★最新高考3+X必备用书

循序渐进 ★ 高考必备

高考倒计时

GAOKAO

- 开创教辅新时尚
- 解读高考新动向
- 基础知识日日练
- 难点考点天天讲
- 专题深化有规律
- 综合训练授良方
- 天下名师伴你行
- 走向成功见曙光

主编 任 勇 特级教师

数学

人民日报出版社

最新高考3+X必备用书

特级教师任 勇主编高考倒计时

高考倒计时

GAOKAO

主　　编　任　勇

本书编者　宋立强　郭俊芳
谢志强　潘永俊　陈智猛
张瑞炳　宁超敏　林敬松
詹世林　赵祥枝　章显联
陈文强　任　勇

数学

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考倒计时/任勇主编．-北京：人民日报出版社，2002.1

ISBN 7-80153-348-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 任… Ⅲ. 数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 000591 号

书　　名:高考倒计时(数学)

策　　划:原建平
主　　编:任　勇
责任编辑:凯　然
装帧设计:吴本泓

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号,邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京市朝阳区飞达印刷厂

开　　本:787×1092　1/32
字　　数:2778 千字
印　　张:114.25
印　　数:3000 册
印　　次:2002 年 1 月　第 1 次印刷

书　　号:ISBN　7-80153-348-8/G·208
全套定价:115.20 元(**本册定价**:12.80 元)

走近高考，走向成功！

任　勇

3月1日，我们走进了高考倒计时。

3月1日，我们一步一步走近高考。

高考是什么？

有人说，高考是万人争锋的小径，是智力搏杀的战场。也有人说，高考是充满激烈竞争的过程，是国家选拔人才的一种方式。还有人说，高考是中国最奇特的一个文化现象，是人生向上提升的难得的机会。

说得都很好。但我以为还应以更积极的心态来看待高考。

应该这样说，高考是一笔人生的财富，是一次人生的洗礼。高考的价值是多方位的，高考的价值不仅仅在于能读大学。

日本教育家这样说："把青春燃烧于高考的能量，也是今后用以推动人生的能量。""当一个高中生通过了高考，他就是真正的大人了。"

"过来人"这样说："高三，对于我来说，也是一段美好的日子，能有那么明确的一个目标并为之奋斗，那份投入，那种充实、满足感，都将在记忆中珍藏。毕竟，人生能有几回搏。高考，是难得的体验。"

同学们应当挑战自我，超越自我，挑战高考，超越高考，科学迎考，最终赢得高考。把高考看成是人生的一次浓缩，一次聚焦，一次闪烁，一次升华，也是一个新的里程碑。

离高考还有128天，面对高考，道一声："我来了"；面对高校，说一句："大学，我不念，谁念！"

是的，要有远大的理想，要有明确的目标。但远大的理想，还要与脚踏实地的精神结合起来，才能把美好的愿望变成现实。

在同学们向目标挺进的过程中，我们为同学们编写了这套《高考倒计时》丛书，目的就是想帮助同学们一日一日地走近高考，走向成功！

高考倒计时拉开了高考冲刺的序幕。这128天，是奋斗的128天，是创造奇迹的128天，是充满希望的128天，也是你智慧升华、改变人生命运的128天。抓住生活中的每一天，你就抓住了成功。

太阳每天都是新的，新的一天从进取开始。

预祝同学们这128天的学习取得成功，预祝同学们考进理想的大学！

目 录

3 月 1 日	离高考还有 128 天
星 期 五	

【考点】集合.

【对策】集合是每年高考必考的知识点之一.

(1)研究集合时,应重视符号语言、文字叙述、图形(数轴、坐标系、韦恩图)间的互相转化、准确表达;

(2)要注意空集的特性;在题设中,若未指明某一集合为非空集合,要考虑可能为空集的情形.

【范例】(特别提醒:先遮住每题的分析,后尝试解答,再对照分析,效果最佳!)

【例1】选择题

(1)设全集 $I=\{a,b,c,d,e\}$,集合 $M=\{c,d,e\}$,$N=\{a,b,e\}$那么集合$\{a,b\}$可以表示为 ( )

A. $M\cap N$　　B. $\overline{M}\cap N$

C. $M\cap\overline{N}$　　D. $\overline{M}\cap N$

(2)集合 $M=\{x\mid x>2\}$,$N=\{x\mid x<3\}$,那么"$x\in M$或$x\in N$"是"$x\in M\cap N$"的 ( )

A.充分非必要条件

B.必要非充分条件

C.充要条件

D.既非充分也非必要条件

(3)设集合 $A=\{1,5\}$,则满足 $A\cup B=\{1,5\}$的集合 B 的个数是 ( )

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

(4)已知 $A=\{y\mid y=x,x\in R\}$,$B=\{y\mid y=x^2,x\in R\}$,则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x\mid x\in R\}$　　B. $\{y\mid y\geqslant 0\}$

C. $\{(0,0),(1,1)\}$　　D. $\varnothing$

分析:(1)利用韦恩图即可得解,选 B.

(2)首先进行语言的转化,"$x\in M$ 或 $x\in N$"意味着$x\in M\cup N$;对于集合 A、B,①若 $A\subsetneqq B$,则 A 是 B 的充分条件;②若 $A\supsetneqq B$,则 A 是 B 的必要条件;③若 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件.因为 $M\cup N\supsetneqq M\cap N$,因此选 B.

(3)由 $A\cup B=A$ 可知 $B\subseteq A$,即 B 是 A 的子集,共 $2^2=4$ 个,选 A.

(4)应注意集合 A、B 都是数集,分别是所对应函数的值域,选 B.

评析:研究集合时,应注意集合的元素的属性.注意区分集合 $C=\{y\mid y=x^2\}$ 与集合 $D=\{(x,y)\mid y=x^2\}$. C 是数集——函数的值域;D 是点集——抛物线.

【例2】填空题

(1)已知集合 $A=\{x\mid x^2-a<0\}$,$B=\{x\mid x<2\}$,若 $A\cap B=A$,则实数 a 的取值范围________.

(2)若全集为 R,集合 $A=\left\{x\mid\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-6}>1\right\}$,$B=\{x\mid \log_3(x-a)<2\}$,当 $A\subsetneqq B$ 时,则 a 的取值范围________.

(3)已知全集 $I=Z$,集合 P、Q 满足 $P\cap Q=\{1,2\}$,$P\cup Q=\{1,2,3,4,5\}$,则 $(P\cup Q)\cap(\overline{P}\cup\overline{Q})=$________.

分析:(1) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$,注意 A 可能为空集.分 $a\leqslant 0$ 和 $a>0$ 两种情况进行讨论.当 $a>0$ 时,$A=\{x\mid-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}\}$;当 $a\leqslant 0$ 时,$A=\varnothing$.利用数轴,可知 $a\in(-\infty,4]$.

(2)解不等式,首先应求不等式的定义域.

