

高等学校工科教材

通信原理学习指导

钱学荣 王 禾 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

高等学校工科教材

通信原理学习指导

钱学荣 王 禾 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书涉及通信系统各个组成部分的基础理论和基本原理。包括:通信概论、随机信号分析、信道特性、模拟通信系统、数字通信系统、模拟信号的数字传输、最佳接收原理、差错控制编码、正交编码、同步原理等内容。全书共收录习题 378 道。通过内容提要、例题详解、习题解答、补充习题等部分介绍“通信原理”的基本概念和解题方法,以拓宽读者的知识面。

本书适合用做教学参考书和研究生入学考试复习指导书,更是广大通信专业学生和自学者的良师益友。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究。

图书在版编目(CIP)数据

通信原理学习指导/钱学荣编著. —北京:电子工业出版社,2001.10

高等学校工科教材

ISBN 7-5053-6933-4

I. 通… II. 钱… III. 通信理论—自学参考资料 IV. TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055471 号

丛 书 名:高等学校工科教材

书 名:通信原理学习指导

编 著 者:钱学荣 王 禾

责任编辑:杨逢仪

排版制作:电子工业出版社计算机排版室

印 刷 者:北京东光印刷厂

装 订 者:三河市新伟装订厂

出版发行:电子工业出版社 <http://www.phei.com.cn>

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:345 千字

版 次:2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-5053-6933-4
TN·1464

印 数:5 000 册 定价:17.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页、所附磁盘或光盘有问题者,请向购买书店调换。
若书店售缺,请与本社发行部联系调换。电话 68279077

前 言

随着信息时代的到来,通信技术越来越受到人们的青睐。通信信息技术人才的需求量很大,通信信息技术专业人才就业率高,经济收入丰厚,使得报考通信信息技术专业的学生人数逐年增多。为了满足不断增长的社会需求,近年来,不少院校都新增开设通信信息类专业。

“通信原理”课程是通信类专业的一门重要的专业基础理论课程,它系统讲述了通信系统各个组成部分的基础理论和基本原理。该课程涉及概率统计、随机过程、信号与系统分析、数字电路、通信电路等多门前修课程,具有理论性强、知识面广的特点。在教学、学习,特别是研究生入学考试过程中,师生普遍反映缺少相关的参考资料,希望能有一本较好的教学指导书。据我们了解,目前国内尚无此类书籍。应广大青年教师、广大学生和研究生报考者的要求,作者根据多年讲授“通信原理”课程的教学经验,结合国内优秀教材:西安电子科技大学樊昌信教授的《通信原理》和清华大学曹志刚教授的《现代通信原理》,编写了这本《通信原理学习指导》。它旨在帮助青年教师和广大学生更好地学习掌握“通信原理”的基本概念和解题方法,以进一步加深对课程内容的理解。

全书各章一般分为内容提要、例题详解、习题解答、补充习题四个部分,反映了各章内容的重点和主要概念。对主要例题力求做到一题多解,演示解题方法。为了扩大知识面,对大部分章节编写了补充习题。

全书共收集、编写习题 378 道,其中包括例题详解 55 道,习题解答 233 道,补充习题 90 道,为读者提供了充分的选择余地。

在本书的编写过程中得到西安电子科技大学樊昌信教授的大力支持,南京邮电学院吴新余教授为本书的完善做了不少工作。在此,表示衷心地感谢。

本书根据钱学荣副教授 14 年的教学经验和积累的资料编写。王禾老师整理了有关西电《通信原理》一书的习题解答,补做了部分习题解答初稿,完成全书的图文输入工作。钱学荣副教授新解了有关清华《现代通信原理》一书的习题,并对全书的初稿作了修改和定稿,统编了全书。在本书的编写过程中参考了萧剑英、穆士娟、庞开建编写的《习题集》。另外,苏中波、许颖文、吴献峰、徐威等四位同学在做毕业设计时做了一些工作,在此表示感谢。

