高等医学院校本科教材

医用高等数学

谢楠柱　主编

河南医科大学出版社

高等医学院校本科教材

医用高等数学

主　　编　谢楠柱

责任编辑　张巨波

责任监制　何　勤

河南医科大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

邮政编码 450052　电话 (0371)6988300

河南第二新华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　14 印张　340 千字

1997 年 6 月第 1 版　1997 年 6 月第 1 次印刷

印数 1～7 400

ISBN 7-81048-170-3/R・166

定　价 12.70 元

内 容 提 要

本书根据卫生部1981年修订的《五年制医学院校教学计划》要求，结合90年代的教学实际需要编纂而成。全书包括函数和极限、导数与微分、不定积分、定积分、微分方程基础、多元函数积分基础，概率论基础、统计初步等内容。在保持学科系统性的基础上，力求教学内容具有基础性、医用性、时代性和少而精的特点，着重讲述基本概念、基本原理和基本方法。本书可作为高等医学院校教材及综合大学、师范学院生物学专业的高等数学教材，也可供医学工作者作参考书用。

序 言

现代生物医学的研究，随着计算机的广泛应用，已由定性模式转为定量模式。学习和掌握高等数学，运用数学原理来指导医疗和科研实践，已成为广大医务工作者和医学生的共识。本书就是在这样的历史条件下，参照卫生部颁布的《高等医学院校五年制医学专业教学计划》编纂而成。

依据《高等医学院校五年制医学专业教学计划》的规定，《医用高等数学》是一门必修的基础课。本书根据90年代教学实际需要，力求教学内容具有基础性、医用性、时代性和少而精的特点，以期解决“教学内容多，学时少”的矛盾，争取编写出一部具有中国特色的医用高等数学教材。

本书力求运用辩证唯物论和历史唯物论的观点阐述高等数学的公式、方程、定理，在保持学科系统性的基础上，着重讲述基本概念、基本原理和基本方法。全书包括函数和极限、导数与微分、定积分、微分方程基础、多元函数微积分基础、概率基础和统计初步等共8章，书末附有数学用表。内容编写是以51学时～72学时理论课教学安排，供教师选择。本书可供五年制高等医学院校的临床医学、检验、医学影像、卫生、口腔、儿科、法医等专业使用，同时也可供医学工作者作参考书用。

本书的编写得到广州医学院、河南医科大学和昆明医学院等单位领导的支持，特此表示衷心的感谢。

谢楠柱

1996-07-01

目　录

第一章　函数和极限

在现代科学技术的各个领域中，函数是被广泛应用的数学概念之一。初等数学研究的对象主要是常量，高等数学研究的对象则是变量。函数关系是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法。本章着重介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的主要性质。

第一节　函数的概念

一、函数的概念

1. 常量与变量

在研究实际问题时，会经常遇到各种不同的量，如长度、面积、温度、时间、体重等。其中，有的量在变化过程中保持同一数值，称为常量；有的量在变化过程中能取不同的数值，称为变量。例如，在热胀冷缩过程中，一圆盘的半径 R 和周长 C 都是变量，但周长与半径的比 $C/R=2\pi$ 不变，是常量。

常量和变量是对一确定过程而言的。同一个量，在某一条件下可以认为是常量，而在另一条件下就可能是变量。例如，人的身高，在一个短暂的时间里是常量，但在较长的时间中就是变量。

常量也可以看作一特殊的变量，即在某一过程中，该变量都取相同的数值。

2. 函数的概念

定义　在某一变化过程中有 2 个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的每个允许取的值，变量 y 按照一定的规律都有确定的值与之对应，则变量 y 称为变量 x 的函数。变量 x 称为自变量，y 称为因变量，记作

$$y=f(x)$$

自变量的所有允许值的集合称为函数的定义域。如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，与 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$。所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的值域。

函数的定义域常用区间来表示。设 a，b 是 2 个实数，而且 $a<b$。把满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，表示为 $[a,b]$；把满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，表示为 (a,b)；把满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合都叫做半开半闭区间，分别表示为 $[a,b)$ 或 $(a,b]$，其中实数 a 与 b 叫做相应区间的端点。

