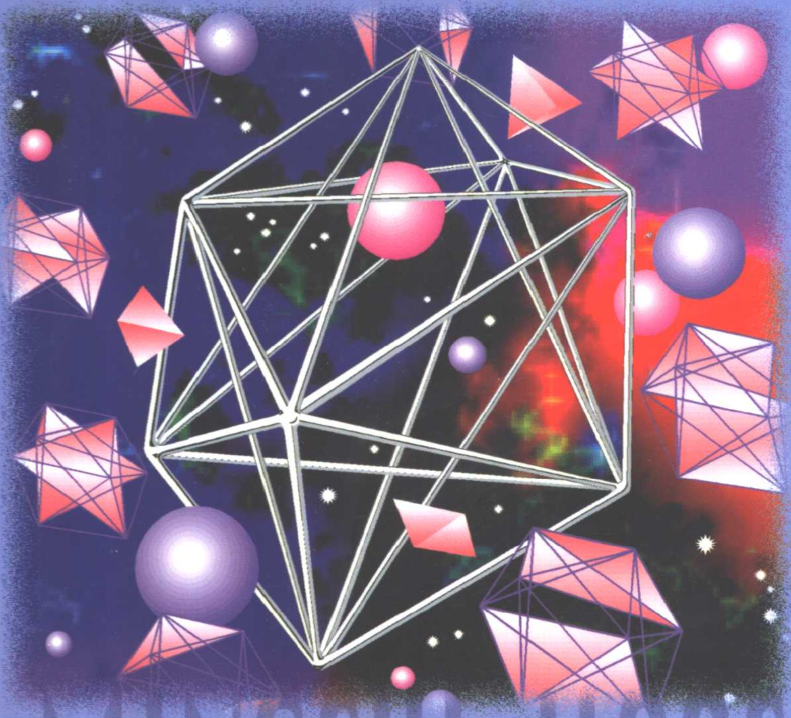
# 十大名师教数学

SHIDA MINGSHI JIAOSHUXUE

## 高考卷

GAOKAO JUAN



SHIDA MINGSHI JIAOSHUXUE

汉语大词典出版社

十大名师教数学

# 高考卷

春　和　编著

汉语大词典出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

十大名师教数学．高考卷/春和编写．-上海:汉语大词典出版社,2000.10
ISBN 7-5432-0434-7

I.十…　II.春…　III.数学课-高中-升学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48830 号

责任编辑　胡家喜
装帧设计　谷夫平面设计工作室

十大名师教数学
**高 考 卷**
春 和 编写
世纪出版集团
汉语大词典出版社 出版、发行
(上海新华路 200 号　邮编 200052)
各地新华书店经销　上海中华印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 7.25　字数 184 千字
2000 年 10 月第 1 版　2000 年 10 月第 1 次印刷
印数 0 001—6 000
ISBN 7-5432-0434-7/G·161
定价:9.00 元

## 丛书编委会名单

# 目　　录

# 一、集合与函数

## 1．集合

知识点、重点及难点概要：

（1）集合及子、交、并、补集的概念和运算．

（2）集合的元素的确定性、互异性和无序性．

（3）集合表示的方法：列举法、描述法．

（4）确定集合与集合关系时，首先要分清每个集合所含元素的情况．

（5）对集合的考查一般以两种形式进行，一是考虑集合本身知识，二是考察集合语言与集合思想在解函数、方程与不等式问题时的运用．

例1　已知函数 $f(x)=x^2+ax+b\ (a,b\in\mathbf{R})$，$A=\{x\mid x=f(x),\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid f(x)+ax=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，若 $A=\{-1,3\}$，试用列举法表示集合 $B$．

提示：$A$、$B$ 的元素分别是方程的解．

简解：$A=\{-1,\ 3\}\Rightarrow\begin{cases}(-1)=(-1)^2+a(-1)+b\\ 3=3^2+a\cdot 3+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\ b=-3.\end{cases}$

$\therefore\quad B=\{x\mid x^2-2x-3=0,\ x\in\mathbf{R}\}=\{-1,\ 3\}.$

例2　设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,\ x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,\ x\in A\}$．当 $C\subseteq B$ 时，求实数 $a$ 的取值范围．