由于我们水平有限,一定会有许多不妥和错误之处,殷切希望读者向我们提出宝贵意见。

编著者

2000.11

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 内容提要	(1)
1.2 例题详解	(3)
1.3 习题解答	(3)
1.4 补充练习	(6)
第 2 章 随机信号分析	(8)
2.1 内容提要	(8)
2.2 例题详解	(10)
2.3 习题解答	(15)
2.4 补充练习	(19)
第 3 章 信道	(22)
3.1 内容提要	(22)
3.2 例题详解	(23)
3.3 习题解答	(26)
3.4 补充练习	(30)
第 4 章 模拟调制系统	(32)
4.1 内容提要	(32)
4.2 例题详解	(36)
4.3 习题解答	(41)
4.4 补充练习	(60)
第 5 章 数字基带传输系统	(64)
5.1 内容提要	(64)
5.2 例题详解	(67)
5.3 习题解答	(73)
5.4 补充练习	(92)
第 6 章 数字调制系统	(94)
6.1 内容提要	(94)
6.2 例题详解	(99)
6.3 习题解答	(104)
6.4 补充练习	(117)
第 7 章 模拟信号的数字传输	(118)
7.1 内容提要	(118)
7.2 例题详解	(122)
7.3 习题解答	(126)
7.4 补充练习	(150)
第 8 章 数字系统的最佳接收	(152)
8.1 内容提要	(152)
8.2 例题详解	(154)
8.3 习题解答	(159)

第 9 章 差错控制编码	(164)
9.1 内容提要	(164)
9.2 例题详解	(165)
9.3 习题解答	(168)
9.4 补充练习	(183)
第 10 章 正交编码与伪随机序列	(185)
10.1 内容提要	(185)
10.2 例题详解	(186)
10.3 习题解答	(188)
第 11 章 同步原理	(191)
11.1 内容提要	(191)
11.2 例题详解	(193)
11.3 习题解答	(195)
11.4 补充练习	(202)
附录 A Q 函数和误差函数	(203)
附录 B 部分既约多项式表	(205)
附录 C BCH 码	(207)
参考文献	(209)

