应用概率统计

大连理工大学 东南大学 合肥工业大学
概率统计教材编写组 编

上海科学技术出版社

应用概率统计

大连理工大学　东南大学　合肥工业大学

概率统计教材编写组编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书内容包括概率论及数理统计两大部分，两者并重.

第一至第五章为概率论部分，具体内容有随机事件及其概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，第六至第九章为数理统计部分，具体内容有数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，回归分析和方差分析等.

书中选取了许多典型实用例题，能帮助读者加深理解概率统计的理论、方法和应用. 每章配有适当的习题，并在书末附有答案。

本书可供高等工科院校和其它高等院校本科生作为概率论及数理统计课程的教材或教学参考书，也可供工程技术人员和经济管理者参考。

责任编辑 唐仲华

应 用 概 率 统 计

大连理工大学 东南大学 合肥工业大学

概率统计教材编写组编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 常熟市文化印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10 字数 220 000

1990 年 8 月第 1 版 1990 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—13,500

ISBN7-5323-2238-6/O·144

定价：3.35 元

前　言

1989年4月，全国工科院校应用概率统计委员会在河南洛阳召开了工科院校概率统计教学研究与应用成果学术交流会，根据会议对教材建设讨论的精神，该委员会组织大连理工大学、东南大学和合肥工业大学，成立编写组，选派有丰富教学经验的教师，集体编写出本教材。

在编写过程中，三校的编者相互交流了教学经验，仔细地讨论了教学大纲，分工编写出初稿。根据高等工科院校本科学制特点和工科专业要求，该书在内容选取上力求贯彻“少而精”和理论联系实际的原则，在编写方法上力求结构严谨，纲目清晰，突出基本概念、基本方法和基本计算。此外，例题与习题的选择与配备，注意难易适中，数量恰当。为便于学习，习题附有答案。

全书共分九章。第一至第五章为概率论部分，内容有随机事件及其概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理。第六至第九章为数理统计部分，内容有数理统计基本概念，参数估计，假设检验，回归分析和方差分析等。

参加本书编写的有大连理工大学李学伟、仲崇骥(第二、三、五章)，东南大学张元林、陈浩球（第六、七、八章)，合肥工业大学顾秉琏、瞿荣杰(第一、四、九章)，由李学伟副教授统稿。全国工科院校应用概率统计委员会常务委员韦博成教授和戴俭华副教授担任主审。

本书的全部编写工作是在全国工科院校应用概率统计委员会主持下进行的，大连理工大学数学系、东南大学数力系、合肥工业大学数力系给予了大力支持和帮助。编者借此机会谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，错谬之处恐所难免，望使用本书的同行和广大读者不吝指正。

编　者

1990年4月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

随机事件及随机事件的概率是概率论中的基本概念，研究随机事件的关系和运算、研究概率的性质和计算是概率论中的基本问题，这些基本概念和基本问题是我们第一章讨论的主要内容。

§1 随机事件

一、随机试验与随机事件

随机现象总是同随机试验相联系的。这里所说的随机试验具有下列特点：

(1) 在相同的条件下试验可以重复进行；

(2) 试验的所有结果事先是已知的；

(3) 进行一次试验时，究竟哪一个结果会出现事先不能确定。

以下，凡是满足上述三个条件的试验或观察我们都称之为随机试验，简称试验。

例 1 掷一颗骰子观察它出现的点数，这是一个试验。显然，骰子可以重复地掷；掷骰子之前所有可能的结果是已知的，不外乎出现"1 点"、"2 点"、"3 点"、"4 点"、"5 点"、"6 点"这六种情况；但是每掷一次骰子究竟出现哪一种点数事先不能确定。