同理，把满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$。

此外，邻域是常用的一种区间概念。设 x_0 是某一定点，δ 是大于 0 的某实数，开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 称为邻域中心，δ 称为邻域半径。

例 1 婴儿的体重在 1 个～6 个月的时间内可由如下经验公式确定：

$$y=3+0.6x$$

式中，x 表示婴儿的年龄（月），是自变量；y 表示其体重（kg），是函数，函数的定义域为 $[0, 6]$。

例 2 气象台用温度自动记录仪记录了当地一段时间内温度 T 的变化曲线，如图1-1所示。13 时～23 时内的任意时刻 t 都对应着一个 $T=T(t)$。

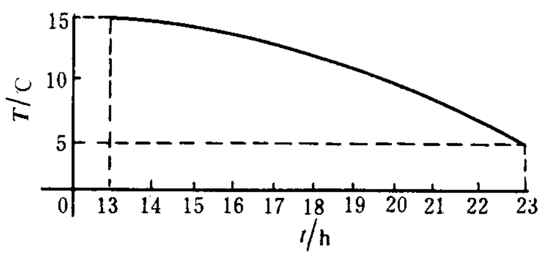


图 1-1 温度 T 随时间 t 的变化曲线

其中，t 是自变量，T 是函数。

$y=C$ 或 $f(x)=C$（C 是常数），也是变量 x 的函数。因为，当变量 x 给出任何一确定值时，y 的值都是 C（如图 1-2）。

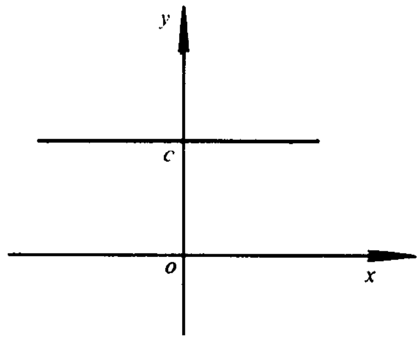


图 1-2 函数 $f(x)=C$ 的变化曲线

当所研究的函数 $y=f(x)$ 是用一个式子表示时，如果不加说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的全体。

二、分段函数

例 3 某药物的常用量 y，对 16 岁及 16 岁以上的成年人是一定的，设为 a；对于 16 岁以下的未成年人，则正比于年龄 x，设比例常数为 k，则有函数关系（如图 1-3）为

$$y=\begin{cases} kx, & \text{当 } 0<x<16 \\ a, & \text{当 } x\geqslant 16 \end{cases}$$

式中，药物量 y 是年龄 x 的函数，但其函数关系是用 2 个解析式表示的。像这种在定义域内的不同部分用不同的解析式表示的函数称为分段函数。

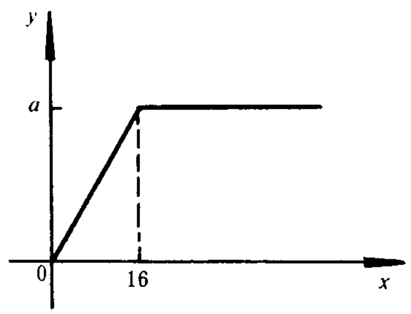


图 1-3　药物用量 y 与年龄 x 的函数关系曲线

分段函数是 1 个函数，而不是 2 个或几个函数。应注意，求分段函数的函数值时，不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算。

例 4　示波器上显示的三角波（图 1-4），其电压 V 与时间 t 的函数关系为

$$V=\begin{cases}2t, & 当\ 0\leqslant t\leqslant 1\\ 4-2t, & 当\ 1<t\leqslant 2\end{cases}$$