第 1 章 绪 论

1.1 内容提要

1. 通信的定义:通信是指信息的传输和交换,利用“电”来传递“信息”的方式称为“电通信”,简称通信。

2. 通信系统模型

(1)一般性模型,如图 1.1.1 所示。

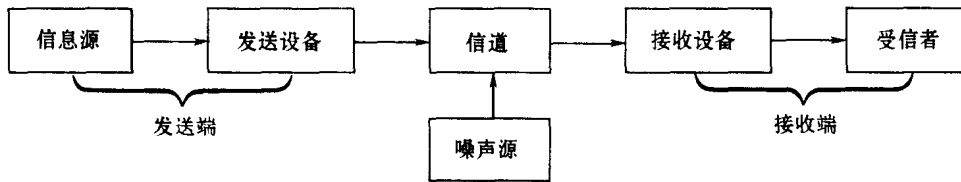


图 1.1.1 通信系统模型

发送端:信息源——将消息变成原始的电信号(基带信号)。

发送设备——将原始电信号变成适合在信道传输的形式(已调信号)。

信道:信号传输的媒质,有有线信道和无线信道之分。

接收端:接收设备——将信道中送来的已调信号还原成原始电信号。

受信者——将原始电信号还原成消息。

噪声源:信道中或通信系统中干扰的集中表示。

一般性模型反映了通信系统的共性,当讨论的问题具体化时,系统模型的各个部分会变得更加具体。

(2)模拟通信系统模型,如图 1.1.2 所示。

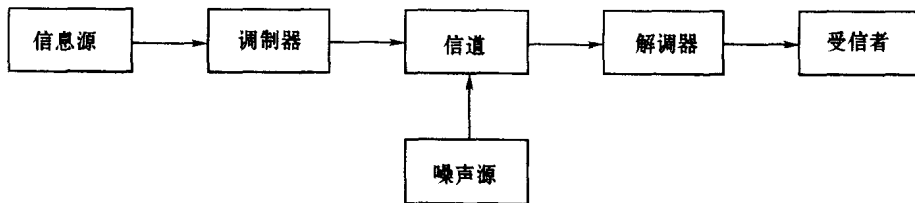


图 1.1.2 模拟通信系统模型

信息源——模拟通信中的信息源是状态连续的模拟信源。

调制器——进行频谱搬移,将来自信息源的基带信号变成适合在信道传输的已调信号的设备。

解调器——将已调信号还原成基带信号与调制相反过程处理的设备。

(3)数字通信系统模型,如图 1.1.3 所示。

数字通信的信息源是状态离散(或可数)的数字信源。加密器是为保密通信而增加的搅码器,解密器是它的反过程的处理设备。编码器是为提高通信可靠性的差错控制编码器,译码器

是它的反过程的处理设备。

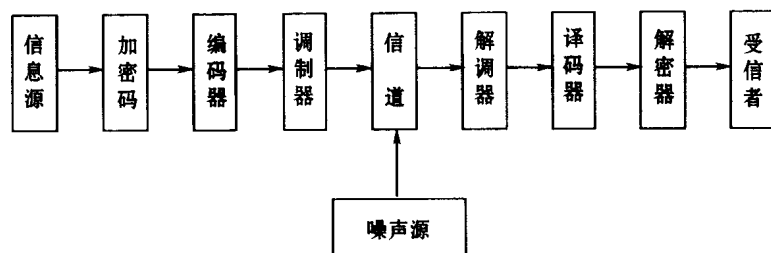


图 1.1.3 数字通信系统模型

3. 通信系统分类

(1) 根据消息的物理特征分为: 电话通信系统;

数据通信系统;

图像通信系统。

(2) 根据工作频率分为: 基带传输系统;

频带传输系统。

(3) 根据信号特征分为: 模拟通信系统;

数字通信系统。

(4) 根据传输媒介分为: 有线通信系统;

无线通信系统。

(5) 根据信号复用方式分为: 频分复用通信系统;

时分复用通信系统;

码分复用通信系统。

4. 通信方式分类

(1) 点与点之间的通信: 单工通信;

半双工通信;

全双工通信。

(2) 串序传输通信与并序传输通信。

5. 信息及其度量

消息: 通信系统的传输对象, 例如: 符号、语音、数据、图像等, 它是信息的载体。

信息: 消息中有意义的内容。信息量 I 与消息 x 出现的概率 $p(x)$ 有关,

$$I = -\log_a p(x)$$

式中对数底 a 与信息量单位有关: $a = 2$, 单位为比特(bit);

$a = e$, 单位为奈特(nit);

$a = 10$, 单位为哈特莱(Hartly)。

6. 平均信息量(信息源的熵)

设离散信息源为 $\begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ p(x_1), & p(x_2), & \cdots, & p(x_n) \end{bmatrix}$, 且有 $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$,

则信息源的熵为 $H(x) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i)$ 比特/符号,

消息的信息量 I : 若消息的总符号数为 M , 则 $I = MH$ bit。

7. 主要性能指标:有效性和可靠性

有效性:系统传输消息(或信息)的“速度”,又称传输速率。在模拟系统中用信息速率 R_b b/s 表示;在数字系统中用比特率 R_b b/s 或码元速率 $R_{BN}(B)$ 表示。

N 进制码元速率和比特率之间的关系如下

$$R_b = R_{BN} = \log_2 N$$

可靠性:系统传输消息或信息的可靠程度。又称误信率、误码率或误比特率。在模拟通信系统中用误信率或均方误差来表示,在数字通信系统中用误码率或误比特率来表示。

1.2 例题详解

例 1-1 一个由字母 A、B、C、D 组成的字,对于传输的每一个字母用二进制脉冲编码,00 代替 A,01 代替 B,10 代替 C,11 代替 D,每个脉冲宽度为 5 ms:

(1) 不同的字母是等可能出现时,试计算传输的平均信息速率。

(2) 若每个字母出现的可能性分别为

$$P_A = 1/5, \quad P_B = 1/4, \quad P_C = 1/4, \quad P_D = 3/10$$

试计算传输的平均信息速率。

解: (1) 不同的字母是等可能出现,即出现概率均为 $1/4$ 。

每个字母的平均信息量为 $H = -4 \times \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} = 2$ 比特/符号

因为每个脉冲宽度为 5ms,所以每个字母所占用的时间为

$$2 \times 5 \times 10^{-3} = 10^{-2} \text{ s}$$

每秒传送符号数为 $\frac{1}{10^{-2}} = 100$ 符号/秒

平均信息速率为 $2 \times 100 = 200$ b/s

(2) 平均信息量为

$$H = -\frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \log_2 \frac{3}{10} = 1.985 \text{ 比特/符号}$$

平均信息速率为 $1.985 \times 100 = 198.5$ b/s

例 1-2 一个离散信号源每毫秒发出 4 种符号中的一个,各相互独立符号出现的概率分别为 0.4、0.3、0.2、0.1。求该信号源的平均信息量和信息速率。

解: 利用熵的计算公式,平均信息量为

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^4 P_i \log_2 P_i \\ &= - (0.4 \log_2 0.4 + 0.3 \log_2 0.3 + 0.2 \log_2 0.2 + 0.1 \log_2 0.1) \\ &= 1.85 \text{ 比特/符号} \end{aligned}$$

