复变函数论习题集

（上 集）

数学系函数论教研室

梁世安 译

目　　录

上　　集

目　　录

下　　集

序　　言

《复变函数论习题集》主要供综合大学数学物理系及数学力学系使用，同样地，师范院校的数学物理系也适用.

作者们认为本《习题集》对于专门从事连续介质力学（流体动力学、弹性理论）和电子理论的人是有益的．因为在那些学科中，会有大量的问题，这些问题或者是复变函数论的直接应用，或者是讲授这些学科的数学基础（保角映射．调和函数．位势．哥西型积分等）．

涉及到综合大学必修的复变函数论这门课程的习题，基本上都收集在Ⅰ、Ⅱ、（§§、1，3，4）、Ⅳ、Ⅴ、Ⅶ，Ⅹ（§1）内.

在本《习题集》中，也存在一些超出大纲的习题．其中的某些问题，主要是做为大学生进修班的作业和做为研究班复变函数论课程的材料.

看来，本《习题集》十分完全地反映出复变函数的基本章节，十分接近于教学计划.

为了便于使用《习题集》，在目录中，除章和节命名之外，有时还列举其中的一些基本问题（这主要涉及到基本的教学材料）．

我们假设，使用《习题集》的人熟悉A.И马库雪维奇的《解析函数论简明教程》内容的相应章节，因而，照例没有引证这本教科书．如果对补充材料感兴趣，那么必要的参考知识及文献的引证都给出了．最常引用的书列举如下：

〔1〕——A.И马库雪维奇，解析函数论．国立技术出版社1950年.

〔2〕——A.И马库雪维奇，解析函数论简明教程．莫斯科国立技术出版社1957年.

〔3〕——M.A拉甫伦捷叶夫、Б.B.沙巴特，复变函数论方法．莫斯科国立物理数学出版社1958年第二版。

〔4〕И.И.普里瓦洛夫　复变函数引论．莫斯科国立物理数学出版社1960年第10版，

题解的全部提示，列举在基本课文中．用星号标记的那些最困难的习题，在答案中给出了解答。

在组成《习题集》的过程中，使用了过去已经有的无论是俄罗斯的或者是外国的教科书，参考书和专题论文.

本《习题集》的手稿是经过莫斯科大学函数论教研室的同事讨论过，其中尤其是Б.B沙巴特副教授的一系列的有价值的建议，作者对于他们表示诚恳地谢意.

在核对和准备本《习题集》的某些问题中，Л·И渥尔柯夫斯基教授的学生们给以了很大的帮助．他们是：Б.A维尔特盖依莫，C.Я.古斯曼，B.B都木柯柯依内，B.Г米海林础柯，Ю.Л娄金，Э.B斯塔尔柯夫及И.И佛里莫诺夫在组成第九章§3习题中，И.H别新参加了工作，许多问题是由Л.Э艾利斯文尔茨提议的，有关《习题集》的很重要的工作是由书的总编辑H.A乌柯洛夫完成的

作者对于提到的同志们表示深深地感谢.

作者.

第一章　复数与复变函数

在本章和本书的所有地方，其中不作相反地声明，通常总是这样表示复数 $z=x+iy=re^{i\varphi}$，$w=u+iv=\rho e^{i\theta}$（x,y,u,v,r,ρ,φ和θ是实数，$r\geqslant 0$，$\rho\geqslant 0$）；$Re z=x$，$Im z=y$，$Arg z=\varphi$，$|z|=r$，$\bar{z}=x-iy$. 如果不做补充说明，则用不等式$-\pi<arg z\leqslant\pi$表示幅角$arg z$的主值；表示复数z的平面叫做z平面；通常的述语《复数 z》和《点 z》在使用上是同义语.

§1. 复　　数

1. 完成所指出的运算：

   1）$\frac{1}{i}$；　2）$\frac{1-i}{1+i}$；　3）$\frac{2}{1-3i}$；　4）$(1+i\sqrt{3})^3$.