$A=\{x\mid -2<x<3\}$,$B=\{x\mid a<x<a+8\}$,借助于数轴,即得 $a\in[-5,-2]$.

(3)注意到$\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$,$\overline{P\cup Q}=\overline{P}\cap\overline{Q}$,即可得解$(P\cup Q)\cap(\overline{P}\cup\overline{Q})=\{3,4,5\}$.

【例3】已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2}\}$,$N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$,且 $M\cap N\neq\varnothing$,求 b 的取值范围.

分析:集合 M 所表示的点集是半圆上的点,集合 N 所表示的点集是直线上的点,由图像可得$b\in[-3,3\sqrt{2}]$.

【例4】已知 A、B 是以一些实数为元素的两个集合,$A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$,$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$,且 $A\cap B=\{2,5\}$,求实数 a 的值,并求 $A\cup B$.

分析:解题时应考虑到集合元素的互异性,又 $a^3-2a^2-a+7=5$,从而得解 $a=2$.

【例5】已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+2mx+4,x\in R\}$,$B=\{x\mid \log_3^2x+\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant 0\}$,且 $A\cap B\neq\varnothing$.求实数 m 的范围.

分析:$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$;注意到集合 A 是函数 $y=x^2+2mx+4,x\in R$ 的值域,$A=\{y\mid y\geqslant 4-m^2\}$,由 $A\cap B\neq\varnothing$ 可得 $4-m^2\leqslant 3$,即 $m\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

评析:研究集合,重点在于元素的属性,而与代

表元素的字母一般没有关系．尽管 A 中元素是 y，B 中元素是 x，但 A、B 都是实数组成的集合，因此可以研究它们间的关系．

【例6】设 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x\mid x=f(x)\}$，$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$．

(1)求证：$A\subseteq B$；

(2)如果 $A=\{-1,3\}$，求 B．

分析：本题是涉及集合、函数和方程的综合题．

(1)依据子集的概念，要证 $A\subseteq B$，只要证对任意 $x_0\in A$，均有 $x_0\in B$ 成立；

(2)由 $A=\{-1,3\}$ 知，方程 $x=f(x)$ 有二实根 -1 和 3，从而应用韦达定理可求出 $p=-1$，$q=-3$，也就确定出 $f(x)$ 的解析式 $f(x)=x^2-x-3$，再解方程 $x=f[f(x)]$，即 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$，就可得 $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$．

评析：在思维过程中，应注意把集合、抽象函数符号等逐步转化，显示出最本质的数量关系．不断实施语言间的转换．而语言是思维的载体，对语言的转换应加以足够的重视．

3 月 2 日 星 期 六	离高考还有 127 天

【考点】映射、函数与反函数．

【对策】本节内容在高考中主要体现在选择题、填空题中．

(1)对映射、函数与反函数的定义要理解；要理解函数的符号，掌握函数的表示法——解析法、列表法、图像法；理解分段函数、复合函数的表示法．

(2)会判断两个函数是否为同一函数；特别地，研究函数时，首先应对函数的定义域进行认真的研究．

(3)求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤是：①确定原函数 $y=f(x)$ 的值域，它是反函数的定义域 D；②由 $y=f(x)$ 的解析式解出 x，即 $x=f^{-1}(y)$；③将 x、y 互换，得函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$，并用括号注明定义域($x\in D$)．

(4)关于反函数，①函数与其反函数的定义域、值域之间的关系为相互交换；②函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

【范例】(特别提醒：先遮住每题的分析，后尝试解答，再对照分析，效果最佳！)

【例1】选择题

(1)已知函数 $y=f(x)$，$x\in F$，那么集合 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in F\}\cap\{(x,y)\mid x=1\}$ 中所含元素的个数是　　(　　)

A．0　　B．1　　C．0 或 1　　D．1 或 2

(2)设函数 $f(x)$ 对任意 x、y 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(2)=4$，则 $f(-1)$ 等于　　(　　)

A．-2　　B．$\pm\frac{1}{2}$　　C．±1　　D．2

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x-1 & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}} & x>0\end{cases}$，已知 $f(a)>1$，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A．$(-1,1)$

B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C．$(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

D．$(1,+\infty)$

(4)若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，$f(a)=b$，$ab\neq0$，则 $g(b)$ 等于　　(　　)

A．a　　B．a^{-1}　　C．b　　D．b^{-1}

分析：(1)函数是非空实数集上的映射，对于定义域 F 中的每一个 x，仅有惟一一个 y 与它对应；而 $x=1\in F$ 不一定成立，所以直线 $x=1$ 与函数 $y=f(x)$，$x\in F$ 的图像有 0 个或 1 个交点，因此选 C．

(2)未给出具体形式的函数一般称为抽象函数．经常先研究一些特殊数的函数值．$f(0)=0$，$f(x)+f(-x)=0$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，而 $f(2)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=2$，$f(-1)=-f(1)=-2$，选 A．

(3)$f(x)$ 是分段函数，研究时应注意分段讨论．对 $a\leqslant0$ 和 $a>0$ 讨论，选 B．

(4)由 $f(a)=b$ 可得 $g(b)=a$，选 A．

评析：函数 $y=f(x)$ 若存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，应注意到 $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$；$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$．

【例2】填空题

(1)已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，则 $f(x)=$________．

(2)集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{c,d,e\}$．

①可建立从 A 到 B 的映射的个数是________．

②设映射 $f: B\to A$，如果集合 A 中的元素都是 B 中元素在 f 下的象，那么这样的映射有________个.

③设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{2,3,4,5,6\}$，映射 $f: M\to N$ 使对任意的 $x\in M$，都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数，这样的映射 f 的个数有________个.

(3)已知函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像经过点(1,7)，其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点(4,0)，则 $f(x)$ 的解析式是________.

(4)设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+f(\frac{1}{x})\cdot\log_2 x$，则 $f(2)=$________.

分析：(1)进行等量代换时，要注意变量的范围的改变，这在复合函数中更要注意.

设 $u=\sqrt{x}+1$，则 $u\geqslant1$，$\sqrt{x}=u-1$，$x=(u-1)^2$，所以 $f(u)=u^2-1(u\geqslant1)$，即得 $f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$.

(2)①根据乘法原理，可得从 A 到 B 的映射个数是 $3^2=9$ 个；②有 $C_3^2\times P_2^2=6$ 个；③有 $5\times2\times5=50$ 个.

(3)原函数 $y=f(x)$ 的图像与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 可得 $f(x)=4^x+3$.

(4)用 $\frac{1}{x}$ 替换原式中的 x，得 $f(\frac{1}{x})=1+f(x)\cdot\log_2\frac{1}{x}$，从而可得 $f(x)=\frac{1+\log_2 x}{1+\log_2^2 x}$，得 $f(2)=1$.

【例3】设 $a>0$，$a\neq1$，$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x\geqslant1)$，求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 和反函数的定义域.