信息速率为

$$R_b = \frac{H \times 1}{10^{-3}} = 1.85 \times 10^3 \text{ b/s}$$

1.3 习题解答

1.3.1 设英文字母 E 出现的概率为 0.105, x 出现的概率为 0.002。试求 E 及 x 的信息量。

解: E 的信息量 $I_E = \log_2 \frac{1}{0.105} = 3.25 \text{ bit}$

x 的信息量 $I_x = \log_2 \frac{1}{0.002} = 8.97 \text{ bit}$

1.3.2 某信息源的符号集由 A、B、C、D 和 E 组成, 设每一符号独立出现, 其出现概率分别为 1/4、1/8、1/8、3/16 和 5/16。试求该信息源符号的平均信息量。

解: 平均信息量, 即信息源的熵

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{3}{16} \log_2 \frac{3}{16} - \frac{5}{16} \log_2 \frac{5}{16} \\ &\approx 2.23 \text{ 比特 / 符号} \end{aligned}$$

1.3.3 设有四个消息 A、B、C、D 分别以概率 1/4、1/8、1/8 和 1/2 传送, 每一消息的出现是相互独立的, 试计算其平均信息量。

$$\begin{aligned} \text{解: 平均信息量 } H &= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \\ &= 1.75 \text{ 比特 / 符号} \end{aligned}$$

1.3.4 国际莫尔斯电码用点和划的序列发送英文字母, 划用持续 3 单位的电流脉冲表示, 点用持续 1 个单位的电流脉冲表示; 且划出现的概率是点出现概率的 1/3:

(1) 计算点和划的信息量;

(2) 计算点和划的平均信息量。

解: (1) 因为划出现的概率是点出现概率的 1/3, 所以, 点出现的概率为 $P_1 = 3/4$, 划出现的概率为 $P_2 = 1/4$ 。

故, 点的信息量 $I_1 = -\log_2 \frac{3}{4} \approx 0.415 \text{ bit}$

划的信息量 $I_2 = -\log_2 \frac{1}{4} = 2 \text{ bit}$

(2) 平均信息量 $H = \frac{3}{4} \times 0.415 + \frac{1}{4} \times 2 = 0.81 \text{ 比特 / 符号}$

1.3.5 设一信息源的输出由 128 个不同符号组成, 其中 16 个符号出现的概率为 1/32, 其余 112 个出现概率为 1/224。信息源每秒发出 1000 个符号, 且每个符号彼此独立。试计算该信息源的平均信息速率。

解: 平均信息量 $H = -16 \times \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{32} - 112 \times \frac{1}{224} \log_2 \frac{1}{224} = 6.405 \text{ 比特 / 符号}$

平均信息速率 $R_b = 6.405 \times 1000 = 6405 \text{ b/s}$

1.3.6 设一数字传输系统传送二进制码元的速率为 1200 b/s, 试求该系统的信息速率; 若该系统改成传送 16 进制信号码元, 码元速率为 2400 b/s, 则这时的系统信息速率为多少?

解: 传送二进制码元时 $R_b = R_{B2} \log_2 N = R_{B2} \log_2 2 = 1200 \text{ b/s}$

传送十六进制码元时 $R_b = R_{B16} \log_2 N = R_{B16} \log_2 16 = 2400 \times 4 = 9600 \text{ b/s}$

1.3.7 消息源以概率 $P_1 = 1/2, P_2 = 1/4, P_3 = 1/8, P_4 = 1/16, P_5 = 1/16$ 发送 5 种消息符号 m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 。若每个消息符号出现是独立的, 求每个消息符号的信息量。

解: 每个消息符号的信息量分别为

$$I_1 = \log_2 \frac{1}{P_1} = \log_2 \frac{1}{1/2} = 1 \text{ bit}$$

$$I_2 = \log_2 \frac{1}{P_2} = \log_2 \frac{1}{1/4} = 2 \text{ bit}$$

$$I_3 = \log_2 \frac{1}{P_3} = \log_2 \frac{1}{1/8} = 3 \text{ bit}$$

$$I_4 = \log_2 \frac{1}{P_4} = \log_2 \frac{1}{1/16} = 4 \text{ bit}$$

$$I_5 = \log_2 \frac{1}{P_5} = \log_2 \frac{1}{1/16} = 4 \text{ bit}$$

1.3.8 设有 4 个消息符号,其出现概率分别为 1/4、1/8、1/8、1/2。各消息符号出现是相对独立的。求该符号集的平均信息量。

解: 利用熵的计算公式,平均信息量为

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{i=1}^4 P_i \log_2 P_i \\ &= - \left(\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right) = 1.75 \text{ 比特 / 符号} \end{aligned}$$

1.3.9 若题 1.3.2 中信息源以 1000 b/s 速率传送信息,则传送 1 小时的信息量为多少? 传送 1 小时可能达到的最大信息量为多少?