2. 求复数的模和幅角（a和b——实数）：

   1）$3i$；　2）-2；　3）$1+i$；　4）$-1-i$；　5）$2+5i$；
   6）$2-5i$；　7）$-2+5i$；　8）$-2-5i$；　9）$bi(b\neq 0)$；
   10）$a+bi$ $(a\neq 0)$.

3. 求下列根式的所有值并把它们做出：

   1）$\sqrt[3]{1}$；　2）$\sqrt[3]{i}$；　3）$\sqrt[4]{-1}$；　4）$\sqrt[6]{-8}$；
   5）$\sqrt[8]{1}$；　6）$\sqrt{1-i}$；　7）$\sqrt{3+4i}$；　8）$\sqrt[3]{-2+2i}$；
   9）$\sqrt[5]{-4+3i}$.

4. 证明$\sqrt{z^2-1}$的两个值位于过坐标原点且平行于以-1，1和z为顶点的三角形由顶角z所引出的角平分线上的直线上.

5. 设m和n是整数. $(\sqrt[n]{z})^m$表示有不同的值$\frac{n}{(m,\ n)}$，其中$(n,\ m)$是m和n的最大公约数. 说明$(\sqrt[n]{z})^m$值的集合和集合$\sqrt[n]{z^m}$重合的充分必要条件是$(n,m)=1$，即n和m互质.

6. 从几何直观出发，试证下述不等式.

   1）$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$；　2）$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$；
   3）$|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||arg z|$，

说明每一种情况等号成立的条件.

7．试证恒等式

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

并说明它的几何意义．

8．试证．如果$|z_1|=|z_2|=|z_3|$，则有

$$arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{1}{2}\,arg\frac{z_2}{z_1}.$$

9．试证，如果$z_1+z_2+z_3=0$及$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，则点z_1，z_2，z_3是正三角形的顶点，且内接于单位圆．

10．试证，如果$z_1+z_2+z_3+z_4=0$，及$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$，则点z_1，z_2，z_3，z_4或者是矩形的顶点，或两两重合．

11．求正n边形的顶点，如果它的中心在$z=0$，而它的一个顶点是已知的．

12．点z_1和z_2是正n边形的相邻的顶点，求与z_2相邻的顶点z_3（$z_3\neq z_1$）．

13．已知平行四边形的顶点，求和z_2相对的第四个顶点z_4．

14．在什么条件下，三个两两不重合的点z_1，z_2，z_3位于同一条直线上？

15．在什么条件下，四个两两不重合的点z_1，z_2，z_3，z_4位于同一圆周上或同一直线上？

16.*点z_1，z_2，……，z_n位于通过座标原点的某一条直线的同一侧，试证，点$\frac{1}{z_1}$，$\frac{1}{z_2}$，……，$\frac{1}{z_n}$也有类似的性质，且$z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n\neq 0$；$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{z_n}\neq 0$．

17．试证，如果$z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n=0$，则通过坐标原点的任意直线分点$z_1$，$z_2$，……，$z_n$在直线的两侧——只要这些点不在这个直线上

18．试证，通过质量分别为m_1，m_2……，m_n的质点组z_1，z_2，……，z_n的重心的任何直线，把这些点分开——如果只有一个点不在这个直线上．

在题19—29中，要求说明所指关系式的几何意义

19．$|z-z_0|<R$；$|z-z_0|>R$；$|z-z_0|=R$．

20．$|z-2|+|z+2|=5$．

21．$|z-2|-|z+2|>3$．

22．$|z-z_1|=|z-z_2|$．

23．1）$Rez\geqslant C$；2）$Imz<C$．

24．$0<Re(iz)<1$．

25．$\alpha<argz<\beta$；$\alpha<arg(z-z_0)<\beta$　（$-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi$）．

26．$|z|=Rez+1$．

27．$Rez+Imz<1$．

28．$Im\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$；　　$Re\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$

29．1）$|z|<argz$，如果$0\leqslant argz<2\pi$；

2）$|z|<\arg z$，如果 $0<\arg z\leqslant 2\pi$.