求在时间 $t=\frac{1}{2}$，$t=\frac{3}{2}$时电压 V 的值。

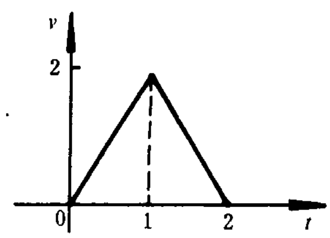


图 1-4　电压 V 与时间 t 的函数关系曲线

解　将自变量的值代入相应范围内的函数表达式中，得

$$V_{t=\frac{1}{2}}=2t\,|_{t=\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$V_{t=\frac{3}{2}}=(4-2t)\,|_{t=\frac{3}{2}}=4-2\times\frac{3}{2}=1$$

三、复合函数

定义　设变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数，即

$$y=f(u),\ u=\varphi(x)$$

如果变量 x 的某些值通过中间变量 u 可以确定变量 y 的值时，则称 y 是 x 的复合函数，记作

$$y=f\,[\varphi\,(x)]$$

例 5　试通过 $y=1+u^2$，$u=\sin x$，求出 y 关于 x 的复合函数。

解　由 $y=1+u^2$，$u=\sin x$ 确定的复合函数是 $y=1+\sin^2 x$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$。

例 6　试通过 $y=\ln u$，$u=\mathrm{arctg}x$，求出 y 关于 x 的复合函数。

解　$y=\ln u$，$u=\mathrm{arctg}x$ 的复合函数是 $y=\ln\mathrm{arctg}x$，其定义域为 $(0, +\infty)$。

如果由 2 个函数复合成的函数的定义域为空集时，则此复合函数无意义（或称它们不能复合）。例如，由 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 复合成的函数 $y=\arcsin(2+x^2)$，因 $2+x^2>1$，其定义域为空集，即函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 无意义。

同理，可以将复合函数的概念推广到有限个函数构成的复合函数。例如，3 个函数

$$y=\sqrt{u},\ u=\ln v,\ v=2x+3$$

构成的复合函数是

$$y=\sqrt{\ln(2x+3)},\ x\in[-1, +\infty).$$

在一些计算问题中，要把复合函数的中间变量找出来，把它“分解”为若干个简单函数，使计算简化。

例 7 将下列复合函数“分解”为简单函数：

(1) $y=a\sin(bx+c)$；

(2) $y=a^{\sin(3x^2-1)}$；

(3) $y=\mathrm{tg}\sqrt{\lg\arcsin x}$.

解 (1) $y=a\sin(bx+c)$ 可以看成是由 $y=a\sin u$ 和 $u=bx+c$ 复合而成。

(2) $y=a^{\sin(3x^2-1)}$可以看成是由 $y=a^u$，$u=\sin v$ 和 $v=3x^2-1$ 复合而成。

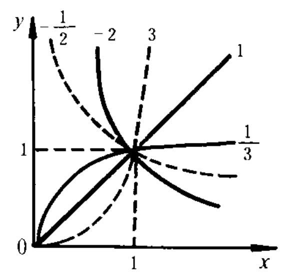
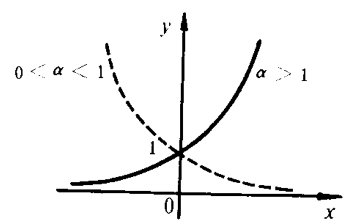
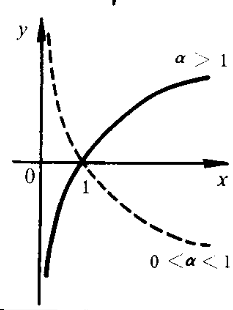
(3) $y=\mathrm{tg}\sqrt{\lg\arcsin x}$可以看成是由 $y=\mathrm{tg}u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\lg t$ 和 $t=\arcsin x$ 复合而成。

四、初等函数

1. 基本初等函数

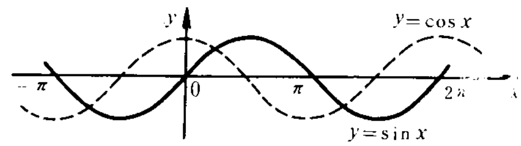
在中学里已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数统称为基本初等函数。为复习和应用的方便，将其归纳成表 1-1。