解: 由题 1.3.2 已算得: $H = 2.23$ 比特 / 符号, 所以

$$\text{传送 1 小时的信息量为 } I_h = 2.23 \times 1000 \times 3600 = 8.028 \text{ Mbit}$$

$$\text{当符号等概时有最大熵 } H_{\max} = - 5 \times \frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} = 2.32 \text{ 比特 / 符号}$$

$$\text{传送 1 小时的信息量的最大值为 } I_{h\max} = 2.32 \times 1000 \times 3600 = 8.352 \text{ Mbit}$$

1.3.10 汉字电报中每位十进制数字代码出现概率如表 1.3.1 所示,求该离散信源的熵。

表 1.3.1 汉字电报中数字代码的出现概率

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
概率	0.26	0.16	0.08	0.062	0.06	0.063	0.155	0.062	0.048	0.052

解: 离散信息源的熵为

$$H = - \sum_{i=1}^{10} P_i \log_2 P_i = 3.06 \text{ 比特 / 符号}$$

1.3.11 证明两离散信息源 $\{x\}$, $\{y\}$ 条件熵和熵之间满足如下关系: $H(Y/X) \leq H(Y)$ 。

证: 因为 $H(Y) - H(Y/X) = I(X, Y) \geq 0$.

所以 $H(Y/X) \leq H(Y)$, 证毕。

1.3.12 已知非对称二进制信道,输入符号的概率场为

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2 \\ P_1, P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 1 \\ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

信道转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} P(0/0) & P(1/0) \\ P(0/1) & P(1/1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$, 求:

- (1) 输出符号集 Y 的平均信息量 $H(Y)$;
- (2) 条件熵 $H(X/Y)$ 与 $H(Y/X)$;
- (3) 平均互信息量 $I(X, Y)$ 。

解: (1) $P(y_1) = P(y = 0) = \frac{1}{4} \times 0.8 + \frac{3}{4} \times 0.1 = \frac{11}{40}$

$$P(y_2) = P(y = 1) = \frac{1}{4} \times 0.2 + \frac{3}{4} \times 0.9 = \frac{29}{40}$$

故输出符号集 Y 的平均信息量

$$H(Y) = -\frac{11}{40} \log_2 \frac{11}{40} - \frac{29}{40} \log_2 \frac{29}{40} = 0.849 \text{ 比特/符号}$$

(2) 条件熵

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P(x_i) P(y_j/x_i) \log_2 P(y_j/x_i) \\ &= - P(x_1) P(y_1/x_1) \log_2 P(y_1/x_1) - P(x_2) P(y_1/x_2) \log_2 P(y_1/x_2) \\ &\quad - P(x_1) P(y_2/x_1) \log_2 P(y_2/x_1) - P(x_2) P(y_2/x_2) \log_2 P(y_2/x_2) \\ &= -\frac{1}{4} \times 0.8 \log_2 0.8 - \frac{3}{4} \times 0.1 \log_2 0.1 - \frac{1}{4} \times 0.2 \log_2 0.2 - \frac{3}{4} \times 0.9 \log_2 0.9 \\ &= 0.532 \text{ bit} \end{aligned}$$

平均互信息量 $I(X, Y) = H(Y) - H(Y/X) = (0.849 - 0.532) \text{ bit} = 0.317 \text{ bit}$

又因为 $I(X, Y) = H(X) - H(X/Y)$

所以条件熵

$$H(X/Y) = H(X) - I(X, Y) = (0.811 - 0.317) \text{ bit} = 0.494 \text{ bit}$$

(3) 平均互信息量 $I(X, Y) = 0.317 \text{ bit}$

1.4 补充练习

1.4.1 已知八进制数字信号的传输速率为 1600 波特, 试问变换成二进制数字信号时的传输速率为多少?