在30—33题中，要求确定所给方程在 z 平面的曲线族.

30．1）$Re\frac{1}{z}=C$；2）$Im\frac{1}{z}=C$，　　$(-\infty<C<\infty)$

31．1）$Rez^2=C$；2）$Imz^2=C$　　$(-\infty<C<\infty)$

32．$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$　　$(\lambda>0)$

33．$\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\alpha$　　$(-\pi<\alpha\leqslant\pi)$

34．1）z 平面的曲线族的方程为

$$|z^2-1|=\lambda \qquad (\lambda>0)$$

对于怎样的 λ 值，曲线族中的线将由一个简单的曲线所组成，又对什么样 λ 值族中的曲线分裂？

2）对于曲线族

$$|z^2+az+b|=\lambda \qquad (\lambda>0)$$

说明同样的问题.

35．$\arg z$ 为由任何 $z\neq 0$ 的点所定义的函数，若 $|z|-2\pi<\arg z\leqslant|z|$．问使函数 $\arg z$ 连续性受到破坏的几何轨迹是什么？

36．函数 $\arg z$ 是由任何 $z\neq 0$ 及不等式

$$\ln|z|-2\pi<\arg z\leqslant\ln|z|$$

所定义的单值函数，问破坏这个函数连续性的点的几何轨迹是什么？

37．如果

1）$f(z)=\sqrt{z-1}$；　2）$f(z)=\sqrt[3]{z-1}$；　3）$f(z)=\sqrt{z^2-1}$；

4）$f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$；　5）$f(z)=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$，

$Argf(z)$ 当 $z=2$ 时的初始值取做零．使点 z 绕着坐标原点为中心的圆周按反时针方向运动并且回到 $z=2$ 时，计算指明了周数后的 $Argf(z)$ 之值.

测 地 投 影

38．引进投影公式，半径为1的球面上的点 P 用坐标（ξ，η，ζ）表示．z 平面为通过球的中心．z 平面上的坐标（x，y）对应点是 z．如何用 ξ，η，ζ（ξ 轴与 η 轴假想成与 x，y 轴重合），来表示 x 和 y.

附注：在38题中，存在着复平面与切于该复平面半径为 $\frac{1}{2}$ 的球上的点间对应关系，也出现另外一种点的对应方式，它是半径为1的球面上的点与通过其球心的复平面上的点间的对应关系．参看〔1．第1章§5〕

39. 点1，-1，i，$\frac{1-i}{\sqrt{2}}$在球面上的象是什么？

40. 宽为$\beta\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$的平行线，在平面上的象是什么？什么样的点对应《南极》和《北极》？

41. 求球面上的象：

1）射线 $\arg z=\alpha$；

2）圆周$|z|=r$.

42. 在球面上，怎样的点对与下列点集互相对称：

1）点$z=0$的对称点

2）实轴的对称点

3）单位圆周的对称点集.

43. 满足什么条件的点z_1和z_2，是球面直径两个相反的点的测地投影？

44. 球面上什么样的点与点z和$\frac{1}{\bar{z}}$相对称？

45. 求由下列不等式所确定的域在球面上的像：

1）$Im z>0$；　2）$Im z<0$；　3）$Re z>0$；

4）$Re z<0$；　5）$|z|<1$；　6）$|z|>1$.

46. 平面上的平行直线族，对应于球面上什么？

47. 试证球面上的圆周的测地投影，在平面上是圆或是直线. 球面上什么样的圆周对应直线？

48. 设K是平面上的圆周，对应于球面上的是圆周K'，N是球面的北极，S是沿着K'截球面所得圆锥的顶点（假设K'不是大圆），试证，圆K的中心位于射线SN上. 研究K'是大圆的特殊情况.

49. 试证：球面上曲线间的夹角的测地投影，等于平面上它们像间夹角. 在球面上如果按着内法线的关系确定绕行的正向，则可证像间夹角保持正向.

50. 求连结球面上的点z及其对应点a的弦长. 当a是无穷远点时，研究这个情况.