提示：$B$，$C$ 中的元素分别是函数的值域．

简解一：（1）当 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，$0\leqslant z\leqslant 4$．要使 $C\subseteq B\Rightarrow 4\leqslant 2a+3\Rightarrow a\geqslant\frac{1}{2}$（舍去）．

（2）当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$4\leqslant 2a+3\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$．

（3）当 $a\geqslant 2$ 时，$a^2\leqslant 2a+3\Rightarrow 2\leqslant a\leqslant 3$．

简解二：如图 1－1，当 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$ 时，在定义域 $-2\leqslant x\leqslant a$ 上，$C\subseteq B$．

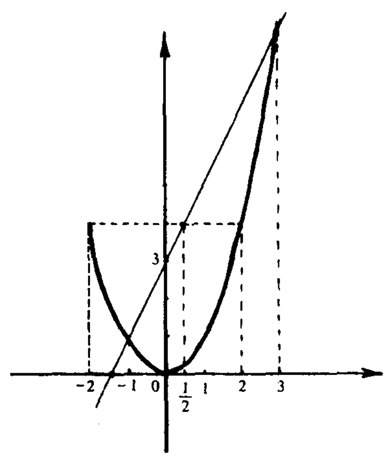



图 1－1

例3　已知 $A=\{y=x^2-2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y=-x^2+2x+13,\ x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$．

提示：求两个值域的交集．

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{y\mid y=(x-1)^2-4\geqslant -4,\ x\in\mathbf{R}\}\cap\\&\quad\{y\mid y=-(x-1)^2+14,x\in\mathbf{R}\}\\&=\{y\mid -4\leqslant y\leqslant 14\}.\end{aligned}$$

例4　$A=\{x,xy,\lg xy\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 $x$、$y$ 的值．

提示：集合中元素确定性、无序性、相异性．

$\lg xy = 0 \Rightarrow A = B = \{1, -1, 0\}$, $x = y = -1$.

例 5　$A = \left\{(x, y) \middle| \frac{y-3}{x-2} = 1, x, y \in \mathbf{R}\right\}$, $B = \{(x, y) \mid y = ax + 2, x, y \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \cap B = \varnothing$,求 $a$ 的值.

简析：$A$：$y = x + 1$ $(x \neq 2)$ ⇒不含$(2,3)$. $B$：$y - 2 = ax$,经过$(0,2)$直线系. $A \cap B = \varnothing$⇒两直线平行或相交于$(2, 3)$.

$$\therefore \quad a = \frac{1}{2} \text{或} a = 1.$$

## 练　　习

1. 如果 $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x < 4\}$,那么"$x \in A$ 或 $x \in B$"是"$x \in A \cap B$"的(　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 非充分非必要条件

2. $|x| + |y| \geqslant |x + y|$中等号成立的充要条件是(　).

(A) $xy \geqslant 0$　　(B) $xy > 0$

(C) $x$、$y$ 中至少有一个为 0　　(D) $x$、$y$ 中仅有一个为 0

3. 已知集合 $M$、$N$ 中各有 6 个元素,$M \cap N$ 有 4 个元素.若集合 $P$ 同时满足 $P \subseteq M \cup N$ 和 $P \supseteq M \cap N$,则满足条件的集合 $P$ 共有(　).

(A) 4 个　　(B) 8 个　　(C) 16 个　　(D) 32 个

4. 已知 $x > y > 0$, $I = \mathbf{R}$, $A = \left\{z \middle| x < z < \frac{x+y}{2}\right\}$, $B = \{z \mid \sqrt{xy} \geqslant z \geqslant 0\}$, $C = \{z \mid x < z \leqslant \sqrt{xy}\}$,则(　).

(A) $C = A \cap \overline{B}$　　(B) $C = \overline{A} \cap B$

(C) $C = A \cup B$　　(D) $C = A \cap B$

5. 设 $A = \{(x, y) \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x + a\}$.若 $A \cap B \neq \varnothing$,则实数 $a$ 满足条件(　).