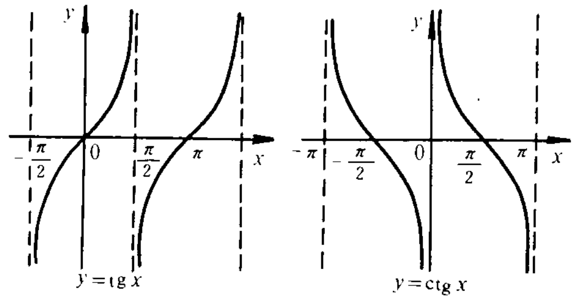
表 1-1 基本初等函数表

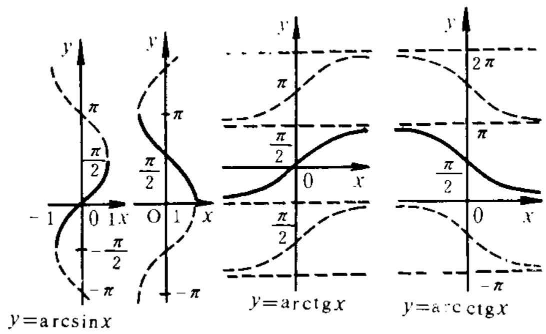
类别及解析式	定义域	值域	图形
幂函数 $y=x^\mu$：$\mu>0$ μ 次抛物线	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共值域	
$\mu<0$ 令 $\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$，m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	

续表 1-1

类别及解析式	定义域	值域	图形
三角函数			
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,+1]$	
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
$y=\mathrm{tg}x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	
$y=\mathrm{ctg}x$	$x\neq n\pi$	$(-\infty,+\infty)$	
	$(n=0,\pm1,\cdots)$		
反三角函数			
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
$y=\mathrm{arctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	
$y=\mathrm{arctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	







2. 初等函数

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次函数的复合所得到的函数，统称为初等函数。

例如，$y=\ln\cos^2x$，$y=\frac{1+a^2x}{\sqrt{1-x^2}}$，$y=\arcsin x+\frac{\mathrm{tg}x}{x}$等都是初等函数。分段函数一般不是初等函数。本教材所讨论的函数主要是初等函数。

第二节 极限的概念

极限思想、极限方法的产生，是对那些用初等数学方法不能解决的问题（如切线问题，面积、体积问题等）进行长期探索的结果，由此形成的极限概念奠定了微积分学的理论基础。在自然科学中有许多重要的量，要用极限方法才能作出精确的定义和计算。本节在简要复习数列极限的基础上，引入函数极限的概念，着重介绍无穷小量和几种常用求极限的方法。

一、数列的极限

数列是定义在自然数集上的函数 $a_n=f(n)$ 的一种表示法。把变量 a_n 按自变量 n 从

小到大的顺序排成一列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称为数列，记作 $\{a_n\}$，其中 a_n 称为数列的第 n 项或通项。作为例子，下面列出几个有通项的数列（$n=1, 2, 3, \cdots$）。

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$：$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

(3) $\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\}$：$1, 0, 1, 0, \cdots$

(4) $\{(-1)^n n\}$：$-1, 2, -3, \cdots, (-1)^n n, \cdots$

(5) $\{n!\}$：$1!, 2!, 3!, \cdots, n!, \cdots$

数列的几何表示是数轴上的一列点。

考察数列（1）～（5），当 n 无限增大时，它们的变化趋势是不同的。其中有些数列的项 a_n，例如（1），（2）的 $\frac{1}{n}$，$\frac{n}{n+1}$，当 n 增大时能与某一个常数 a 无限接近，即数轴上的点 a_n 与点 a 的距离 $|a_n-a|$ 无限减小（如图 1-5）。对这样的数列，$\{a_n\}$ 与数 a 的关系就用"极限"来说明。

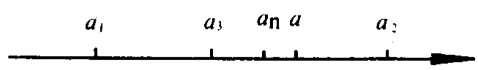


图 1-5　数轴上点 a_n 与 a 的距离变化趋势

定义　对于数列 $\{a_n\}$，若当 n 无限增大时，a_n 无限趋近一个常数 a，则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a，或 a_n\to a \ (n\to\infty)$$