1.4.2 已知二进制数字信号的传输速率为 2400b/s, 试问变换成四进制数字信号时, 传输速率为多少波特?

1.4.3 试问四进制、八进制的每一波形所含的信息量是二进制每一波形所含信息量的多少倍?

1.4.4 若采用 3 作为信息量对数的底, 试求该信息量单位与比特单位的关系。

1.4.5 英文字母中“e”的出现概率为 0.105, “c”的出现概率为 0.023, “o”的出现概率为 0.001, 分别计算它们的自信息量。

1.4.6 同时掷两个骰子, 也就是各面呈现的概率都是 1/6, 求:

- (1) “3 和 5 同时出现”这一事件的自信息量;
- (2) “两个 1 同时出现”这一事件的自信息量;
- (3) 两个点数的各种组合(无序对)的熵或平均信息量;
- (4) 两个点数之和的熵;
- (5) 两个点数中至少有一个是 1 的自信息量。

1.4.7 某一无记忆信源的符号集为 $\{0,1\}$,已知 $p_0 = 1/4, p_1 = 3/4$ 。

(1)求符号的平均熵;

(2)由 100 个符号构成的序列,求某一特定序列(例如有 m 个“0”和 $(100 - m)$ 个“1”)的自信息量的表达式。

(3)计算(2)中的序列的熵。

第2章 随机信号分析

2.1 内容提要

1. 信号参数具有随机性的信号为随机信号。凡是不能预测的噪声统称为随机噪声,简称噪声。随机信号和噪声统称为随机过程。随机过程可看成随机的时间函数或者看成随机变量随时间变化的集合。

2. 随机过程 $\xi(t)$ 的数字特征

(1) 数学期望 $E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx = a(t)$

(2) 方差 $D[\xi(t)] = E\{\xi(t) - E[\xi(t)]\}^2$
 $= E[\xi(t)]^2 - [E\xi(t)]^2$
 $= \sigma^2(t)$

(3) 协方差函数 $B(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\}$

(4) 相关函数 $R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$
 $B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - E[\xi(t_1)] \cdot E[\xi(t_2)]$

3. 平稳随机过程有狭义和广义之分

狭义平稳:对任意的 n 和 τ , 随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数满足

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)。$$

广义平稳:数学期望及方差与 t 无关,即 $E[\xi(t)] = a, D[\xi(t)] = \sigma^2$;且自相关函数只与时间间隔 τ 有关,即 $R(t_1, t_1 + \tau) = R(\tau)$ 。

狭义平稳一定是广义平稳,反之不一定成立。

4. 平稳随机过程的特性——各态历经性:即平稳随机过程的数字特征,可由随机过程的任一实现的数字特征来决定。

5. 对于实平稳随机过程 $\xi(t)$, 自相关函数 $R(\tau)$ 的主要性质:

(1) $R(0)$ 为 $\xi(t)$ 的平均功率 $R(0) = E[\xi^2(t)] = s$

(2) $R(\tau)$ 为偶函数 $R(-\tau) = R(\tau)$

(3) $R(0)$ 为 $R(\tau)$ 的上界 $|R(\tau)| \leq R(0)$

(4) $R(\infty)$ 为 $\xi(t)$ 的直流功率 $R(\infty) = E^2[\xi(t)]$

(5) $R(0) - R(\infty)$ 为 $\xi(t)$ 的方差,即交流功率为 $R(0) - R(\infty) = \sigma^2$

6. 平稳随机过程的功率谱密度应看作是每一可能实现的功率谱的统计平均,且自相关函数与其功率谱密度之间互为傅里叶变换关系。

$$P_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{或} \quad P_{\xi}(\omega) \Leftrightarrow R(\tau)$$

7. 高斯过程又称正态随机过程。若 ξ 为服从正态分布的随机变量,则其一维概率密度函数可表示成

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

式中, a, σ 为常量(分别为均值与方差)。

$f(x)$ 有如下特性:

(1) $f(x)$ 对称于 $x = a$ 。

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 内单调上升, 在 (a, ∞) 内单调下降, 且在点 a 处达到极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 。

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ 且 $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$