(A) $|a| \leqslant 3\sqrt{2}$　　(B) $|a| \leqslant 3$

(C) $-3 \leqslant a \leqslant 3\sqrt{2}$　　(D) $3 \leqslant a \leqslant 3\sqrt{2}$

6. 已知 $M = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $P = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1$ 且$|y| \leqslant 1\}$,则 $M$、$N$、$P$ 之间关系为(　).

(A) $P \subset M \subset N$　　(B) $P \subset N \subset M$

(C) $M \subset N \subset P$　　(D) $N \subset M \subset P$

7. 一命题的否命题是"$a$、$b$ 中至少有一个不等于 0,则 $a^2 + b^2 = 0$,"它的原命题是______________________________.

8. 设 $M = \{2, 3, a^2 + 1\}$, $N = \{a^2 + a - 4, 2a + 1, -1\}$,且 $M \cap N = \{2\}$,则 $a =$______.

9. 设 $M = \left\{x \middle| \frac{x+1}{2-x} < 0\right\}$, $N = \{x \mid 4x + p < 0\}$.若 $N \subseteq A$,则 $P$ 的取值范围是________.

10. 记 $M = \{$等腰三角形$\}$, $P = \{$一边为 1,一内角为 36°的多边形$\}$,则 $M \cap P$ 元素的个数是________.

11. 设 $A = \{x \mid 3 - x \geqslant \sqrt{x - 1}\}$, $B = \{x \mid x^2 - (a + 1)x + a \leqslant 0\}$.

(1) 当 $A=B$ 时,求 $a$ 的值.

(2) 当 $A\subset B$ 时,求 $a$ 的值.

12. 设 $A=\{x\mid x=\lg(a^2+10),\ a\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=b^2-2b-2,\ b\in\mathbf{R}\}$,试确定 $A$、$B$ 关系.

13. 设 $I=\mathbf{R}$, $M=\left\{x\,\middle|\,\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\right\}$, $N=\{t\mid\log_3(t-a)<2\}$. 当 $a$ 取什么值时, $\overline{M}\cup N=\overline{M}$?

14. 设 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,且 $A\cup B=A$, $A\cap C=C$.

求: $a$、$m$ 的值.

15. 设 $A=\{(x,\ y)\mid y^2=x+1\}$, $B=\{(x,\ y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$, $C=\{(x,\ y)\mid y=kx+b\}$. 问是否存在 $k$、$b\in\mathbf{N}$,使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$? 证明你的结论.

**2. 函数**

知识点、重点及难点概要:

(1) 函数概念是由对应法则、定义域和值域构成的.

(2) 当函数 $y=f(x)x\in[a,b]$ 是严格单调函数时,存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,它们的图象关于 $y=x$ 对称. 求出反函数解析式后,一定要写出它的定义域(与原函数值域相同).

(3) 奇、偶函数首先要确定它们的定义域关于原点对称. 奇函数图象关于原点对称,偶函数图象关于 $y$ 轴对称.

(4) 周期函数特点是当自变量取值每相隔 $T$(周期)时,图象周期性地重复出现. $f(x+T)=f(x)$.

(5) 运用数形结合的方法,研究函数性质,掌握图象变换方法.

a. 平移变换:

$y=f(x)$ 与 $y=f(x+a)+b$.

b. 对称变换:

函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(x)$、$y=f(-x)$、$y=-f(-x)$、$y=f(|x|)$、$y=|f(x)|$ 图象之间对称关系.

(6) 函数的单调性:在定义域内任取 $x_1<x_2$,作差 $f(x_1)-f(x_2)$ 判断符号,或数形结合,或用函数性质来解决.

(7) 区分值域、最值、极值,利用函数单调性、配方法、换元法、反函数定义域、不等式、图象等方法求值域.

(8) 提高数学语言的阅读理解能力,转化能力,分析、求解能力,解决与函数有关的应用问题.

(9) 加强函数、方程、不等式、数列等问题综合与转换的训练.

例 1 求下列反函数: $y=\begin{cases}x^2 & (x\leqslant 0),\\ -3x & (x>0).\end{cases}$

简解: $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x} & (x\geqslant 0),\\ -\frac{1}{3}x & (x<0).\end{cases}$

例 2　已知 $f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}(x\in\mathbf{R})$,求 $f^{-1}(\dfrac{1}{3})$的值.