分析：由 $x\geqslant1$ 可知 $x+\sqrt{x^2-1}\geqslant1$，(1)当 $a>1$ 时，$f(x)\geqslant0$；(2)当 $0<a<1$ 时，$f(x)\leqslant0$. 从而可得 $f^{-1}(x)$ 的定义域：(1)当 $a>1$ 时，$x\geqslant0$；(2)当 $0<a<1$ 时，$x\leqslant0$.

而 $x=\frac{a^y+a^{-y}}{2}$，把 x、y 互换得函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$，定义域如上所求.

【例4】判断下列各组函数是否为同一个函数.

(1) $y=x$ 与 $y=\log_a a^x$；

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in(-1,0)\\ x-1 & x\in(0,1)\end{cases}$ 与 $f^{-1}(x)$.

分析：只需判断两个函数的定义域、解析式是否相同即可判断.(1)定义域、解析式都相同，是同一函数；(2)定义域不同，不是同一函数；(3)定义域、解析式都相同，是同一函数.

【例5】证明：函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(a\neq1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

分析：法一：证明函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(a\neq1)$ 的反函数是 $y=\frac{x-1}{ax-1}(a\neq1)$，注意到函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，即得证.

法二：设 $P(x',y')$ 是函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(a\neq1)$ 的图像上一点，$Q(s,t)$ 是 P 关于直线 $y=x$ 的对称点，只需证点 Q 也在函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(a\neq1)$ 的图像上，即得证.

【例6】函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)(x\in R)$，且当 $-1\leqslant x<1$ 时，$f(x)=x^2+1$. 当 $x\in[2n-1,2n+1)(n\in Z)$ 时，求 $f(x)$ 的解析式.

分析：设 $x\in[2n-1,2n+1)(n\in Z)$，则 $x-2n\in[-1,1)$，$f(x-2n)=(x-2n)^2+1$，而 $f(x-2n)=f(x)$，所以当 $x\in[2n-1,2n+1)(n\in Z)$ 时，$f(x)=(x-2n)^2+1$.

3月3日	离高考还有126天
星期日	

【考点】函数的解析式与定义域.

【对策】(1)解析式表示函数与自变量之间的一种对应关系，解析式与所取字母无关. 如 $y=2x$ 与 $s=2t$ 是同一函数.

(2)研究复合函数的解析式，要注意变量的取值范围的变化.

(3)在解决有关函数问题时，优先考虑定义域，如讨论函数的单调性，要在函数的定义域或它的一个子集(区间)上进行；研究函数的奇偶性，首先要求函数的定义域必须关于原点成中心对称. 函数的其它性质的研究也离不开它的定义域.

函数的定义域，主要包含：①偶次根式的被开方式非负；②分式的分母不得为零；③对数函数的真数必须大于零，底数必须大于零且不为1；④指数函数的底数大于零且不为

1,负指数幂、零指数幂的底数不得为零;⑤三角函数及反三角函数的定义域;⑥如果函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的,那么它的定义域是各基本函数定义域的交集;⑦复合函数 $y=f[g(x)]$,应先由 $y=f(u)$有意义的条件确定 u 的取值范围,再由 u 的范围来确定 $u=g(x)$中 x 的范围,即为复合函数 $y=f[g(x)]$的定义域.

【范例】(特别提醒:先遮住每题的分析,后尝试解答,再对照分析,效果最佳!)

【例1】选择题

(1)给出三个等式:①$f(x+y)=f(x)+f(y)$;②$f(xy)=f(x)+f(y)$;③$f(xy)=f(x)f(y)$.则不满足其中任何一个等式的函数是 ( )

A.$f(x)=x^2$ B.$f(x)=\sin x$

C.$f(x)=2x$ D.$f(x)=\lg x$

(2)若 $g(x)=1-2x$,$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq0)$,则 $f(\frac{1}{2})=$ ( )

A.1 B.3 C.15 D.30

(3)函数 $y=\sqrt{\log_{\cos\frac{\pi}{5}}\frac{1}{x+3}}$的定义域是 ( )

A.$(-3,+\infty)$

B.$[-2,+\infty)$

C.$(-3,-2)$

D.$(-\infty,-2)$

(4)如果函数 $f(x)=(x+1)(1-|x|)$的图像在 x 轴上方,则 $f(x)$的定义域为 ( )

A.$\{x||x|<1\}$

B.$\{x||x|>1\}$

C.$\{x|x<1$ 且 $x\neq-1\}$

D.$\{x|x>-1$ 且 $x\neq1\}$

分析:(1)依次检验,A 满足③,C 满足①,D 满足②,所以选 B.

(2)令 $g(x)=\frac{1}{2}$,得 $x=\frac{1}{4}$,代入$\frac{1-x^2}{x^2}$,即得 $f(\frac{1}{2})=15$,选 C.

评析:研究复合函数时,要特别注意变量与变量、变量与数之间的等价关系.

(3)求函数的定义域,应由内到外逐个分析,使得解析式的每个部分有意义.首先$\frac{1}{x+3}$是对数 $\log_{\cos\frac{\pi}{5}}\frac{1}{x+3}$的真数,必须有$\frac{1}{x+3}>0$;又 $\log_{\cos\frac{\pi}{5}}\frac{1}{x+3}$是偶次根式$\sqrt{\log_{\cos\frac{\pi}{5}}\frac{1}{x+3}}$的被开方式,必须有 $\log_{\cos\frac{\pi}{5}}\frac{1}{x+3}\geqslant0$;把上述两个不等式联立$\begin{cases}\frac{1}{x+3}>0\\ \log_{\cos\frac{\pi}{5}}\frac{1}{x+3}\geqslant0\end{cases}$,求解不等式组即得原来函数的定义域.选 B.

(4)$f(x)=(x+1)(1-|x|)>0$,通过讨论 $x>0$、$x=0$、$x<0$ 即得,选 C.也可把 $x=-2$、$x=0$ 代入函数解析式检验,即可选 C.

【例2】填空题

(1)设 $f(x)=2x+3$,$g(x+2)=f(x)$,则 $g(x)=$________.

(2)若等式 $f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$对一切实数都成立,且 $f(0)=1$,则 $f(x)=$______.

(3)已知函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$,则函数 $f[f(x)]$的定义域为________.

(4)函数 $f(x+1)$的定义域是$[-2,3)$,则 $f(\frac{1}{x}+2)$的定义域是________.

分析:(1)由 $g(x+2)=f(x)=2x+3$,用拼凑法$[2x+3=2(x+2)-1]$或换元法[令 $u=x+2$,则 $x=u-2$]即可得 $g(x)=2x-1$.

(2)令 $y=x$,得 $f(0)=f(x)-x(x-1)$,即得 $f(x)=x^2-x+1$.