也可简记为 $\lim a_n=a$，或 $a_n\to a$。

从定义直接得到，若 $a_n\to a$，则 $(a_n-a)\to 0$；反之也成立。

以上列举的几个数列中，数列（1），（2）分别以 0，1 为极限，即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0，\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

数列（3）没有极限，即 $\lim \frac{1+(-1)^n}{2}$ 不存在或没有意义。

数列（4），（5）也没有极限。这种数列的变化同自然数列 $\{n\}$ 一样，当 n 无限增大时，各项的绝对值 $|a_n|$ 无限增大，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty 或 a_n\to\infty$$

例如　$\lim(-1)^n n=\infty$，$\lim n!=\infty$

当 $a_n\to 0$ $(a_n\neq 0)$ 时，由 $\frac{1}{a_n}$ 组成的数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，由于分子为 1，分母的绝对值无限减小，分式的绝对值 $\left|\frac{1}{a_n}\right|$ 就要无限增大，故有 $\frac{1}{a_n}\to\infty$。反之，如 $a_n\to\infty$，则 $\frac{1}{a_n}\to 0$。

二、函数的极限

函数 $y=f(x)$，自变量 x 的变化有 2 种情形，其中一种是 x 的绝对值无限增大（记作 $x\to\infty$）；另一种是自变量 x 的值无限趋近定值 x_0（记作 $x\to x_0$）。研究这 2 种情形的函数值的变化趋势，就是研究相应的函数的极限。

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$，即 x 取正值并无限增大（记作 $x\to+\infty$）及 x 取负值且它的绝对值无限增大（记作 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势（见表 1-2）。

表 1-2　$f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势

x	± 1	± 10	± 100	$\pm 1\,000$	$\pm 10\,000$	$\pm 100\,000$	…	$\to\infty$
$f(x)$	± 1	± 0.1	± 0.01	± 0.001	$\pm 0.000\,1$	$\pm 0.000\,01$	…	$\to 0$

由此可见，不论 $x\to+\infty$，还是 $x\to-\infty$，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 都趋近于 0。亦即函数的图像趋近于 x 轴，且 $|x|$ 越大，就越趋近于 0（如图 1-6），于是把 0 作为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时的极限。

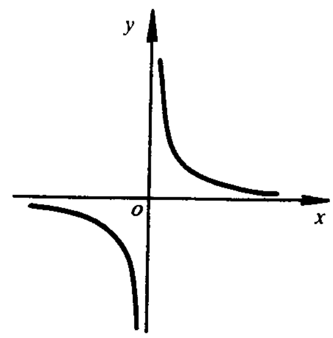


图 1-6　函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的关系曲线

定义　当自变量 x 的绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 a，就说当 x 趋向无穷大时，函数 $f(x)$ 的极限是 a，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a(x\to\infty)$$

例如，函数 $f(x)=1+\frac{1}{x^2}$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 1$。

若自变量取正值（或负值）沿 x 轴正方向无限增大（或沿 x 轴负方向绝对值无限增大）时，函数 $f(x)$ 无限趋近一常数 a，则称 a 为函数 $f(x)$ 的单侧极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a(x\to+\infty)$$

$$(\lim_{x\to-\infty} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a(x\to-\infty))$$

例如，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\mathrm{arctg}x\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\mathrm{arctg}x\to-\frac{\pi}{2}$，也可表示为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$。

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=x^2$，当自变量从 x 轴上 $x=2$ 的左右趋近 2（记作 $x\to 2$）时，函数