简析：$\dfrac{1}{3}=\dfrac{2^x}{1+2^x}, x=-1\Rightarrow f^{-1}(\dfrac{1}{3})=-1$.

例 3　已知 $f(x)=\log_a(x-ka), g(x)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$.

(1) 用 $k$、$a$ 表示$f(x)$、$g(x)$的公共定义域.

(2) 如果方程 $\log_a(x-ka)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有解,那么 $k$ 的取值范围是什么?

简解：(1) $\begin{cases}x-ka>0\\ x^2-a^2>0\\ (a>0,a\neq 1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(ka,\ -a)\cup(a,+\infty),\ (k<-1),\\ x\in(ka,+\infty),\ (k>1),\\ x\in(a,+\infty),\ (-1\leqslant k\leqslant 1).\end{cases}$

(2) $(x-ka)^2=x^2-a^2\Rightarrow x=\dfrac{(k^2+1)a}{2k}$.

根据(1)的定义域$\Rightarrow k<-1$ 或 $0<k<1$.

例 4　判断 $f(x)=(1-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$奇偶性.

提示:定义域 $-1\leqslant x<1$,关于原点不对称,非奇非偶.

例 5　设 $f(x)=x(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2})$.

(1) 判断 $f(x)$的奇偶性.(2) 证明 $f(x)>0$.

简解：(1)定义域 $x\neq 0$. $f(x)-f(-x)=0$,偶函数.

(2) 当 $x>0$ 时,$2^x-1>0, f(x)>0$. $\because$　$f(x)$为偶函数，$\therefore$　当 $x<0$ 时,$f(x)>0$.

例 6　已知 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$.求证：(1) $f(x)$是奇函数.

(2) $f(x)$在区间$(0,1)$上是减函数.

简析：定义域 $-1\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow|x+2|=x+2\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

例 7　解关于 $x$ 的方程 $\lg x+\lg(4-x)=\lg(a+2x)$,并讨论解的个数.

简解：原方程化为 $a=-x^2+2x, 0<x<4$.设$\begin{cases}y=a\\ y=-x^2+2x(0<x<4)\end{cases}$观察图象.

当 $a>1$ 或 $a\leqslant -8$ 时,$x\in\varnothing$.

当 $0<a<1$ 时,$x=1\pm\sqrt{1-a}$.

当 $-8<a\leqslant 0$ 时,$x=1+\sqrt{1-a}$.

当 $a=1$ 时,$x=1$.

例 8　已知 $f(x)=2x^2-2ax+3$ 在区间$[-1,\ 1]$上有最小值,记作 $g(a)$,求 $g(a)$的函数解析式.

简解：$f(x)=2(x-\dfrac{a}{2})^2+3-\dfrac{a^2}{2}$.

当 $\dfrac{a}{2}<-1$ 时,$f(x)_{\min}=f(-1)=2a+5$.

当 $-1\leqslant\dfrac{a}{2}\leqslant 1$ 时,$f(x)_{\min}=f(\dfrac{a}{2})=3-\dfrac{a^2}{2}$.

当 $\dfrac{a}{2}>1$ 时,$f(x)_{\min}=f(1)=5-2a$.

例 9　设函数 $f(x)=\log_a|\log_a x|$，$a>0$ 且 $a\neq 1$.

(1) 当 $f(x)>0$ 时，求 $x$ 的取值范围.

(2) 当 $0<a<1$，$x>1$ 时，试判断 $f(x)$ 的单调性，并证明.

简解：(1) 当 $a>1$ 时，$x>a$ 或 $0<x<\dfrac{1}{a}$. 当 $0<a<1$ 时，$a<x<\dfrac{1}{a}$ 且 $a\neq 1$.

(2) 当 $0<a<1$ 时，$a<1<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$. $f(x_1)-f(x_2)=\log_a\left|\dfrac{\log_a x_2}{\log_a x_1}\right|<0$，递减.