(3)$f[f(x)]=\frac{1}{\frac{1}{x+1}+1}$,由内到外,得$\begin{cases}x+1\neq0\\ \frac{1}{x+1}+1\neq0\end{cases}$,即得函数 $f[f(x)]$的定义域为$\{x|x\in R$ 且 $x\neq-1$ 且 $x\neq-2\}$.要避免误解为 $f[f(x)]=\frac{1}{\frac{1}{x+1}+1}=\frac{x+1}{x+2}$,$x+2\neq0$.

(4)函数$f(x+1)$的定义域是$[-2,3)$,其中$[-2,3)$是自变量 x 的范围,从而 $x+1\in[-1,4)$;用$\frac{1}{x}+2$替换 $x+1$,得$\frac{1}{x}+2\in[-1,4)$,即得$f(\frac{1}{x}+2)$的定义域是$(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

【例3】已知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,且满足:$f(2)=1$;$f(xy)=f(x)+f(y)$,又当 $x>y$ 时,$f(x)>f(y)$.(1)求 $f(1)$,$f(4)$的值;(2)如果 $f(x)+f(x-3)\leqslant2$,求 x 的范围.

分析:(1)令 $x=1,y=2$,得 $f(2)=f(1)+f(2)$,得 $f(1)=0$;令 $x=y=2$,得 $f(4)=f(2)+f(2)=2$.

(2)定义域$\begin{cases}x>0\\ x-3>0\end{cases}$,又 $f[x(x-3)]\leqslant f(4)$.而由当 $x>y$ 时,$f(x)>f(y)$可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为

增函数,得$\begin{cases}x>0\\x-3>0\\x(x-3)\leqslant 4\end{cases}$,即 $x\in(3,4]$.

评析:对于抽象函数,应大胆赋予变量的值.

【例4】若函数 $y=\sqrt{ax^2-ax+\frac{1}{a}}$ 的定义域为 R,求实数 a 的取值范围.

分析:由题意可得 $ax^2-ax+\frac{1}{a}\geqslant 0$ 的解集为 R,等价于$\begin{cases}a>0\\\triangle=a^2-4\leqslant 0\end{cases}$,即 $a\in(0,2]$.

【例5】已知 $f(x)=x^2+4x+3$, $x\in R$,函数 $g(t)$ 表示 $f(x)$ 在 $[t,t+2]$ 上的最大值,求 $g(t)$ 的表达式.

分析:首先配方,$f(x)=(x+2)^2-1$,注意讨论对称轴 $x=-2$ 与区间 $[t,t+2]$ 的中点 $x=t+1$ 相对位置关系:$x=-2$ 在 $x=t+1$ 左侧、$x=-2$ 在 $x=t+1$ 右侧,即得 $g(t)=\begin{cases}(t+4)^2-1 & t<-3\\(t+2)^2-1 & t\geqslant -3\end{cases}$.

【例6】在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边上有一动点 P,从点 B 开始,沿折线 $BCDA$ 向点 A 运动,设点 P 移动的距离为 x,$\triangle ABP$ 的面积为 y,求函数 $y=f(x)$ 及其定义域.

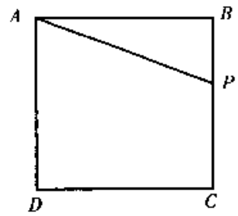

图 1-1

分析:注意到随着点 P 在线段 BC、CD、DA 上运动,所得的函数解析式不一样,所以必须用分段函数表示. $y=f(x)=\begin{cases}2x & 0<x\leqslant 4\\8 & 4<x\leqslant 8\\24-2x & 8<x<12\end{cases}$

3 月 4 日	离高考还有 125 天
星 期 一	

【考点】函数的值域.

【对策】(1)求函数的值域,一般应先确定函数的定义域.

(2)求函数的值域,主要有如下几种常用方法:

①配方法.主要适用于二次函数或可化为二次函数的函数,注意自变量的范围.

②不等式法.利用均值不等式求值域,要注意等号成立的条件.

③函数性质.如单调性、有界性等.

④判别式法.主要适用于可化为二次方程的函数.要注意二次项系数不为零;求出值域后,要检验端点处的值在定义域内是否有相应的 x 值.

⑤反函数法.若函数的反函数存在,则可通过求反函数的定义域,得到原函数的值域.

⑥换元法.一定要注意新变量的取值范围.

⑦数形结合法.主要涉及函数的图像和方程的曲线.

【范例】(特别提醒:先遮住每题的分析,后尝试解答,再对照分析,效果最佳!)

【例1】选择题

(1)值域是 $(0,+\infty)$ 的函数是　　(　　)

A. $y=\frac{1}{5^{-x}+1}$　　B. $y=(\frac{1}{3})^{1-x}$

C. $y=\sqrt{(\frac{1}{2})^x-1}$　　D. $y=\sqrt{1-2^x}$

(2)函数 $y=x^2-2x+3$ 在闭区间 $[0,m]$ 上的值域是 $[2,3]$,则 m 的取值范围是　　(　　)

A. $[1,+\infty)$　　B. $[0,2]$

C. $(-\infty,2]$　　D. $[1,2]$

(3)若 $x^2+y^2=1$,则 $3x-4y$ 的最大值为　　(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

(4)若 $f(x)$, $g(x)$ 都是奇函数,且 $F(x)=f(x)+g(x)+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最大值 8,则在 $(-\infty,0)$ 上有　　(　　)

A. 最小值 -8　　B. 最大值 -8

C. 最小值 -6　　D. 最小值 -4

分析:(1)A. $5^{-x}>0$,得 $0<y<1$;B. $y>0$;C. $y\geqslant 0$;D. $0\leqslant y<1$,所以选 B.

(2)配方 $y=(x-1)^2+2$,结合二次函数的图像,注意到顶点的纵坐标为 2,因此 $m\geqslant 1$;注意到 $x=0$ 时,$y=3$,因此 $m\leqslant 2$,选 D.

(3)令 $3x-4y=b$,问题转化为:当直线 $3x-4y=b$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有交点时,求 b 的取值范围.利用图像,即得选 C.

(4)令 $x<0$,则 $-x>0$,$F(-x)=f(-x)+g(-x)+2\leqslant 8$,即 $f(-x)+g(-x)\leqslant 6$,又 $f(x)$, $g(x)$ 都是奇函数,所以 $f(x)+g(x)\geqslant -6$,$F(x)=$

$f(x)+g(x)+2\geqslant -4$,即得选 D.

【例2】填空题

(1)函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 的值域是_____________.

(2)已知 $0<t\leqslant\dfrac{1}{4}$,则 $\dfrac{1}{t}-t$ 的最小值是______.

(3)已知 $a,b\in R$ 且 $a^2+\dfrac{b^2}{2}=1$,则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值为_____________.

(4)α、β 是方程 $x^2-2mx+3m+4=0$ 的两实根,则 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是______.

分析:(1)注意到 $x^2\geqslant 0$,因此解出 x^2,得 $x^2=\dfrac{-y}{y-1}\geqslant 0$,即得函数的值域为 $[0,1)$.

评析:若已知自变量的范围,又能较容易地解出 x,就应当采用这种方法.