例 2 在 54 张扑克牌中任取一张也是一个试验，试验的

结果有 54 个。

例 3 在长为 30 cm 的线段 AB 上任取一点，若用 x 表示在给定线段上所取点的坐标 (单位是 cm)，则 $x\in[0, 30]$，这也是一个试验。

我们研究一个随机试验，首先关心的是该试验的可能结果是什么。在概率论中我们把试验的结果称为随机事件，简称事件。

如在例 1 中，"出现 1 点"，"出现偶数点"，"出现的点数 $\leqslant 4$" 等都是事件。又如在例 2 中，"出现方块 1"，"出现红桃"，"出现 10"等也都是事件。在例 3 中，结果为 "$x>10$"，"$15\leqslant x\leqslant 25$"，"$x<5$"等也都是事件。

事件一般用大写英文字母 A、B、C、…表示。

在例 1 中，我们把"出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"这六个事件称为基本事件，它们都是不可分解的事件，可以简单地用单元素集合 $\{1\}$，$\{2\}$，…，$\{6\}$ 来表示。此外，如"出现偶数点"、"出现的点数$\leqslant 4$"等事件叫做复合事件，它们都是由若干个基本事件复合而成，可以用包含若干个相应元素的集合来表示，如 "出现偶数点" $=\{2, 4, 6\}$，{出现的点数 $\leqslant 4\}=\{1, 2, 3, 4\}$ 由所有基本事件对应的全部元素组成的集合，称为**样本空间**，记为 Ω。因此，$\Omega=\{\omega \mid \omega$ 是随机试验中基本事件所对应的元素$\}$。我们称样本空间 Ω 中的元素 ω 为**样本点**。比如，在例 1 中 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，其中 1, 2, 3, 4, 5, 6 是样本点，实际上它们是掷一颗骰子可能出现的点数。又如在例 3 中，$\Omega=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 30\}$，其中 x 表示在给定线段上所取点的坐标。

由于每个随机事件都是由样本点组成的，所以可以说每个随机事件都是样本空间的一个子集，当且仅当该子集中的

一个样本点出现时，这一事件才发生。在例1中，设事件A表示“出现偶数点”这一事件，则$A=\{2, 4, 6\}$。在一次掷骰子试验中，当且仅当样本点2，4，6中的一个出现时，事件A才发生。

在所有的事件中有两个特殊事件必须注意到，一个是在每次试验中必然发生的事件，另一个是在每次试验中必然不发生的事件。前者我们称为必然事件，后者称为不可能事件。显然，必然事件就是样本空间Ω。不可能事件通常记为$\varnothing$。

二、事件间的关系及运算

弄清事件间的关系对研究随机试验是十分重要的。下面我们先来介绍经常遇到的几种事件间的关系和运算。我们将看到，事件的关系和运算同集合论中集合的关系和运算是一致的，只是使用的术语不同罢了。

1. 事件的**包含和相等**

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A(或称A被B包含)，记作

$$B\supset A(\text{或 } A\subset B).$$

如在例1中，若用A表示事件：“出现2点”，用B表示事件：“出现偶数点”，则易知

$$B\supset A(\text{或 } A\subset B).$$

如果$B\supset A$和$A\supset B$同时成立，则称事件A与事件B相等，记作$A=B$。

2. 事件的**并**

事件A和事件B的并是一个事件C，它表示事件A与事件B中至少有一个发生，记作

$$C=A\cup B.$$

例 4 一电路由两个元件并联而成，如图 1-1 所示。我们用

A 表示事件："元件 I 正常"；

B 表示事件："元件 II 正常"；

C 表示事件："电路由 L 到 R 导通"。

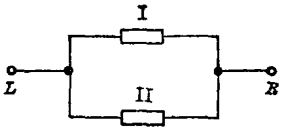

图 1-1

易知

$$C = A \cup B.$$

3．事件的交

事件 A 与事件 B 的交是一个事件 C，它表示事件 A 与事件 B 同时发生，记作

$$C = A \cap B (\text{或 } C = AB).$$

例 5 设一电路由两个元件串联而成，如图 1-2 所示．我们用

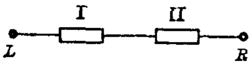

图 1-2

A 表示事件："元件 I 正常"；

B 表示事件："元件 II 正常"；

C 表示事件："电路由 L 到 R 导通"。

易知

$$C = A \cap B (\text{或 } C = AB).$$

例 6 在如图 1-3 所示的电路中，以 B 表示"信号灯亮"这一事件，以 A_1, A_2, A_3 分别表示继电器 I、II、III 闭合，则易知

$$B = A_1A_2 \cup A_1A_3.$$

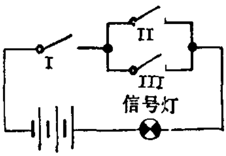

图 1-3

事件的并与事件的交的概念，可以推广到事件为有限个乃至可列个的情形中去．如 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 "A_1,

