高等数学的 解题方法和技巧 ③

GAODENG SHUXUE DE JIETI FANGFA HE JIQIAO

游兆永 编著

陕西科学技术出版社

高等数学的解题方法和技巧
游兆永　编著
（三）
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行　汉中地区印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张8　字数166,000
1985年9月第1版　1985年9月第1次印刷
印数1—21,330
统一书号：7202·93　定价：1.45元

前　言

求解一个数学问题，要用到若干有关的数学概念、定理、公式。但是怎样运用这些概念、定理和公式来解题，却有许多方法和技巧，尤其是有些高等数学问题要用很巧妙的方法或很高的技巧才能解决。因此，要学好高等数学就必须掌握一定的解题方法和技巧，为此作者根据自己多年积累的资料，编写成《高等数学的解题方法和技巧》一书，通过解算例题介绍了微积分和线性代数方面的技巧，数值近似计算与数据处理的方法和技巧，工程问题近似方法的技巧，数学各分支的方法和技巧举例等。拟分册陆续出版。

本书系第三分册，主要讲述利用函数、矩阵以及其它数学元素的各种基本性质来解题的方法和技巧，所涉及的性质有：对称性，周期性，循环性，线性，单调性，保序性，连续性，共轭性，对偶性，相似性等。各段选有典型习题，并附有答案、略解或提示。本书可供理工科大学及有关电视、业余、函授等高等院校师生学习，也可供科技人员及有志于自学高等数学的知识青年参考。

目　录

第四章 利用单调性与保序性的解题方法和技巧

第五章 利用连续性的解题方法和技巧

第六章 共轭、对合、对偶概念及其应用

第七章 相似、同构、同伦概念及其应用

第八章 扩大解题方法的使用范围

第一章　利用对称性的解题方法和技巧

§1　对称多项式与对称函数

设有一个含n个变量$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$的多项式，当对换其任意两个变量时该多项式不变，则称为n元对称多项式，或简称为对称多项式。

例1　$x_1^2+x_2^2+x_3^2+5x_1+5x_2+5x_3-7$是三元($x_1$, x_2, x_3）对称多项式。事实上这里的变量对换有三种情形，即x_1与x_2对换，这时原式变为

$$x_2^2+x_1^2+x_3^2+5x_2+5x_1+5x_3-7 \tag{1}$$

与原多项式相同。另两种情形：x_1与x_3对换，x_2与x_3对换，其结果都与原多项式相同。故原多项式是对称多项式。

〔例1完〕

注　如果多项式有4个变量，则变量对换情形有$C_4^2=\frac{4\times3}{1\times2}=6$种，要求对这6种变量对换，原多项式都不变，才能称为对称多项式。一般情形，n个变量时变量对换有$C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$种。

设n元函数$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$当对换其任意两个变量

时该函数不变，则称为n元对称函数。前述的n元对称多项式是n元对称函数的特殊情形。又以下的讨论常把“n元”的字样略去，当然，这必须以不致混淆为前提。以例1的多项式为例，这个多项式对三个变量x_1，x_2，x_3来说是对称多项式，但如对四个变量x_1，x_2，x_3，x_4来说，当变量x_1与x_4对换时原多项式变为

$$x_4^2+x_2^2+x_3^2+5x_4+5x_2+5x_3-7$$

就和原多项式不相同了，因而不算四元对称多项式。

例2 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$和$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n$都是n元$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的对称函数。又

$$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_3} \qquad (2)$$

是三元对称函数。〔例2完〕

对称函数的项数往往是很多的，当变量数较多时尤其如此，故以下采用记号$\sum$来简化对称函数的表示式。

以$\sum\frac{x_2}{x_1}$为例，考虑三个变量x_1，x_2，x_3的情形，这时有三个对换（x_1与x_2，x_1与x_3，x_2与x_3）。从$\frac{x_2}{x_1}$出发进行三个对换，便产生了一些新的项，其中x_1与x_2对换产生$\frac{x_1}{x_2}$，x_1与x_3对换产生$\frac{x_2}{x_3}$，x_2与x_3对换产生$\frac{x_3}{x_1}$。再对新产生的项$\frac{x_1}{x_2}$，$\frac{x_2}{x_3}$，$\frac{x_3}{x_1}$进行变量对换，又产生新的项$\frac{x_3}{x_2}$，$\frac{x_1}{x_3}$。以上共有六项，这