(2)注意到 $f(t)=\dfrac{1}{t}-t$ 在 $0<t\leqslant\dfrac{1}{4}$ 上是减函数,即得 $(\dfrac{1}{t}-t)$ 的最小值为 $\dfrac{15}{4}$.

评析:利用函数的单调性、有界性等性质解决值域、最值问题,是一种重要方法.

(3)首先,$a\sqrt{1+b^2}\leqslant\sqrt{a^2(1+b^2)}$,注意到待求式中含有两个变量,消去一个变量【消元法】.$b^2=2(1-a^2)$,$\sqrt{a^2(1+b^2)}=\sqrt{a^2(3-2a^2)}$,下面用均值不等式或配方法均可得到 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

(4)注意到二次方程有实根,$\triangle\geqslant 0$,得 $m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant -1$,又利用韦达定理,$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=4(m-\dfrac{5}{4})^2-\dfrac{49}{4}$,即得 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值为 8.

【例3】已知函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+6(x\in R)$.

(1)若函数的值域为 $[0,+\infty)$,求 a 的值;

(2)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求函数 $g(a)=2-a|a+3|$ 的值域.

分析:(1)配方 $f(x)=(x-2a)^2-4a^2+2a+6$,得 $-4a^2+2a+6=0$,即 $a=-1$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$;

(2)$f(x)=(x-2a)^2-4a^2+2a+6\geqslant 0$ 恒成立,意味着 $f(x)$ 的最小值 $-4a^2+2a+6\geqslant 0$ 成立,即得 $-1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}$,而 $g(a)=2-a|a+3|=2-a(a+3)=-(a+\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{17}{4}$,得 $g(a)$ 的值域为 $[-\dfrac{19}{4},4]$.

【例4】求下列函数的值域:

(1)$y=\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$; (2)$y=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

分析:(1)法一:注意到 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,而 $\sin x=\dfrac{2-2y}{y+1}\in[-1,1]$,得 $y\in[\dfrac{1}{3},3]$;

法二:注意到 $y=-1+\dfrac{4}{2+\sin x}$,而 $2+\sin x\in[1,3]$,即得 $y\in[\dfrac{1}{3},3]$.

(2)法一:利用万能公式,令 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,得 $y=\dfrac{2t}{3t^2+1}$,再用判别式法,即得 $y\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$;

法二:原式可看成点 $A(2,0)$ 到点 $P(\cos x,-\sin x)$ 的斜率,而点 P 的轨迹是圆 $x^2+y^2=1$,利用图像即得 $y\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$.

【例5】(1)求 $y=x-\sqrt{1-x^2}$ 的值域;(2)求 $y=2x-3+\sqrt{13-4x}$ 的值域.

分析:这两题都是需要利用"换元法"的题型.

(1)注意到 $-1\leqslant x\leqslant 1$,令 $x=\cos\alpha$,$\alpha\in[0,\pi]$,$y=\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$,即得 $y\in[-1,\sqrt{2}]$.

(2)令 $t=\sqrt{13-4x}$,$t\geqslant 0$,$x=\dfrac{13-t^2}{4}$,得 $y=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+4$,所以 $y\in[-\infty,4]$.

评析:在换元时,要注意新变量的取值范围.

【例6】已知定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=\log_3\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的值域为 $[0,2]$,求实数 m、n 的值.

分析:令 $u=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$,$f(x)$ 的值域为 $[0,2]$ 意味着 $u\in[1,9]$;而 $u=\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2-1}$ 是可以变形为一元二次方程的,因此利用判别式法即可求解,$m=n=5$.

【例7】设 $x>0,y\geqslant 0$,且 $x+2y=\dfrac{1}{2}$,求 x、y 为何值时,$u=\log_{0.75}(8xy-4y^2+0.55)$ 取得最大值和最小值,并求出最大值和最小值.

分析:注意到 $u=\log_{0.75}(8xy-4y^2+0.55)$ 中含有两个自变量,因此应该消元,$x=\dfrac{1}{2}-2y\geqslant 0$,得 $0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{4}$,$u=\log_{0.75}(-20y^2+4y+0.55)$,配方即得 $u\in[1,+\infty)$.

评析:消元也应注意变量的取值范围的改变.

【考点】函数的奇偶性与周期性.

【对策】(1)函数的定义域在数轴上所对应的区间关于原点对称,是函数具有奇偶性的必要条件.

(2)奇函数的图像关于原点对称,反之成立;偶函数的图像关于 y 轴对称,反之成立.

(3)若一个函数具有周期性,它的图像平移 T 个单位后,所得图像与原图像重合.周期函数的定义域必须是无限的.如 $f(x)=\cos x$,$x\in[-2\pi,2\pi]$就不具有周期性,因为 $f(2\pi)=1$,而 $f(2\pi+2\pi)$没有意义.

【范例】(特别提醒:先遮住每题的分析,后尝试解答,再对照分析,效果最佳!)

【例1】选择题

(1)由函数 $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[2n,2n+1]\\ 1 & x\in[2n+1,2n+2)\end{cases}(n\in Z)$ 的图像,可知此函数的周期为 ( )

A. $\frac{k}{2}$　B. $\frac{3k}{2}$

C. k　D. $2k$(以上 $k\in Z,k\neq 0$)

(2)已知函数 $F(x)=\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)f(x)(x\neq 0)$是偶函数,且 $f(x)$不恒等于零,则 $f(x)$是 ( )

A.奇函数

B.偶函数

C.既是奇函数又是偶函数

D.非奇非偶函数

(3)对于定义在 R 上的任何奇函数,下列结论不正确的是 ( )

A. $f(x)+f(-x)=0$

B. $f(x)-f(-x)=2f(x)$

C. $f(x)f(-x)\leqslant 0$

D. $\frac{f(x)}{f(-x)}=-1$

(4)若 $y=f(x)(x\in R)$是奇函数,则下列坐标表示的点一定在 $y=f(x)$图像上的是 ( )

A. $(a,-f(a))$　B. $(-a,-f(a))$

C. $(-a,-f(-a))$　D. $(a,f(-a))$

分析:(1)选 D.

(2)令 $g(x)=1+\frac{2}{2^x-1}$,注意到 $g(-x)=-g(x)$,而 $F(-x)=F(x)$,所以 $f(-x)=-f(x)$,选 A.

(3)当 $x=0$ 时,$f(-x)=0$,等式 $\frac{f(x)}{f(-x)}=-1$ 不成立,选 D.

(4)选 B.

【例2】填空题

(1)已知 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数,且其定义域为 $[a-1,2a]$,则 $a=$ ______,$b=$ ______.

(2) $f(x)$是定义在 R 上的奇函数,$f(3)=2$,且对一切实数 x 均有 $f(x+4)=f(x)$,则 $f(25)=$ ______.

(3)已知奇函数 $f(x)$,当 $x\in(0,1)$时,$f(x)=\lg\frac{1}{x+1}$,则当 $x\in(-1,1)$时,$f(x)$的表达式是 ______.