例 10　当 $a$ 为何值时，方程 $\dfrac{\lg 2x}{\lg(x+a)}=2$ 无解，一解或两解？

简解一：原方程化为 $\begin{cases}2x>0,\\ x+a>0,\\ x^2+2(a-1)x+a^2=0,\\ x+a\neq 1.\end{cases}$

简解二：求 $\begin{cases}y=\sqrt{2x}\\ y=x+a\end{cases}$ 的交点个数 $(x>0, x>-a, x+a\neq 1)$.

简解三：求 $\begin{cases}y=2x\\ y=(x+a)^2\end{cases}$ 的交点个数 $(x>0, x>-a, x+a\neq 1)$.

$\therefore$　当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$x+a=1\pm\sqrt{1-2a}>0$，原方程有两解.

当 $a=0$ 时，原方程有一解.

当 $a<0$ 时，原方程有一解.

例 11　$f(x)=\log_{\sin\theta}(x^2-ax-a)$ 在区间 $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ 上是增函数，$\theta$ 为锐角.
求：实数 $a$ 的取值范围.

简析：$\begin{cases}y=\log_{\sin\theta}p(x),\\ p(x)=x^2-ax-a>0.\end{cases}$

必须使 $p(x)=x^2-ax-a>0$ 在 $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ 上是减函数，

$$\text{得}\begin{cases}p(1-\sqrt{3})\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}a\geqslant 1-\sqrt{3}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad 2-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2.$$

例 12　已知 $f(x)=\log_a\dfrac{x-3}{x+3}$ $(a>0, a\neq 1)$ 的定义域为 $[s,t)$，值域为 $[\log_a(at-a), \log_a(as-a)]$.

(1) 求证：$s>3$.

(2) 求 $a$ 的取值范围.

简解：(1) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{x+3}>0, x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ \begin{cases}at-a>0\\ as-a>0\\ a>0, a\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t>1,\\ s>1.\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow s>3.$

(2) $s<t\Rightarrow\begin{cases}at-a>as-a\ (a>0,\ a\neq 1)\\ \log_a(at-a)<\log_a(as-a)\end{cases}\Rightarrow 0<a<1.$

设 $g(x)=\frac{x-3}{x+3}, x\in[s, t), s>3$,

$\therefore$ $g(x)$ $x\in[s, t)$为递增函数.

$g(s)<g(x)\leqslant g(t)$, $f(x)$为递减函数

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{t-3}{t+3}=at-a\\ \frac{s-3}{s+3}=as-a\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-3}{x+3}=ax-a$ 有大于 3 的两个不等根.$\Leftrightarrow\underbrace{ax^2+(2a-1)x+3-3a}_{p(x)}=0$ 有大于 3 的两个不相等的实根$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2a-1}{2a}>3\\ p(3)=9a+3a>0\\ \Delta=16a^2-16a+1>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

## 练 习 1

1. 若 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,则 $f(2x)$等于(  ).

(A) $2f(x)$  (B) $2[f(x)+g(x)]$

(C) $2g(x)$  (D) $2f(x)\cdot g(x)$

2. 若 $f(x)=a^x+k$ 的图象过点 $A(1,3)$,其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象经过点 $B(0,2)$则 $f(x)$的表达式为(  ).

(A) $2^x-1$  (B) $2^x+1$  (C) $-2^x+1$  (D) $-2^x-1$

3. 若 $f(x)=\log_2x+3\ (x\geqslant 1)$,则 $f^{-1}(x)$的定义域为(  ).

(A) $\mathbf{R}$  (B) $[1,+\infty)$  (C) $(0,1)$  (D) $[3,+\infty)$

4. 函数 $y=f(x)$的定义域为$[-1,1]$,若 $k\in(0,1)$,则 $F(x)=f(x-k)+f(x+k)$的定义域是(  ).

(A) $[-k-1,1-k]$  (B) $[k-1,k+1]$

(C) $[k-1,1-k]$  (D) $[-k-1,k+1]$

5. 当 $0<a<b<1$ 时,下列不等式正确的是(  ).

(A) $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$  (B) $(1+a)^a>(1+b)^b$

(C) $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$  (D) $(1-a)^a>(1-b)^b$

6. 方程 $\log_2x=x^2-2$ 的实根有(  ).

(A) 0 个  (B) 1 个  (C) 2 个  (D) 3 个

7. 当 $x<0$ 时,$(a^2-1)^x>1$ 恒成立,则 $a$ 的范围为(  ).