时再进行变量对换就不再产生新的项。也就是说，从$\frac{x_2}{x_1}$出发经过若干次变量对换而达到"饱和"状态，我们打算采用的记法就是把上述所得的全部项（包括原始的项$\frac{x_2}{x_1}$)的总和(2)记为$\sum\frac{x_2}{x_1}$，即

$$\sum\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_3}$$

例3 $\sum x_1^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

$$\sum x_1x_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots\cdots+x_1x_n$$
$$+x_2x_3+x_2x_4+\cdots\cdots+x_2x_n$$
$$+x_3x_4+\cdots\cdots+x_3x_n+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n$$
$$\sum\sin x_1=\sin x_1+\sin x_2+\cdots\cdots+\sin x_n$$

以上都是n元对称函数或对称多项式。〔例3完〕

例4 在n个变量x_1，x_2，……，x_n中任取k个（k是1，2，……，n中的某一正整数）连乘起来作为一项，把这样的项（共$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$项）求和，所得的结果可以表示为$\sum x_1x_2\cdots x_k$，称为初等对称多项式，并简记作$c_k$。〔例4完〕

常用的对称多项式除初等对称多项式$c_k(k=1,2,\cdots\cdots,n)$外，还有同次幂和式

$$s_k=\sum x_1^k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k \qquad (3)$$

其中k是任意正整数。

记号$\sum a$，当a为常数或与变量x_1，……，x_n无关的其它变量，则认为

$$\sum a = a + a + \cdots + a \quad (n项)$$
$$= na$$

于是$\sum 1 = n$（在n个变量的情形），按照这种约定，便可把（3）式的k扩充到$k=0$，即

$$s_0 = \sum x_1^0 = \sum 1 = n$$

采用$\sum$的记法，可把例1的三元对称多项式简记为

$$\sum x_1^2 + 5\sum x_1 - 7 或 \sum (x_1^2 + 5x_1 - \frac{7}{3})$$

下面讨论同次幂和式s_k与初等对称多项式c_k的关系。容易直接验算

$$s_1 = \sum x_1 = c_1$$
$$\begin{aligned} s_2 = \sum x_1^2 &= (x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n)^2 \\ &\quad - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots\cdots + x_{n-1}x_n) \\ &= c_1^2 - 2c_2 \end{aligned}$$

但对$k \geqslant 3$时的s_k就比较复杂。

关于s_k有如下的递推关系式，其中分为两种情形：

1）对于$1 \leqslant k \leqslant n$，有

$$s_k = c_1 s_{k-1} - c_2 s_{k-2} + \cdots\cdots + (-1)^k c_{k-1} s_1 + (-1)^{k+1} k c_k \quad (4)$$

2）对于$k \geqslant n$，有

$$s_k = c_1 s_{k-1} - c_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^n c_{n-1} s_{k-n+1} + (-1)^{n+1} c_n s_{k-n} \quad (5)$$

在上面两个公式中，当$k=n$时两个公式是一致的，事实上，当$k=n$时$s_{k-n} = s_0 = n = k$。

下面证明公式（5），研究n次多项式

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots\cdots(x - x_n) \quad (6)$$

显然，多项式方程

$$P(x)=0 \tag{7}$$

有n个根x_1，x_2，……，x_n。由根与系数的关系知多项式$P(x)$的展开式为

$$P(x)=x^n-c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}x+(-1)^nc_n \tag{8}$$

上式左右乘以x^{k-n}（注意现在讨论的$k\geqslant n$）：

$$x^{k-n}P(x)=x^k-c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}x^{k-n+1}+(-1)^nc_nx^{k-n} \tag{9}$$

把x_j（$j=1,2,\cdots,n$）顺次代入上式后求和，由于$P(x_j)=0$，故得

$$s_k-c_1s_{k-1}+c_2s_{k-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}s_{k-n+1}+(-1)^nc_ns_{k-n}=0$$

把上式左边第2项起的全部项移到等号右边，便得证（5）式。

公式（4）的证明比较复杂，从略。下面举例说明(4)式的使用：当$k=1$时（4）式右边只有一项$(-1)^{k+1}kc_k$，即

$$s_1=(-1)^{1+1}1\cdot c_1=c_1$$

当$k=2$时，（4）式右边有两项：

$$s_2=c_1s_1+(-1)^{2+1}2\cdot c_2=c_1s_1-2c_2$$
$$=c_1^2-2c_2$$
$$s_3=c_1s_2-c_2s_1+(-1)^{3+1}3\cdot c_3$$
$$=c_1(c_1^2-2c_2)-c_2\cdot c_1+3c_3$$
$$=c_1^3-3c_1c_2+3c_3$$