(4) 对不同的 a (固定 σ), 表现为 $f(x)$ 图形的左右平移; 对不同的 σ (固定 a), $f(x)$ 的图形将随 σ 的减小而变高和变窄。

一维的正态分布函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

定义概率积分函数 $\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$

误差函数 $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$

互补误差函数 $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-z^2} dz$

因此分布函数 $F(x)$ 又可表示成:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

由此, 可得出概率积分函数与误差函数之间的关系为

$$\text{erfc}(x) = 2 - 2\phi(\sqrt{2}x) \text{ 或 } \text{erf}(x) = 2\phi(\sqrt{2}x) - 1$$

8. 窄带随机过程有两种表示方法

(1) 包络、相位表示 $\xi(t) = a_{\xi}(t) \cos[\omega_c t + \varphi_{\xi}(t)], a_{\xi}(t) \geq 0$

(2) 同相、正交表示 $\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_c t - \xi_s(t) \sin \omega_c t$

式中: $\xi_c(t) = a_{\xi}(t) \cos \varphi_{\xi}(t)$ 为同相分量;

$\xi_s(t) = a_{\xi}(t) \sin \varphi_{\xi}(t)$ 为正交分量。

对于一个均值为零的窄带平稳高斯过程 $\xi(t)$, 其 $\xi_c(t)$ 与 $\xi_s(t)$ 同样是平稳高斯过程, 且均值都为零, 方差相同, 且在同一时刻上得到的 $\xi_c(t)$ 与 $\xi_s(t)$ 是互不相关的或统计独立的。

9. 窄带随机过程的包络 a_{ξ} 服从瑞利分布为

$$f(a_{\xi}) = \frac{a_{\xi}}{\sigma_{\xi}^2} \exp\left[-\frac{a_{\xi}^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right] a_{\xi} \geq 0$$

其相位 φ_{ξ} 服从均匀分布为

$$f(\varphi_{\xi}) = \frac{1}{2\pi}, 0 \leq \varphi_{\xi} \leq 2\pi$$

10. 白噪声——一个理想的宽带过程, 即其功率谱密度在整个频域内都均匀分布, 双边功率谱密度表示为

$$P_{\xi}(\omega) = \frac{n_0}{2} \text{ W/Hz}$$

11. 对于正弦波加窄带高斯噪声, 其混合信号形式为

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$$

式中, $n(t) = x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t$ 为窄带高斯过程, 其均值为零。正弦波的相位 θ 在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布, 且 A, ω_0 为已知, 则 $r(t)$ 的包络为

$$z(t) = \{[A\cos\theta + x(t)]^2 + [A\sin\theta + y(t)]^2\}^{1/2}$$

其概率密度函数服从广义瑞利分布:

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 + A^2)\right] I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right) \quad z \geq 0$$

式中, σ^2 为 $n(t)$ 的方差, $I_0(x)$ 为零阶修正贝塞尔函数。

12. 平稳随机过程通过线性系统。设输入 $\xi_i(t)$ 是平稳随机过程, 通过系统 $H(\omega)$, 输出过程为 $\xi_0(t)$, 则我们可以得到以下几个结论:

$$(1) E[\xi_0(t)] = E[\xi_i(t)] \cdot H(0)。$$

$$(2) R_0(t, t + \tau) = R_0(\tau)。$$

$$(3) P_{\xi_0}(\omega) = P_{\xi_i}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2。$$

因此, 输出过程 $\xi_0(t)$ 是广义平稳过程。

2.2 例题详解

例 2-1 设随机过程 $\xi(t)$ 可表示成 $\xi(t) = 2\cos(2\pi t + \theta)$, 式中 θ 是一个离散随机变量, 且 $P(\theta = 0) = 1/2, P(\theta = \pi) = 1/2$, 试求 $E_\xi(1)$ 及 $R_\xi(0, 1)$ 。

$$\text{解: } E_\xi(1) = E[2\cos(2\pi \times 1 + \theta)] = E[2\cos\theta] = 2\left[\frac{1}{2}\cos\theta\Big|_{\theta=0} + \frac{1}{2}\cos\theta\Big|_{\theta=\pi}\right] = 1$$

$$R_\xi(0, 1) = E[2\cos(0 + \theta) \cdot 2\cos(2\pi + \theta)] = 4E[\cos^2\theta] = 2$$

例 2-2 若随机过程 $z(t) = m(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中, $m(t)$ 是广义平稳随机过程, 且自相关函数 $R_m(\tau)$ 为

$$R_m(\tau) = \begin{cases} 1 + \tau & -1 < \tau < 0 \\ 1 - \tau & 0 \leq \tau < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