(A) $a>\sqrt{2}$  (B) $a>\sqrt{2}$ 或 $a<-\sqrt{2}$

(C) $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$  (D) $1<a<\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}<a<-1$

8. 函数 $f(x)=|x|(|x-2|-|x+2|)$(  ).

(A) 既是减函数又是奇函数  (B) 是奇函数但不是减函数

(C) 是减函数但不是奇函数  (D) 既不是减函数又不是奇函数

9. $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$在区间$(-2,+\infty)$上是增函数,则 $a$ 的取值范围为(  ).

(A) $a>-2$  (B) $a<-1$ 或 $a>1$

(C) $0<a<\frac{1}{2}$　　(D) $a>\frac{1}{2}$

10. 定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的奇函数$f(x)$为增函数,偶函数在区间$[0,+\infty)$上的图象与$f(x)$的图象重合.设$a>b>0$,给出下列不等式:

(1) $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$,　　(2) $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$,

(3) $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$,　　(4) $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$.

其中成立的是(　).

(A) ①和④　　(B) ②与③　　(C) ①与③　　(D) ②与④

11. 在区间$(-\infty,0)$上为增函数的是(　).

(A) $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　(B) $y=\frac{x}{1-x}$

(C) $y=-(x+1)^2$　　(D) $y=1+x^2$

12. $f(x)$对于一切实数$x$都有$f(3-x)=f(3+x)$.如果方程$f(x)=0$有且只有两个不相等的实数根,那么这两个实数根的和等于(　).

(A) 0　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 6

## 练　习　2

1. 设实数$m\neq0$且$m\neq1$,$f(x)=\frac{1-x}{1-mx}$($x\in\mathbf{R}$,且$x\neq\frac{1}{m}$),$f^{-1}(x)=$________.

2. 函数$y=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{|x+1|-2}$的定义域为________.

3. 当$m$为________时,$f(x)=\frac{mx+7}{mx^2+4mx+3}$的定义域是一切实数.

4. $f(x)=\sqrt{1-2x}-x$的值域为________.

5. 已知定义域$x\in\mathbf{R}$,且$x\neq0$,$2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}=0$,$f(x)=$________,值域为________.

6. $f(x)=\frac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}$的值域为________.

7. $f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x-1}$,$x\in[2,4]$的值域为________.

8. 已知$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$的定义域与值域均为$[1,b]$$(b>1)$,则$b$为________.

9. 已知$f(x)=ax^2+(a+1)x+2$是以$[-2,2]$为定义域的偶函数,则$f(x)$的值域是________.

10. 奇函数$f(x)$,$x\in\mathbf{R}$,对于任意$x$满足$f(x+2)=-f(x)$.当$0\leqslant x\leqslant1$时,$f(x)=x$.$f(99)=$________.

11. 已知实数$x$、$y$满足$x^2+y^2-2x+4y=0$,则$x-2y$的最大值为________,最小值为________.

12. $f(x)=kx^2-4x-8$在区间$[5,20]$上为减函数,$k$的范围是________.

13. 曲线$y=\frac{x+2}{x+1}$的对称中心坐标为________.

14. 作出下列函数的简图:

(1) $y=|\log_2 x|$.　　(2) $y=|2^x-1|$.　　(3) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$　　(4) $y=e^{|\ln x|}$.

15. 利用图象,讨论方程 $x^2-2|x|=a-1$ 解的个数.

16. 画出下列图象,并分别写出它们的递增区间.

(1) $y=|x|x-2|x|$;

(2) $y=x^2-x+a-a^2(a<0)$.

17. 函数 $y=ax^2+bx-1$ 的图象与 $x$ 轴没有交点的充要条件是________.

18. 若 $\log_3 x\cdot\log_x 2x\cdot\log_{2x}y=\log_3 x+\log_3(x+4)$ 且 $3^y=27\cdot(9)^{x^2}$,则 $y$ 的值为________.

19. 已知 $\log_3 2=a,\log_5 2=b,\log_{30}90=$________.

20. 已知幂函数 $y=(m^2-9m+19)x^{2m^2-7m-9}$的图象不过原点,则 $m=$________.