(4)已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$在 $x\in[0,+\infty]$上为增函数,且 $f(\frac{1}{3})=0$,则满足 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的 x 的取值范围是 ______.

分析:(1)偶函数的定义域必须关于原点对称,即 $(a-1)+2a=0$,$a=\frac{1}{3}$;又根据偶函数定义,$f(-x)=f(x)$,即得 $b=0$.

(2) $f(25)=f(1)$,而 $f(3)=f(-1)=2$,即 $f(1)=-2$,所以 $f(25)=-2$.

(3)注意到 $x=0\in(-1,1)$,所以 $f(0)=0$;令 $x\in(-1,0)$,则 $-x\in(0,1)$,$f(-x)=\lg\frac{1}{-x+1}=-\lg(1-x)$,而 $f(-x)=-f(x)$,所以即得 $x\in(-1,0)$时,$f(x)=\lg(1-x)$;得 $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \lg(1-x) & x\in(-1,0)\\ \lg\frac{1}{x+1} & x\in(0,1)\end{cases}$

(4)注意到 $f(x)=f(|x|)$,$f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 等价于 $f(|\log_{\frac{1}{8}}x|)>f(\frac{1}{3})$,即 $|\log_{\frac{1}{8}}x|>\frac{1}{3}$,得 $x\in(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$.

【例3】设 $f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,又 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$,求 $f(x)$与 $g(x)$.

分析:由已知可得 $\begin{cases}f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}\\ f(x)-g(x)=-\frac{1}{x+1}\end{cases}$,解方

程组可得 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

评析：任意一个定义在关于原点对称的区间上的函数，总可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

【例4】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，$(x\in R,y\in R)$ 且 $f(0)\neq 0$. 试证 $f(x)$ 是偶函数.

分析：令 $x=y=0$，得 $f(0)+f(0)=2f(0)f(0)$，又 $f(0)\neq 0$，得 $f(0)=1$；

令 $x=0$，得 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$，所以 $f(-y)=f(y)$，即 $f(x)$ 是偶函数.

【例5】已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$ $(a\neq 0)$. 求证：$f(x)$ 是周期函数，并求出 $f(x)$ 的一个周期.

分析：由 $f(a-x)=f(a+x)$ 得 $f(2a-x)=f(x)$，用 $-x$ 替换 x，得 $f(2a+x)=f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，$f(x)$ 的一个周期是 $2a$.

评析：若一个函数的图像有两条垂直于 x 轴的对称轴，则这个函数必定是周期函数. 即若 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)(a\neq b)$，则 $f(x)$ 的一个周期是 $|2b-2a|$.

【例6】用定义判断函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x\in(0,+\infty)\\ x^2-1 & x\in(-\infty,0)\end{cases}$ 的奇偶性.

分析：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=-x^2+1$，而 $-x\in(-\infty,0)$，$f(-x)=x^2-1$，所以 $f(-x)=-f(x)$；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=x^2-1$，而 $-x\in(0,+\infty)$，$f(-x)=-x^2+1$，所以 $f(-x)=-f(x)$；得 $f(x)$ 是奇函数.

3 月 6 日	离高考还有 123 天
星 期 三	

【考点】函数的单调性.

【对策】(1)求函数的单调区间，首先要确定函数的定义域，单调区间必须是函数定义域的子集. 确定函数的单调区间时，除熟练掌握基本函数的性质外，还要熟悉复合函数的单调性：若 $f(x)$ 的定义域包含 $g(x)$ 的值域，则在 $g(x)$ 的一个区间子集上，当 $f(x)$、$g(x)$ 的单调性相同时，$f[g(x)]$ 是增函数；当 $f(x)$、$g(x)$ 的单调性相反时，$f[g(x)]$ 是减函数.

(2)利用单调性的定义判定函数在指定区间上的单调性，是一种重要方法. 这类问题的解决首先要有熟练的运算变形技能，其次要有较好的逻辑推理能力，要把运算、推理、判断集于一体.

(3)$f(x)$ 在区间 D_1、D_2 上具有相同的单调性，但 $f(x)$ 在区间 $D_1\cup D_2$ 上不一定具有单调性. 如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 及 $(-\infty,0)$ 上是减函数，但 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不具有单调性.

(4)互为反函数的两函数有相同的单调性；若一个函数在区间 D 上具有单调性，则这个函数存在反函数.

(5)当 $f(x)$ 为奇函数时，它在 $[a,b]$ 和 $[-b,-a](0<a<b)$ 上有相同的单调性；当 $f(x)$ 为偶函数时，它在 $[a,b]$ 和 $[-b,-a](0<a<b)$ 上有相反的单调性.

【范例】(特别提醒：先遮住每题的分析，后尝试解答，再对照分析，效果最佳！)

【例1】选择题

(1)函数 $y=\log_a|x+1|$ 在 $(-1,0)$ 上是单调递增，则 y 在 $(-\infty,-1)$ 上是　　(　　)

A. 由负到正单调递增　B. 由正到负单调递减

C. 单调递减且恒为正数　D. 时增时减

(2)已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调且 $f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内　　(　　)

A. 至少有一实根　B. 至多有一实根

C. 没有实根　D. 必有惟一的实根

(3)设 $f(x)$ 是定义在 R 上的一个增函数，$F(x)=f(x)-f(-x)$，那么 $F^{-1}(x)$ 必为　　(　　)

A. 增函数且是奇函数　B. 增函数且是偶函数

C. 减函数且是奇函数　D. 减函数且是偶函数

(4)函数 $f(x)=|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)|$ 的单调递减区间是　　(　　)

A. $(0,2]$　B. $(1,2]$　C. $(-1,0]$　D. $(1,+\infty)$

分析：(1)借助函数的图像即得，选 B.

评析：函数 $y=\log_a x$ 的渐近线是 $x=0$；函数 $y=\log_a|x+a|$ 关于直线 $x=-a$ 对称.

(2)选 B.

(3)选 A.

评析:函数 $F(x)$与它的反函数 $F^{-1}(x)$具有相同的单调性;若函数 $F(x)$是奇函数,则它的反函数 $F^{-1}(x)$也是奇函数.

(4)定义域为$(1,+\infty)$,排除 A、C;借助函数图像,即得选 B.

【例2】填空题

(1)函数 $y=(4+3x-x^2)^{-0.5}$是减函数的区间是________.

(2)函数 $f(x)=(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 的单调增区间是______.

(3)函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$的减区间是________.

(4)①若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间$(-\infty,4]$上是减函数,那么实数 a 的取值范围是________.

②若$(-\infty,4]$是函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的减区间,那么实数 a 的取值是______.