$$s_4 = c_1s_3 - c_2s_2 + c_3s_1 - 4c_4$$

$$s_5 = c_1s_4 - c_2s_3 + c_3s_2 - c_4s_1 + 5c_5 \qquad (10)$$

等等，把s_1，s_2，s_3，……用c_1，c_2，c_3，……的表示式代入便得s_4，s_5的表示式。

注 在推导中必须注意k与n的大小，例如当$n=4$时，s_5便不能用（10）式，而应为

$$s_5 = c_1s_4 - c_2s_3 + c_3s_2 - c_4s_1$$

这是用公式（5）得到的，由于$n=4$，故不存在c_5。

练　习

1．在四个变量x_1，x_2，x_3，x_4的情形，试展开和式$\sum x_1^2x_2x_3$〔答：$x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_2^2x_1x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_3x_4 + x_3^2x_1x_2 + x_3^2x_1x_4 + x_3^2x_2x_4 + x_4^2x_1x_2 + x_4^2x_1x_3 + x_4^2x_2x_3$，共12项〕

2．在n个变量x_1，x_2，…，x_n的情形，问对称多项式$\sum x_1^2x_2x_3$的展开式有多少项？〔答：$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$项〕

3．当$n\geqslant 4$时，求s_4用c_j（$j=1,2,3,4$）的表示式〔答：$c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4$〕

4．求方程式$x^7-5=0$的7个根的k次幂和式s_k〔提示：$c_1=c_2=\cdots\cdots=c_6=0$，$c_7=5$，$s_0=7$，$s_1=s_2=\cdots=s_6=0$，$s_k=5s_{k-7}$。答：当k是7的整数倍时，记$k=7m$，则$s_k=s_{7m}=7\cdot5^m$；其余的$s_k$均等于0〕

5．当$n=4$时，试用s_1，s_2，s_3，s_4表示c_1，c_2，c_3，

c_4〔答：$c_1=s_1$，$c_2=\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)$，$c_3=\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)$，$c_4=\frac{1}{24}(s_1^4-6s_1^2s_2+8s_1s_3+3s_2^2-6s_4)$〕

§2 利用对称多项式进行代数计算

利用初等对称多项式$c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$与k次幂和式$s_k(k=1,2,3,\cdots\cdots)$之间的关系可以进行因式分解等代数计算。

例1 因式分解

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$$

解 利用关系式

$$s_3=c_1s_2-c_2s_1+3c_3$$

则原式成为

$$\begin{aligned}&s_3-3c_3\\&=c_1s_2-c_2s_1+3c_3-3c_3\\&=c_1s_2-c_2c_1=c_1(s_2-c_2)\\&=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)\end{aligned}$$

〔解完〕

例2 求作一元二次方程使它的两根分别为$x^2-px+q=0$的两根的4次方，其中p与q为已知

解 设方程 $x^2-px+q=0$的两根为x_1与x_2，仍用记号c_k，s_k，则由根与系数的关系有

$$c_1=x_1+x_2=p$$

$$c_2=x_1\cdot x_2=q$$

所求的一元二次方程的两根分别为

$$x_1^4+x_2^4=s_4$$

$$x_1^4\cdot x_2^4=(x_1\cdot x_2)^4=q^4$$

下面用p，q（即c_1，c_2）来表示s_4，因这时的对称多项式只含二元，故有

$$s_2=c_1s_1-2c_2=p^2-2q$$

$$\begin{aligned}s_3&=c_1s_2-c_2s_1\\&=p(p^2-2q)-qp=p^3-3pq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_4&=c_1s_3-c_2s_2\\&=p(p^3-3pq)-q(p^2-2q)\\&=p^4-4p^2q+2q^2\end{aligned}$$

即得所求的一元二次方程为

$$x^2-(p^4-4p^2q+2q^2)x+q^4=0$$

〔解完〕

注 由于

$$x_1^2+x_2^2=s_2=p^2-2q$$

$$x_1^2\cdot x_2^2=(x_1\cdot x_2)^2=q^2$$

故一元二次方程

$$x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$$

的两根是x_1^2与x_2^2。

重复上述步骤，得一元二次方程

$$x^2-[(p^2-2q)^2-2q^2]x+(q^2)^2=0 \qquad (1)$$

的两根为$(x_1^2)^2$与$(x_2^2)^2$，即x_1^4与x_2^4。因

$$\begin{aligned}&(p^2-2q)^2-2q^2\\&=p^4-4p^2q+4q^2-2q^2\\&=p^4-4p^2q+2q^2\end{aligned}$$