51. 点z_1和z_2是所给二点，（其中的一点可以是无穷远点）求球面上距所给两点等远点的z平面上的几何轨迹.

四元素

具有实系数的四个单位，一个是实单位，三个是虚单位i，j，k；这样一组数的线性组合，叫做四元素：①

$$q=a+bi+cj+dk,$$

① 超复数和四元素参看Энциклопедию初等数学Ⅰ章.

单位元素的乘积由下列等式确定：

$$i^2=j^2=k^2=-1;$$
$$ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j;$$
$$1\cdot i=i\cdot 1=i,\ 1\cdot j=j\cdot 1=j,\ 1\cdot k=k\cdot 1=k.$$

具有同一分量（单位的系数）的四元素认为是相等的。四元素的加法，是对应单位相加。乘法服从结合律和分配律。例如，

$$(2i+4j)(3j-2k)=(2i)(3j)+(4j)(3j)+(2i)(-2k)+(4j)(-2k)=$$
$$=2\cdot 3\ i\cdot j+4\cdot 3\ j^2+2\cdot(-2)\cdot i\cdot k+4\cdot(-2)\cdot j\cdot k=6k-12+4j-8i.$$

数 $q=a+bi+cj+dk$ 与 $\bar{q}=a-bi-cj-dk$ 叫做**互为共轭数**. 数 $N(q)=a^2+b^2+c^2+$ $+d^2$ 叫做四元素的 q **范数**.

52. 试证四元素唯一确定了减法运算的进行，而当分母不为0时，唯一确定了除法运算的施行。

53. 试证 $\overline{q_1q_2}=\bar{q}_1\cdot\bar{q}_2$.

54. 试证等式

$$N(q_1q_2)=N(q_1)N(q_2)$$

并利用该等式说明，能写成四个整数平方和的两个整数乘积可以表达成四个整数平方和的形式。做出这个表达式。

55.*用四元素构造整矩阵，

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

使其按水平方向，铅直方向和主对角线方向元素的平方和相同，且满足关系式

$$A_kA_l+B_kB_l+C_kC_l+D_kD_l=0\quad(k\neq l,\ k,\ l=1,2,3,4).$$

§2. 初等超越函数

定义，

$$expz=e^z=e^x(\cos y+i\sin y);$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\qquad chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2};$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\qquad shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2};$$

$$tgz=\frac{\sin z}{\cos z};\qquad thz=\frac{shz}{chz};$$

$$ctgz=\frac{\cos z}{\sin z};\qquad cthz=\frac{chz}{shz}.$$

56. 利用 e^z 的定义证明

1）$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$；　　2）$e^{z+2\pi i}=e^{z}$.

2）如果，$e^{z+w}=e^{z}$，则对任何 z，有

$$w=2\pi ki \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

关系式 $\exp i\varphi=e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$（**尤拉公式**）可将复数 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 的三角形式写成指数形式 $z=re^{i\varphi}$. 今后幅角总取主值，即 $-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

57. 将数 1，-1，i，$-i$，$1+i$，$1-i$，$-1+i$，$-1-i$ 写成指数形式.

58. 求 $e^{\pm\frac{\pi}{2}i}$；$e^{k\pi i}$（$k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$）

59. 求下列复数的模和幅角的主值：e^{2+i}；c^{2-3i}；e^{3+4i}；e^{-3-4i}；$-ae^{i\varphi}$($a>0$, $|\varphi|\leqslant\pi$)；$e^{-i\varphi}$($|\varphi|\leqslant\pi$).

60. 求和：

1）$1+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots\cos nx$；

2）$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin nx$；

3）$\cos x+\cos 3x+\cdots\cdots+\cos(2n-1)x$；

4）$\sin x+\sin 3x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x$；

5）$\sin x-\sin 2x+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx$.

61. 求和：

1）$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\cos(\alpha+n\beta)$；

2）$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\sin(\alpha+n\beta)$.

