[3]{2})$ 作成一数域.

证 $P(\sqrt[3]{2})$ 中的数对加、减、乘法运算封闭是显然的. 下面证明对除法也封闭.

设

$$\alpha = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \neq 0, \quad a, b, c \text{ 为有理数.}$$

则
$$(\alpha - a)^3 = (b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^3.$$

两边展开, 再整理, 得

$$\begin{aligned} \alpha^3 - 3a\alpha^2 + (3a^2 - 6bc)\alpha - (a^3 + 2b^3 + 4c^3 \\ - 6abc) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

则一定有
$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc \neq 0.$$