分析:(1)定义域 $4+3x-x^2>0$,即 $-1<x<4$;令 $u=4+3x-x^2=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{25}{4}$,$u$ 在$x\in(-1,\frac{3}{2}]$上是增函数,u 在 $x\in[\frac{3}{2},4)$上是减函数;$y=u^{-0.5}$在 $u\in(0,+\infty)$上是减函数;所以原函数的减区间是 $x\in(-1,\frac{3}{2}]$.

(2)定义域 $x\in(0,+\infty)$;令 $u=\log_{\frac{1}{2}}x$,u 在 $x\in(0,+\infty)$上是减函数;$y=(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ 在 $u\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$上是减函数,在 $u\in[-\frac{1}{2},+\infty)$上是增函数;所以必须 $u\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$,得 $x\in[\sqrt{2},+\infty)$为原函数的增区间.

(3)原函数的减区间是$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$.

评析:注意这两个区间不可取并集.

(4)配方 $f(x)=(x+a-1)^2-(a-1)^2+2$.

①$4\leqslant-(a-1)$,得 $a\in(-\infty,-3]$;②$-(a-1)=4$,得 $a=-3$.

评析:注意两题间的区别与联系.

【例3】判断函数 $f(x)=x^2-2ax+3$ 在$(-2,2)$内的单调性.

分析:$f(x)=(x-a)^2-a^2+3$.(1)当 $a\leqslant-2$ 时,$f(x)$在$(-2,2)$上是增函数;(2)当 $a\geqslant2$ 时,$f(x)$在$(-2,2)$上是减函数;(3)当 $-2<a<2$ 时,$f(x)$在 $x\in(-2,a)$上是减函数,在 $x\in(a,2)$上是增函数.

【例4】已知函数 $y=f(x)$在定义域是$[-1,1]$上是奇函数,又在$[0,1]$上是减函数.

(1)证明:对任意的 x_1、$x_2\in[-1,1]$,有$[f(x_1)+f(x_2)](x_1+x_2)\leqslant0$;

(2)求满足不等式 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$ 的 a 的取值范围.

分析:首先证明函数 $f(x)$在$[-1,1]$上是减函数.

设 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant1$.当 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant1$ 时,$f(x_1)>f(x_2)$;

当 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant0$ 时,$0\leqslant-x_2<-x_1\leqslant1$,$f(-x_2)>f(-x_1)$,得 $f(x_1)>f(x_2)$;

当 $-1\leqslant x_1<0\leqslant x_2\leqslant1$ 时,$f(x_1)>0$,$f(x_2)\leqslant0$,所以 $f(x_1)>f(x_2)$;综上,函数 $f(x)$在$[-1,1]$上是减函数.

(1)当 $x_1=-x_2$ 时,$[f(x_1)+f(x_2)](x_1+x_2)=0$;当 $x_1<-x_2$ 时,$f(x_1)>f(-x_2)$,即 $f(x_1)+f(x_2)>0$;当 $x_1>-x_2$ 时,$f(x_1)<f(-x_2)$,即 $f(x_1)+f(x_2)<0$;所以原命题成立.

(2)原不等式等价于$\begin{cases}-1\leqslant1-a\leqslant1\\-1\leqslant1-a^2\leqslant1\\1-a>a^2-1\end{cases}$,得 $a\in[0,1)$.

【例5】判断函数 $f(x)=\frac{ax}{x^2-1}(a\neq0)$在区间$(-1,1)$上的单调性.

分析:对于较复杂函数的单调性,用单调性的定义判断是一种有效的方法.

设 $-1<x_1<x_2<1$,$f(x_1)-f(x_2)=\frac{ax_1}{x_1^2-1}-\frac{ax_2}{x_2^2-1}=\frac{a(x_2-x_1)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$,由 $|x_1|<1$,$|x_2|<1$,得 $|x_1x_2|<1$,即 $1+x_1x_2>0$,$x_2-x_1>0$,$x_1^2-1<0$,$x_2^2-1<0$.

当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$在区间$(-1,1)$上是减函数;当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$在区间$(-1,1)$上是增函数.

【例6】已知函数 $f(x)=\log_a\frac{1-kx}{x-1}(a>1)$是奇函数.

(1)求 k 的值,并求函数 $f(x)$的定义域;

(2)判断 $f(x)$在$(1,+\infty)$上的单调性,并给予证明.

分析:(1)由 $f(-x)=-f(x)$得 $\log_a\frac{1+kx}{-x-1}=-\log_a\frac{1-kx}{x-1}$,得 $k^2x^2=x^2$,当 $x=0$ 时,函数无意义,所以 $k=\pm1$.但 $k=1$ 时,$f(x)$无意义,所以 $k=-1$.函数 $f(x)$的定义域为 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2)利用定义即可证明,$f(x)$在$(1,+\infty)$上是减函数.

【考点】二次函数与一元二次方程.

【对策】二次函数、一元二次方程和一元二次不等式是密切相关的，要深刻理解它们之间的关系.

(1)二次函数的三种表达形式：①一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$；②顶点式：$y=a(x-x_0)^2+y_0$，其中(x_0,y_0)为抛物线的顶点；③零点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中x_1、x_2是抛物线与x轴的两交点的横坐标.

(2)研究二次函数的性质，一般借助图像，图像应较精确地体现出抛物线的开口方向($a>0$或$a<0$)、对称轴$x=-\dfrac{b}{2a}$、抛物线与x轴的交点情况.

注意：给定函数$y=ax^2+bx+c$，而未指明a是否为0，应考虑$a=0$的情况.

(3)一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$在区间$[m,n](m<n)$上的实根分布，主要有三种方法：

①利用二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像，一般按顺序研究：开口方向($a>0$、$a=0$、$a<0$)→判别式$\Delta=b^2-4ac(>0、=0、<0)$→对称轴$x=-\dfrac{b}{2a}$(在区间的左侧、在区间的右侧、在区间的内部)→区间端点的函数值(>0、$=0$、<0).

②直接利用求根公式求出方程的两根，根据条件列出并解无理不等式，也可得解.

③根据方程特点，分离参数，从而转化为两条曲线的交点问题或转化为函数的值域问题，往往使得问题简化.

【范例】(特别提醒：先遮住每题的分析，后尝试解答，再对照分析，效果最佳！)

【例1】选择题

(1)函数$y=f(x)$满足$f(3+x)=f(3-x)$，且$f(x)=0$有两个实根x_1、x_2，则$x_1+x_2=$(　　)

A.0　　B.3　　C.6　　D.不能确定

(2)若函数$f(x)$与函数$y=(x-1)^2-1(x\leqslant0)$互为反函数，则$f(x)$为(　　)

A.$f(x)=1+\sqrt{x+1}(x\geqslant-1)$

B.$f(x)=1-\sqrt{x+1}(x\geqslant0)$

C.$f(x)=1-\sqrt{x+1}(x\geqslant-1)$

D.$f(x)=1-\sqrt{x+1}(x\leqslant0)$

(3)已知函数$f(x)=\log_a(x^2-ax+3)(a>0$且$a\neq1)$满足：对任意实数$x_1$、$x_2$，当$x_1<x_2\leqslant\dfrac{a}{2}$时，总有$f(x_1)-f(x_2)>0$，那么$a$的取值范围是(　　)

A.$(0,3)$　B.$(1,3)$　C.$(0,2\sqrt{3})$　D.$(1,2\sqrt{3})$

(4)已知$y=f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x\geqslant0$时，$f(x)=x^2-2x$，则$f(x)$在R上的解析式是(　　)

A.$y=x(x-2)$　　B.$y=x(|x|-2)$

C.$y=|x|(x-2)$　　D.$y=|x|(|x|-2)$

分析：(1)由已知可得$f(x)$的图像关于直线$x=3$对称，选C.