62. 依相应函数的定义证明：

1）$\sin^2 z+\cos^2 z=1$；　　2）$\sin z=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)$；

3）$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cdot\cos z_2+\cos z_1\cdot\sin z_2$；

4）$\cos(z_1+z_2)=\cos{}_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

5）$tg2z=\dfrac{2tgz}{1-tg^2z}$；

6）$ch(z_1+z_2)=chz_1\cdot chz_2+shz_1\cdot shz_2$.

63. 如果 $\cos(z+w)=\cos z$，试证对任何 z 有 $w=2\pi k$　（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$）

64. 证明：

1）$\sin iz=ishz$；　　2）$\cos iz=chz$，　　3）$tgiz=ithz$；

4）$ctgiz=-icthz$.

65. 通过三角函数和超越函数的实角，将下列函数的实部、虚部、模表示出来：

1）$\sin z$；　　2）$\cos z$；　　3）$\mathrm{tg}z$；　　4）shz；

5）chz；　　6）thz.

66. 求下列函数值的实部和虚部：

1）$\cos(2+i)$；　　2）$\sin 2i$；　　3）$tg(2-i)$；

4）$ctg\left(\dfrac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$　　5）$cth(2+i)$；　　6）$th\left(\ln 3+\dfrac{\pi i}{4}\right)$.

67. 对每一个函数 e^{z}, $\cos z$，$\sin z$，tgz，chz，$cthz$ 求点 z 的集合，使其具有：

1）实值；

2）虚数值.

定义

$$Lnz=ln r+i\varphi+2\pi ik \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)$$

$$lnz=ln r+i\varphi \qquad (-\pi<\varphi\leqslant\pi)$$

（lnz 叫做大 Lnz 的主值）.

68. 试计算

1）$Ln4$，$Ln(-1)$，$ln(-1)$；　　2）Lni，lni；

3）$Ln\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$；　　4）$Ln(2-3i)$，$Ln(-2+3i)$

69. 找出贝努力在诡辩论中的错误：$(-z)^2=z^2$，因为 $2Ln(-z)=2Lnz$，所以 $Ln(-z)=Lnz$（!）

70. 当 $z=2$ 时，$Imf(z)$的初始值取做零. 使点 z 沿着中心在 $z=0$ 的圆周作反时针方向运动一周并返回到 $z=2$ 时. 试计算，当动点 z 连续变化时，$f(z)$按着所指的方式变化的最后的值. 如果：

1）$f(z)=2Lnz$；　　2）$f(z)=Ln\frac{1}{z}$；

3）$f(z)=Lnz-Ln(z+1)$；　　4）$f(z)=Lnz+Ln(z+1)$.

对任何复数 $a\neq0$ 及 α，定义

$$a^{\alpha}=exp\{\alpha Lna\} \qquad (1)$$

或者，如果按以前①对 e^z 的理解 $expz$，则

$$a^{\alpha}=e^{\alpha Ln_a}.$$

71. 求下列幂的所有值：

1）$1^{\sqrt{2}}$；　2）$(-2)^{\sqrt{2}}$；　3）2^i；　4）1^{-i}；

5）i^i；　6）$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$；　7）$(3-4i)^{1+i}$；　8）$(-3+4i)^{1+i}$.

72. 试证有理指数幂$\left(\alpha=\frac{m}{n}\right)z^{\alpha}$的一般定义情形与通常的定义

$$z^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{z})^m$$

相吻合.（参看问题5）

73. 值集合

$$a^{2\alpha},\ (a^{\alpha})^2,\ (a^2)^{\alpha}$$

是否相同？

依定义，等式 $w=Arccosz$ 等价于等式 $z=cosw$. 类似的定义函数 $Arcsinz$，$Arctgz$，$Arcctgz$，及双曲函数 $Archz$，$Arshz$. $Arthz$，$Arcthz$ 的反函数.