$f(x)=x^2$ 的变化趋势见表 1-3 及图 1-7 所示。

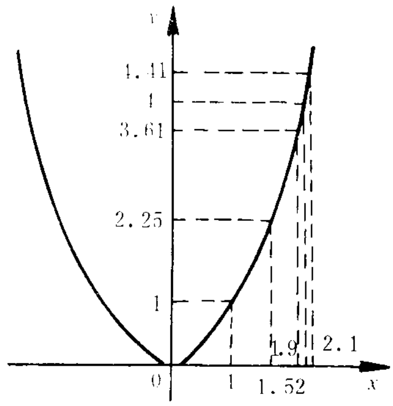


图 1-7　函数 $f(x)=x^2$ 的关系曲线

表 1-3　$f(x)=x^2$ 的变化趋势

x	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999	…	$\to 2$
$f(x)$	2.25	3.61	3.96	3.996	3.9996	…	$\to 4$
x	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001	…	$\to 2$
$f(x)$	6.25	4.41	4.04	4.004	4.0004	…	$\to 4$

由此可见，当 $x\to 2$ 时，不论从右边还是从左边趋近 2，函数 $f(x)$ 趋近 4，且自变量 x 越趋近 2，函数 $f(x)$ 也越趋近 4，因此就说 4 是当 $x\to 2$ 时函数 $f(x)$ 的极限。

定义　当自变量 x 无限趋近常数 x_0 时，若函数 $f(x)$ 无限趋近一个常数 a，就说当 x 趋近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限是 a，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \text{ 或 } f(x)\to a \quad (x\to x_0)$$

在上述定义中，若自变量 x 趋近于定值 x_0，仅限于 $x<x_0$（或 $x>x_0$），即从 x_0 的左侧（或从 x_0 的右侧）趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 a，则 a 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限（或右极限），记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=a \text{ 或 } f(x_0-0)=a$$

或

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a \text{ 或 } f(x_0+0)=a$$

当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在的必要充分条件是左、右极限都存在并且相等。

从函数 $$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases} \tag{1-1}$$

的图形（图 1-8）可见

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$$

左极限不等于右极限，所以当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在。

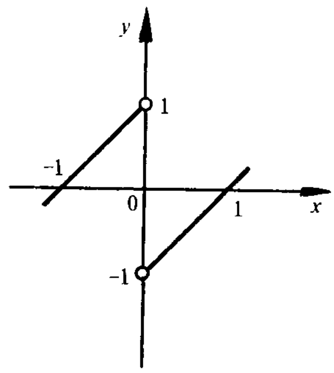


图 1-8　函数（1-1）的关系曲线

三、无穷小量及其性质

1. 无穷小量

在极限的理论和应用中，以 0 为极限的变量起着重要作用，这种变量就是无穷小量。

定义　如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ （$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$），则称当 $x\to a$ （$x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 是无穷小量，简称无穷小。

当 $x\to 0$ 时，函数 x^n，$\sin x$，$1-\cos x$ 的极限都是 0，这些变量当 $x\to 0$ 时是无穷小，当 $x\to\infty$ 时，变量 $\frac{1}{x}$ 也是无穷小。

在极限运算中，无穷小具有与 0 相同的一些性质。但是无穷小是变量不是常数 0，也不是很小的数。

2. 判定定理

定理 1　$\lim f(x)=A$ 成立的充要条件是 $\lim [f(x)-A]=0$。即，若函数 $f(x)$ 以 A 为极限，则函数 $f(x)-A$ 是无穷小；反之，若 $f(x)-A$ 是无穷小，则 $f(x)$ 的极限是 A。

定理 2　若 $|\beta(x)|\leqslant|\alpha(x)|$，$\alpha(x)$ 是无穷小，则 $\beta(x)$ 也是无穷小。

定理 3　常数与无穷小的积仍是无穷小。

定理 4　有限个无穷小的代数和或积仍是无穷小。

例 1　证明当 $x\to 2$ 时，$2x-1\to 3$。

证　因为 $(2x-1)-3=2(x-2)\to 0$（当 $x\to 2$ 时），所以

$$\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$。

解　因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|$，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，$\frac{\sin x}{x}$ 也是无穷小，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

例 3　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$。

证　因为对任何实数 x，有

$$|\sin x|\leqslant|x| \tag{1-2}$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leqslant|x|$$

$$|\cos x-1|=|1-\cos x|\leqslant|x| \tag{1-3}$$