(2)函数$y=(x-1)^2-1(x\leqslant0)$的值域为$y\geqslant0$，即反函数的定义域为$x\geqslant0$；选B.

(3)令$u=x^2-ax+3$，$y=\log_a u$，u在$x\in(-\infty,\dfrac{a}{2}]$上是减函数，而由已知可得$y$在$u\in(0,+\infty)$上是增函数，所以$a>1$；由$u>0$恒成立，得$\Delta=a^2-12<0$，选D.

(4)当$x\geqslant0$时，$f(x)=x^2-2x=x(x-2)$；

设$x<0$，则$-x>0$，$f(-x)=x^2+2x$，而$f(-x)=-f(x)$，得$f(x)=-x^2-2x=x(-x-2)$，选B.

评析：如果分段函数是奇函数或偶函数，可考虑用绝对值符号来简化函数的表达式.

【例2】填空题

(1)“$-4<k<0$”是“函数$y=kx^2-kx-1$的值恒为负值”的________条件.

(2)若a、b、c成等比数列，则函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴有______个公共点.

(3)已知$f(x)=x^2-3kx+3k-\log_{\frac{1}{2}}m(k、m\in R)$，不论$k$取什么实数，$f(x)$的图像与$x$轴总有两个不同的交点，则$m$的取值范围是______.

(4)方程$x^2+2ax+2a+3=0$在区间$(0,2)$内有两实根，则a的取值范围________.

分析：(1)注意到$k=0$时，函数$y=-1<0$恒成立；$\begin{cases}k<0\\ \Delta=k^2+4k<0\end{cases}$，得$-4<k<0$.因此应填“充分非必要”.

(2) $b^2=ac$，$\Delta=b^2-4ac=-3b^2$，由等比数列中，$b\neq0$，所以 $\Delta>0$.即函数图像与 x 轴有两个不同的公共点.

(3) $\Delta=9k^2-12k+4\log_{\frac{1}{2}}m>0$ 恒成立，即 Δ 的最小值 $-4+4\log_{\frac{1}{2}}m>0$，得 m 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2})$.

(4) 法一：$\begin{cases}\Delta=4a^2-8a-12\geq0\\ \text{对称轴 } x=-a\in(0,2)\\ f(0)=2a+3>0\\ f(2)=4+4a+2a+3>0\end{cases}$，

得 $-\frac{7}{6}<a\leq-1$.

法二：注意到 $x\neq0$，分离参数得 $-2a=\frac{x^2+3}{x+1}$，令 $t=x+1$，$t\in(1,3)$，$-2a=t+\frac{4}{t}-2$，借助函数 $y=t+\frac{4}{t}-2$ 与 $y=-2a$ 的图像，即得 $-\frac{7}{6}<a\leq-1$.

【例3】设函数 $f(x)=ax^2-2x+2$（a 为常数）对于满足 $1\leq x\leq4$ 的一切 x 值都有 $f(x)>0$，求 a 的取值范围.

分析：【恒成立问题即为最值问题】问题转化为函数 $f(x)$ 在 $x\in[1,4]$ 上的最小值大于零.分 $a<0$、$a>0$ 进行讨论；对于 $a>0$ 的情况又分为 $\frac{1}{a}<1$、$\frac{1}{a}>4$、$1\leq\frac{1}{a}\leq4$ 三种情况进行讨论，即得

$$f(x)|_{\min}=\begin{cases}f(4)=4a-6 & a<\frac{1}{4}\\ f(1)=a & a>1\\ -\frac{1}{a}+2 & \frac{1}{4}\leq a\leq1\end{cases},$$

所以 $a\in(\frac{1}{2},+\infty)$.

【例4】已知函数 $y=mx^2+(m-3)x+1$ 的图像与 x 轴的交点至少有一个在原点的右侧，求 m 的取值范围.

分析：原命题转化为方程 $mx^2+(m-3)x+1=0$ 至少有一个正根，此题只需把方程的根求出来，其中较大的根大于零，即可得解.

$m=0$ 时，方程的根为 $x=\frac{1}{3}$，满足题意.

$m\neq0$ 时，首先 $\triangle=(m-3)^2-4m\geq0$，得 $m\geq9$ 或 $m\leq1$；

当 $m\in(0,1]\cup[9,+\infty)$ 时，$x=\frac{-(m-3)+\sqrt{\triangle}}{2m}>0$，得 $m\in(0,1]$；

当 $m\in(-\infty,0)$ 时，$x=\frac{-(m-3)-\sqrt{\triangle}}{2m}>0$，得 $m\in(-\infty,0)$；综上 $m\in(-\infty,1]$.

【例5】设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图像在 y 轴上的截距为1，在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

分析：应用待定系数法求解.

设 $f(x)=a(x+2)^2+b=ax^2+4ax+4a+b$，得 $4a+b=1$，$2\sqrt{\frac{-b}{a}}=2\sqrt{2}$，联立即得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-1\end{cases}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$ 为所求.

【例6】已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+2ax+4)$.(1)若 $f(x)$ 的定义域是 R，求实数 m 的取值范围；(2)若 $f(x)$ 的值域是 R，求实数 m 的取值范围.

分析：令 $u=x^2+2ax+4=(x+a)^2-a^2+4$.

(1) $f(x)$ 的定义域是 R 等价于 $u>0$ 恒成立，即 $-a^2+4>0$，得 $a\in(-2,2)$.

(2) $u=x^2+2ax+4=(x+a)^2-a^2+4$，$y=\log_2u\in R$，意味着 u 能取到 $(0,+\infty)$ 上的所有值，借助二次函数的图像可知 $-a^2+4\leq0$，得 $a\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

9 月 8 日	离高考还有 121 天
星 期 五	

【考点】幂式、指数式与对数式.

【对策】高考中考查函数，往往以指数函数、对数函数为重点，而指数函数、对数函数的基础就是幂式、指数式、对数式.

(1) 幂的运算法则：$a^ma^n=a^{m+n}$；$a^m\div a^n=a^{m-n}$；$(a^m)^n=a^{mn}$；$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$；$(ab)^m=a^mb^m$.（$a>0,b>0,m、n\in R$）

(2) 对数的运算法则及对数恒等式：

$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$；$\log_a\frac{M}{N}=\log_aM$