---

① 根据（1）$e^z=exp(zLne)=exp\{z(1+2\pi ik)\}$，但是，如果没有相反的声明，我们将认为k=0，即以前的 $e^z=expz$。

74．证明下列等式（根式取它的所有值）：

1）$Arc\cos z=-iLn(z+\sqrt{z^2-1})$；

2）$Arc\sin z=-iLni(z+\sqrt{z^2-1})$；

3）$Arctgz=\frac{i}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}=\frac{1}{2i}Ln\frac{1+iz}{1-iz}$，

4）$Arcctgz=\frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}$；

5）$Archz=Ln(z+\sqrt{z^2-1})$；

6）$Archz=Ln(z+\sqrt{z^2+1})$；

7）$Arcthz=\frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}$；

8）$Arcthz=\frac{1}{2}Ln\frac{z+1}{z-1}$

75．证明：对 $Arc\cos z$ 的任何值，可以选取这样的值 $Arc\sin z$，使这些值之和等于 $\frac{\pi}{2}$．对于 $Arctgz$ 及 $Arcctgz$ 证明有类似的结果．

附注：等式 $Arc\sin z+Arc\cos z=\frac{\pi}{2}$ 及 $Arctgz+Arcctgz=\frac{\pi}{2}$ 永远具有以前问题中所指的意义．

76．试证，$Arc\cos z$ 的值的全体，含在公式

$$Ar\cos z=\pm iLn(z+\sqrt{z^2-1})\text{中}$$

其中 $\sqrt{z^2-1}$ 理解为取它的值的任何一个．

77．1）对于怎样的 z 值，所有函数 $Arc\cos z$，$Arc\sin z$ 和 $Arctgz$ 取实值？

2）对于怎样的 z 值，函数 $Arshz$ 总取虚值？

78．求下列函数值的全体：

1）$Arc\sin\frac{1}{2}$；　2）$Arc\cos\frac{1}{2}$；　3）$Arc\cos 2$；

4）$Arc\sin i$；　5）$Arctg(1+2i)$；　6）$Arch2i$；　7）$Arth(1-i)$

§3．复　变　函　数

79—85题，要求确定所给方程所确定的直线．

79．$z=1-it$；　$0\leqslant t\leqslant 2$．

80．$z=t+it^2$；　$-\infty<t<\infty$．

81．$z=t^2+it^4$；　$-\infty<t<\infty$．

82．$z=a(\cos t+i\sin t)$；　$\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2}$；　$a>0$．

83．$z=t+\frac{i}{t}$；　$-\infty<t<0$．

84. 1) $z=t+i\sqrt{1-t^2}$; $-1\leqslant t\leqslant 1$;

2) $z=-t+i\sqrt{1-t^2}$; $-1\leqslant t\leqslant 0$ （取算术根）

85. 1) $z=a(t+i-ie^{-it})$; $-\infty<t<\infty$, $a>0$

2) $z=ia+at-ibe^{-it}$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$, $b<0$.

86. 对映射 $w=z^2$：

1) 求直线 $x=C$，$y=C$，$x=y$，$|z|=R$，$\arg z=\alpha$ 的像．并说明它们之中哪些是互为单值变换；

2) 求线 $u=C$，$v=C$ 的逆像．($w=u+iv$)

87. 对映射 $w=\frac{1}{z}$，求：

1) 线 $x=C$，$y=C$，$|z|=R$，$\arg z=\alpha$，$|z-1|=1$ 的像；

2) 线 $u=C$，$v=C$ 的逆像．

88. 对映射 $w=\frac{1}{z}+z$ 及 $w=z-\frac{1}{z}$ 求圆周 $|z|=R$ 的像．

89. 对映射 $w=z+\frac{1}{z}$ 求 w 平面的直角网（$u=C$，$v=C$）在 z 平面的逆像．

90. 对于映射 $w=\frac{z}{(1-z)^2}$，圆周 $|z|=1$ 变成什么？

91. 对映射 $w=e^z$ 求：

1) $x=C$，$y=C$，$x=y$ 的像；

2) $\rho=\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\infty$）的逆像．

92. 借助于函数：

1) $w=z^2+z$; 2) $w=\operatorname{ch} z$; 3) $w=e^{z^2}$

求 z 平面的直角网（$x=C$，$y=C$）的变换．

93. 借助于函数 $w=e^z+z$ 的映射，位于带域 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 内的线段 $x=C$，和直线 $y=C$ 变成什么？