$A_2, \cdots, A_i \cdots$中至少有一事件发生”；$B=\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ 表示“事件 B_1, $B_2, \cdots, B_i, \cdots$同时发生”。

4．事件的差

事件A与事件B的差是一个事件C，它表示事件A发生而事件B不发生，记作$A-B$。

如在例1中，若用A表示事件：“出现2点”，用B表示事件：“出现偶数点”，则$A-B$表示一个事件C，即C为“出现4点或6点”。

5．**互不相容事件（或互斥事件）**

若事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\emptyset$，则称事件A与事件B为互不相容事件，或称为互斥事件，如果一组事件$A_1, A_2, \cdots$中任意两个互斥，则称这一组事件互斥。

例如，甲乙丙三人生产同一种零件。今从成品库中任取一个这种零件，若A表示“取到的零件是甲生产的”，B表示“取到的零件是乙生产的”，C表示“取到的零件是丙生产的”，则事件A, B, C互斥。这是因为取出的零件不可能既是甲生产的，又是乙或丙生产的。

若$A_1, A_2, \cdots$互斥，则可记

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = A_1 + A_2 + \cdots.$$

6．**对立事件（互逆事件）**

若事件A与事件B满足下列条件：

(1) 互斥（即$AB=\emptyset$）；

(2) 其中必有一个事件发生，即$A+B=\Omega$，

则称事件A与事件B为对立事件，或称为互逆事件。若记上述的B为$\bar{A}$，即事件$\bar{A}$是事件A的对立事件，则有

$$A+\bar{A}=\Omega.$$

实际上也可将 $\bar{A}$ 表为 $\bar{A}=\Omega-A$。

显然事件 A：“产品合格”的对立事件 $\bar{A}$ 是“产品不合格”。

又假定三人向同一个目标射击，若 A 表示“至少有一个人击中目标”，则其对立事件 $\bar{A}$ 是“三人都未击中目标”。这是因为，“至少有一人击中目标”包括击中目标的人数可能是1人，或2人，或3人，与“三人都未击中目标”不能同时发生；而且，三人射击的结果，不是“至少有一人击中目标”，就是“三人都未击中目标”，即它们之中必有一个发生。

为了直观，我们经常用图形表示事件及其关系。一般地，用平面上的某一矩形表示必然事件 Ω，用该矩形内的一个小区域表示一个事件。这样，事件 A 与事件 B 的并、交、差以及互斥事件、对立事件便可分别用图1-4的(a)，(b)，(c)，(d)，(e)表示。

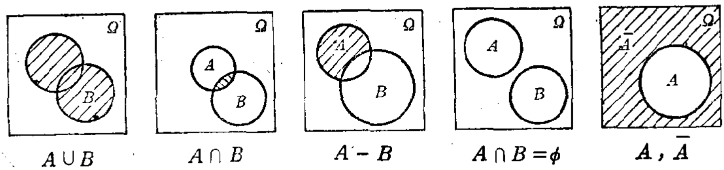

图 1-4

有关随机事件运算的性质，可以从集合运算的性质得到。例如，事件的并（∪）及事件的交（∩）除有交换律、结合律、分配律之外，还有

$$A\cup\Omega=\Omega,\ A\cap\Omega=A,\ A\cup\varnothing=A,$$
$$A\cap\varnothing=\varnothing; \tag{1.1}$$
$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}. \tag{1.2}$$