θ 是服从均匀分布的随机变量, 它与 $m(t)$ 彼此统计独立。

(1) 证明 $z(t)$ 是广义平稳的;

(2) 绘出自相关函数的 $R_z(\tau)$ 波形;

(3) 求功率谱密度 $P_z(\tau)$ 及功率 S 。

解: (1) 先求 $z(t)$ 的数学期望 $a(t)$:

$$a(t) = E[z(t)] = E[m(t)\cos(\omega_0 t + \theta)]$$

因为 θ 与 $m(t)$ 彼此统计独立, 所以

$$\begin{aligned} a(t) &= E[m(t)] \cdot E[\cos(\omega_0 t + \theta)] \\ &= E[m(t)] \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= E[m(t)] \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

再求 $z(t)$ 的自相关函数:

$$R_z(t, t + \tau) = E[m(t)\cos(\omega_0 t + \theta)m(t + \tau)\cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta)]$$

$$\begin{aligned}
 &= E[m(t)m(t+\tau)] \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta \\
 &= R_m(\tau) \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau
 \end{aligned}$$

因为 $z(t)$ 的数学期望与 t 无关, 是常数, 且自相关函数与 t 无关, 只与时间间隔 τ 有关, 所以 $z(t)$ 是广义平稳的随机过程。

$$(2) R_z(\tau) = \frac{1}{2} R_m(\tau) \cos \omega_0 \tau = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - |\tau|) \cos \omega_0 \tau & |\tau| \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

设 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 并取 $T = \frac{1}{2}$, 则 $R_z(\tau)$ 的图形如图 2.2.1 所示。

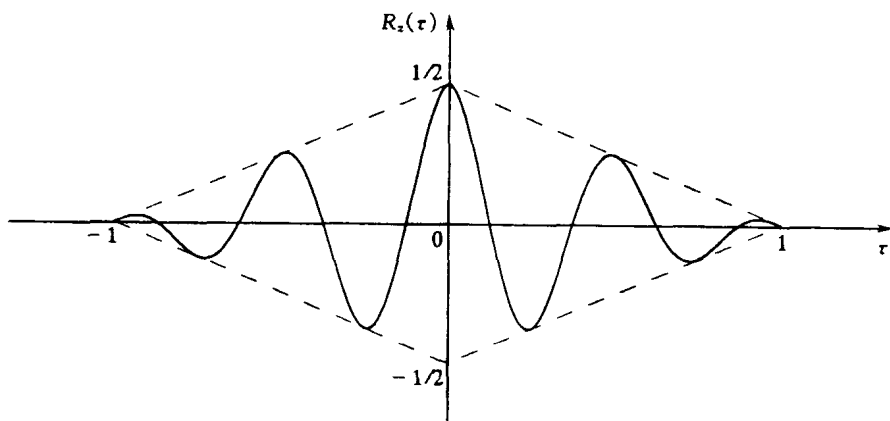


图 2.2.1 例 2-2 图

(3) 因为功率谱密度 $P_z(\omega) \Leftrightarrow R_z(\tau)$,

$$\text{所以 } P_z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{4} \left[\text{Sa}^2\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) \right]$$

$$\text{功率 } S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_z(\omega) d\omega = \frac{1}{2}$$

$$\text{或 } S = R_z(0) = \frac{1}{2}$$

例 2-3 设有一个随机二进制矩形脉冲波形, 它的每一个脉冲的持续时间为 T_b , 脉冲幅度取 ± 1 的概率相等。现假设任一间隔 T_b 内波形取值与任何别的间隔内取值统计无关, 且过程具有广义平稳性, 试证:

$$(1) \text{ 自相关函数 } R_\xi(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T_b & |\tau| \leq T_b \\ 0 & |\tau| > T_b \end{cases}$$

$$(2) \text{ 功率谱密度 } P_{\xi(\omega)} = T_b [\text{Sa}(\pi f T_b)]^2.$$

证明: (1) 由题意, 设 $\xi(t)$ 是随机二进制信号的一个样本函数, 如图 2.2.2(a) 所示。

因为脉冲幅度取 ± 1 的概率相等, 所以 $\xi(t)$ 的数学期望为

$$E[\xi(t)] = +1 \cdot P[\xi(t) = 1] + (-1) \cdot P[\xi(t) = -1] = (+1) \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

令 t_1, t_2 是任意选取的两个时刻:

a. 当 $|t_2 - t_1| > T_b$ 时