94. 极网 $|w|=R$，$\arg w=\alpha$，通过变换：

1) $w=e^{\frac{1}{z}}$; 2) $w=e^{z^2}$

变成 z 平面上的什么？

95. 求集合：

1) $z=1+(-1)^n\frac{n}{n+1}$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$);

2) $z=\frac{1}{m}+\frac{i}{n}$ （m，n 是任意整数）

3) $z=\frac{p}{m}+i\frac{q}{n}$ （m，n，p，q 是任意整数）

4) $|z|<1$.

的极限点.

96. 试证从无穷有界的点列$\{z_n\}$中可以选出收敛的子列.

97. 证明下述命题:

1) 序列$\{z_n=x_n+iy_n\}$的收敛，等价于序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的收敛.

2) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}z_n\neq 0$ 存在的充分必要条件是极限$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|\neq 0$ 和$\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n$(有确定定义的$\arg z_n$) 存在. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$不是负数，则可以认为，比如$-\pi<\arg z_n\leqslant\pi$.

在什么情况下，序列$\{z_n\}$的收敛刚好等价于序列$\{|z_n|\}$的收敛?

98. 在97题论断的基础上证明:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{z}-1)]=\ln r+i\varphi+2\pi ik \qquad (k=0,1,2,\cdots\cdots)$.

99*. 函数 $f(z)$定义在点z_0的邻域若对任何收敛于 z_0 的序列$\{z_n\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=f(z_n)$时，叫做是在点$z_0$关于海因连续; 而，如果对任意的 $\alpha>0$，存在这样的 $\delta(\varepsilon)>0$，满足不等式$|z-z_n|<\delta$的点，有$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，时叫做是哥西意义下的连续. 试证这两个命题的等价性（参见[Ⅰ]第一章）3.6）.

100. 函数$\dfrac{Rez}{z}$，$\dfrac{z}{|z|}$，$\dfrac{Re(z^2)}{|z|^2}$，$\dfrac{zRez}{|z|}$对于$z\neq 0$有定义，其中那个函数可以在点$z=0$做补充定义，使它们在该点连续?

101. 函数

1) $\dfrac{1}{1-z}$. 2) $\dfrac{1}{1+z^2}$

在单位圆内（$|z|<1$）是否连续? 是否一致连续?

102. 1) 试证函数$e^{-\frac{1}{|z|}}$在圆$|z|\leqslant R$上，在点$z=0$处破坏了一致连续性.

2) 函数$e^{-\frac{1}{z^2}}$还在这个区域上，是否一致连续?

3) 函数$e^{-\frac{1}{z^2}}$在邻域: $0<|z|\leqslant R$，$|\arg z|\leqslant\dfrac{\pi}{6}$内是否一致连续?

103. 函数$w=e^{-\frac{1}{z}}$除$z=0$外，处处有定义，试证明:

在半圆$0<|z|\leqslant 1$，$|\arg z|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$内，这个函数有界但不连续;

2) 在这个半圆内函数连续但非一致连续;

3) 在扇形$0<|z|\leqslant 1$，$|\arg z|\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$上函数一致连续.

104. 函数 $f(z)$在$|z|<1$内一致连续. 试证对于圆周$|z|=1$上的任意点ζ，及任意点列$z_n\to\zeta$，$|z_n|<1$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$存在. 并且可以证明这个极极限的存在不依赖

于点列$\{z_n\}$的选取和和函数在圆周上极限过程，在整个闭圆上是连续的.

§4. 解析函数及调和函数

哥西—黎曼条件

105. 对函数 z^n，e^z，$\cos z$，Lnz 检验哥西—黎曼条件并证明

$$(z^n)'=nz^{n-1},\qquad (e^z)'=e^z,$$

$$(\cos z)'=-\sin z,\quad (L_nz)'=\frac{1}{z}.$$

106. 写出极座标的哥西—黎曼条件：

107. 如果 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，并且从向量 s 依逆时针方向转动 $90°$ 角到向量 n，向量 s 与向量 n 互相垂直. 试证

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n}\quad 及\quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial s}和\frac{\partial}{\partial n}\right)$是关于两个实变量所对应方向的导数.