式(1.2)称为德·摩尔根定律，它在以后的学习中是很有用的

例 7 将一枚硬币连掷三次，观察其出现正反面的情况。若以 A_1, A_2, A_3 分别表示事件"第一次出现正面"、"第二次出现正面"和"第三次出现正面"，试用 A_1, A_2, A_3 表示下列各事件：

(1) 只在第一次出现正面；

(2) 只出现一次正面；

(3) 至少出现一次正面；

(4) 至多出现一次正面。

解 (1) 只在第一次出现正面意味着：掷硬币三次，第一次出现正面，第二次出现反面，第三次也出现反面。所以该事件可表达为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$。

(2) 只出现一次正面但并未指定哪一次出现正面，可以只在第一次出现正面，也可以只在第二次出现正面，也可以只在第三次出现正面。所以该事件可表达为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$。

(3) 至少出现一次正面，换句话说就是第一次出现正面，第二次出现正面，第三次出现正面这三个事件中至少有一个发生，因此它可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$. 此外，还可以把至少出现一次正面看作是三次都出现反面的对立事件，从而表达成 $\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}$. 实际上根据事件运算的性质，我们有

$$\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}=A_1\cup A_2\cup A_3.$$

(4) 至多出现一次正面是以下四个事件：只在第一次出现正面，只在第二次出现正面，只在第三次出现正面，三次都不出现正面的并事件，因此它可以表达成 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$。由于至多出现一次正面也就是至少出现两次反面，因此它还可以表达成 $\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_3$。实

际上根据事件运算的性质，我们有

$$\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_3=\bar{A}_1\bar{A}_2\Omega\cup\bar{A}_2\bar{A}_3\Omega\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\Omega$$
$$=\bar{A}_1\bar{A}_2(A_3\cup\bar{A}_3)\cup\bar{A}_2\bar{A}_3(A_1\cup\bar{A}_1)\cup\bar{A}_1\bar{A}_3(A_2\cup\bar{A}_2)$$
$$=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$
$$=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3,$$

§2 事件的概率

我们观察一个随机试验的各种事件时，一般来说，有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些。研究随机现象，不仅要知道可能出现哪些事件，更重要的是要知道各种事件出现的可能性大小。事件发生的可能性大小通常用区间[0, 1]中的数值表示。这种表示一个事件发生可能性大小的数值叫做该事件的**概率**。事件 A, B, C, … 的概率分别用 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, …表示。

人们曾针对不同的问题给出了定义概率和计算概率的各种方法。我们先来介绍一种最简单的情形，即所谓古典型概率。

一、古典概型

我们先来看两个例子。

例 1 掷一枚质地均匀的硬币，人们自然会想到由于硬币的两面是对称的，所以“出现正面向上”和“出现反面向上”的可能性是一样的，人们有理由认为“出现正面向上”和“出现反面向上”的概率都是0.5。

例 2 掷一颗骰子，由于出现1, 2, 3, 4, 5, 6中每一种点数的可能性都相同，故掷得点数不大于2的概率为

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

回顾一下上面两个例子，发现它们具有两个共同点：

(1) 试验的样本空间 Ω 是个有限集合，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

(2) 基本事件 $\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，…，$\{\omega_n\}$ 出现的可能性相同。

具有上述两个特点的试验叫做古典概型试验。在古典概型试验中，事件的概率(也称为**古典概率**)定义如下：

定义 在古典概型试验中，若样本点的总数为 n，事件 A 所包含的样本点个数为 k，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{1.3}$$

在例1中，设 H 为"出现正面向上"，则 $n=2, k=1, P(H)=\frac{1}{2}$. 在例2中，设 A 为"掷得点数不超过2"，则 $n=6, k=2$, $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

例3 将一枚硬币连掷三次，用 A 表示有两次出现正面，用 B 表示第二次出现正面，试求 $P(A)$ 和 $P(B)$。

解 若用 H 表示出现正面，用 T 表示出现反面，则试验的样本空间为

$$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

事件 A 包含的样本点为

$$HHT, HTH, THH,$$

事件 B 包含的样本点为

$$HHH, HHT, THH, THT,$$

故