$$(q^2)^2=q^4$$

故方程（1）就是例2所求得的方程。

例3　已知s_1，s_2，s_3，s_4，求对称多项式

$$\sum(x_1+x_2+x_3)^4 \qquad (2)$$

上述对称多项式为四元，即$n=4$。

解　求（2）式用s_1，s_2，s_3，s_4的表示式。

$$\begin{aligned}
&\sum(x_1+x_2+x_3)^4\\
&=\sum(x_2+x_3+x_4)^4\\
&=\sum(s_1-x_1)^4\\
&=\sum(s_1^4-4s_1^3x_1+6s_1^2x_1^2-4s_1x_1^3+x_1^4)\\
&=\sum s_1^4-4s_1^3\sum x_1+6s_1^2\sum x_1^2-4s_1\sum x_1^3+\sum x_1^4\\
&=4s_1^4-4s_1^3\cdot s_1+6s_1^2\cdot s_2-4s_1\cdot s_3+s_4\\
&=6s_1^2s_2-4s_1s_3+s_4
\end{aligned}$$

〔解完〕

注　有关对称多项式的问题，其结果常可取

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=1 \qquad (3)$$

代入来校验。在例3中，由于$n=4$，故

$$\sum(x_1+x_2+x_3)^4=\sum 3^4$$
$$=4\cdot 3^4=324$$

又这时$s_1=s_2=s_3=s_4=4$，故

$$6s_1^2s_2-4s_1s_3+s_4$$
$$=6\cdot 4^3-4\cdot 4^2+4=324$$

两者相等，即校验通过。注意这一校验（取变量的特殊值）仅为必要条件而非充分条件。如果校验通不过，则必有错误。

练　　习

1．求作一元二次方程使它的两根分别为方程$x^2-px+q=0$的两根的立方，其中p与q为已知〔答：$x^2-(p^3-3pq)x$

$+q^3=0$〕

2．求作一元三次方程使它的三根分别为方程$x^3-px^2+qx-r=0$的三根的平方，其中p，q与r为已知〔答：$x^3-(p^2-2q)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0$，其中用到$s_4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr$，以及

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$$

$$=\frac{1}{2}\left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2-(x_1^4+x_2^4+x_3^4)\right)$$

$$=q^2-2pr〕$$

3．试用c_k与s_k（$k=1, 2, \cdots, n$）表示对称函数

$$\sum\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n} \qquad (4)$$

并由此证明

$$s_{n-1}-c_1s_{n-2}+\cdots+(-1)^{n-2}c_{n-2}s_1+(-1)^{n-1}(n-1)c_{n-1}=0$$

（即§1的（4）式当$k=n-1$的情形）成立〔提示：直接把（4）式通分，便得$\sum\frac{1}{x_1}=\frac{c_{n-1}}{c_n}$，即有

$$(-1)^{n-1}c_{n-1}+(-1)^nc_n\cdot\sum\frac{1}{x_1}=0 \qquad (5)$$

再把§1的（8）式乘以$\frac{1}{x}$，然后用x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）顺次代入并求和，可得

$$s_{n-1}-c_1s_{n-2}+c_2s_{n-3}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}nc_{n-1}+(-1)^nc_n\cdot\sum\frac{1}{x_1}=0$$

将上式与（5）相减，便得证〕

4．试用 $x+\frac{1}{x}$ 表示 $x^k+\frac{1}{x^k}$（$k=2，3，4，\cdots，8$）

〔提示：取 x 与 $\frac{1}{x}$ 分别为 x_1 与 x_2，研究 x_1 与 x_2 的对称多项式。$c_1=x+\frac{1}{x}$，$c_2=1$，$s_1=c_1$，$s_2=c_1^2-2$，$s_k=c_1s_{k-1}-s_{k-2}$（$k\geqslant 3$）。答：$s_2=c^2-2$（c_1 简记为 c），$s_3=c^3-3c$，$s_4=c^4-4c^2+2$，$s_5=c^5-5c^3+5c$，$s_6=c^6-6c^4+9c^2-2$，$s_7=c^7-7c^5+14c^3-7c$，$s_8=c^8-8c^6+20c^4-16c^2+2$〕

§3 利用对称多项式解方程与方程组

利用初等对称多项式 $c_1，c_2，\cdots，c_n$ 与 k 次幂和式 s_k（$k=1，2，3，\cdots$）之间的关系可以求解某些特殊的方程与方程组。

例1 解方程

$$x^4+(4-x)^4=626 \tag{1}$$

解 把方程（1）的根设为 x_1，再取 $x_2=4-x_1$，研究 x_1 与 x_2 的对称多项式。于是

$$c_1=x_1+x_2=4$$

$$c_2=x_1x_2，\text{把} c_2 \text{简记为} c$$

$$s_2=c_1^2-2c_2=16-2c$$

$$s_4=x_1^4+x_2^4$$