108. 试证函数 $f(z)=\bar{z}$ 处处不可微分.

109. 试证函数 $w=zRez$ 只在点 $z=0$ 可微，求出 $w(0)$.

110. 试证函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 处满足 $c-R$ 条件，但不存在导数.

111. 试证下列论断：

1）对函数 $w=f(z)$，如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[Re\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$$

存在，则偏导数 u_x 和 u_y 存在并相等.

2）如果极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left[Im\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$存在，则偏导数 u_y 和 v_x 存在，并且 $u_y=-v_x$.

3）如果事先假定函数 u 和 v 是可微的，则从1）和2）所给出的极限中的任何一个的存在，可以推出另外一个存在，因而函数 $f(z)$是可微的.

112. 函数 $w=f(z)$在 z_0 上具有下述性质：1）u 和 v 可微；2）极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$

存在，试证 $f(z)$ 或 $\overline{f(z)}$ 在点 z_0 可微.

114. 函数 $f(z)=u+iv=\rho e^{i\theta}$ 是解析函数，函数 u,v,ρ,θ 中的某一个恒等于常数，则函数 $f(z)$是常数.

调　和　函　数

函数 $u(x,\ y)$在某个区域上具有二阶连续的偏导数并满足拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

时，叫做**调和函数**．由哥西一黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

联系的两个调和函数，叫做**共轭调和函数**．

115．证明下列论断：

1）调和函数的线性组合仍是调和函数

2）如果调和函数 $u(x, y)$的自变量经过反演变换

$$x=\frac{\xi}{\xi^2+\mu^2}, \qquad y=\frac{\eta}{\xi^2+\mu^2}$$

后，则变换后的函数仍是调和函数。

3）如果调和函数 $u(x. y)$ 的变量经变换 $x=\varphi(\xi\eta,)$， $y=\varphi(\xi, \eta)$ 后，则函数仍是调和函数（对变量 ξ， η 而言）其中 φ 和 ψ 是共轭调和函数

4）设 $u(x, y)$和 $v(x, y)$是共轭调和函数，且行列式 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ 在某个区域内不等于零，则反函数 $x(u,v)$，$y(u,v)$也是互为共轭的调和函数。

116．1）试证在单连通区域G内所有调和函数 $u(x,y)$，有彼此间只差一个常数的共轭调和函数

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C.$$

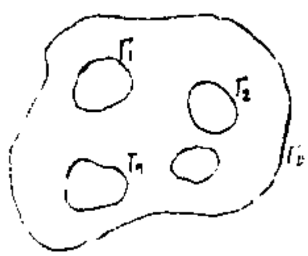

图 1

2）如果由围线 Γ_0 的外部和围线 Γ_1，Γ_2，Γ_3，……Γ_n 的内部所围成的多连通区域G内（图1）（其中每一个可以退化成点），则可以断定函数 $v(x,y)$ 是多值的，并且它的值的一般公式是

$$v(x,y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} m_k\pi_k+C.$$

积分是沿区域G的边界进行，m_k 是整数，并且

$$\pi_k=\int_{r_k} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

其中r_k是简单闭围线，它们之中的每一条都在它们本身的内部包含了边界(Γ_k)的一个连接部分。（数 π_k 叫做**积分周期或周期常数**）．

函数 $u(x, y)$ 单值的充要条件是所有的 π_k 等于零．

附注：如果函数 $u(x, y)$ 只在无穷远点上调和．围线可以不存在．根据定义、这意味着从函数 $u(x, y)$ 通过反演变换（参看115题．2）所得到的函数 $u(x, y)$ 在座标原点是调和的。可以证明，这时 $\sum_{k=1}^{n}\pi_k=0$．

117．假设已知解析函数是无穷可微的．试证下述定理：