21. 函数$f(x)=x^{\frac{1}{m^2+m+1}}(m\in\mathbf{N})$的定义域为________,奇偶性为________.

22. 已知$f(x)=x^{n^2-2n-3}(n\in\mathbf{Z})$的图象与两坐标轴都无公共点,且关于 $y$ 轴对称,则 $n$ 的取值范围是________.

23. 函数 $y=a^{-x}$与$y=\log_a(-x)$的图象关于直线________对称.

## 练 习 3

1. 已知 $a\in\mathbf{R},f(x)=x^2-4ax+2a+6$ 值域为非负数,求$f(a)=2-a|a+3|$的值域.

2. 已知$f(x)=x(\frac{1}{2^x-1}+a)$是偶函数,试求 $a$.

3. 求$f(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{2}(x\in\mathbf{R})$的反函数$f^{-1}(x)$,并判断$f^{-1}(x)$的奇偶性.

4. 若$f(x)$与 $g(x)$的定义域为 $x\in \boldsymbol{R}$ 且 $x\neq\pm1$,$f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$.求$f(x)$,$g(x)$的解析式.

5. $f(x)$在 $x\in\mathbf{R}$ 为偶函数,在$(-\infty,0)$是增函数,且$f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$.求 $a$ 的取值范围.

6. 已知 $y=f(x)$是奇函数,在$(0,+\infty)$是减函数,并且 $f(x)<0$,试问 $F(x)=\frac{1}{f(x)}$在$(-\infty,0)$是增函数还是减函数?并证明之.

7. 定义在$[-1,1]$上的函数 $y=f(x)$是减函数,且是奇函数.若$f(a^2-a-1)+f(4a-5)>0$,求实数 $a$ 的取值范围.

8. $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$为奇函数($a$、$b$、$c\in\mathbf{Z}$),$f(1)=2,f(2)<3$.

(1) 求$f(x)$的解析式.

(2) 证明$f(x)$在$(-1,0)$为减函数.

9. 已知函数$f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$为奇函数.

(1) 求 $a$ 的值.　　(2) 求$f^{-1}(x)$.

(3) 解$f^{-1}(x)>\log_2\frac{1+x}{k}(k>0)$.

10. 关于 $x$ 的方程$x^2-2x+\lg(9a-2a^2)=0$没有负根,实数 $a$ 取值范围是什么?

11. 已知函数 $y=f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,并且满足$f(2+x)=f(2-x)$.

(1) 证明函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 若$f(x)$是偶函数,且 $x\in[0,2]$,$f(x)=2x-1$,求 $x\in[-4,0]$时$f(x)$的表达式.

12. 已知$f(x)=-3x^2+a(6-a)x+b$.

(1) 若$f(x)>0$的解集为$\{x\mid 1<x<2\}$,求$a$、$b$.

(2) 若方程$f(x)=0$有一根小于1,另一个根大于1,且$b$为大于$-6$的常数,求实数$a$的取值范围.

13. 已知$f(x)=-2x^2-2ax+a+1(-1\leqslant x\leqslant 0,a\geqslant 0)$,$f(x)$的最大值为$d$.

(1) 试用$a$表示$d$.

(2) 求$d$的最小值,并指出此时$a$的值.

14. $m$为何值时,方程$\lg(mx)=2\lg(x+1)$有一解、二解,无解?

15. 求函数$f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+4}$的单调区间,并比较$f(-\pi)$与$f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$的大小.

16. 判断函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4$在区间$[-1,+\infty)$上的单调性.

17. 已知$(x-3)^{-\frac{1}{3}}<(1+2x)^{-\frac{1}{3}}$,求$x$的取值范围.

18. 已知$f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+4^x\cdot a}{a^2-a+1}$,其中$a\in\mathbf{R}$.当$x\in(-\infty,1]$时,$f(x)$有意义,求$a$的取值范围.

19. 关于$x$的方程$(\dfrac{2n-x}{m})^{\frac{4}{3}}=x(x\in\mathbf{N},m\in\mathbf{R}^+)$在区间$[2n-1,2n+1]$上有两个不相等的实数根,求$m$的取值范围.

# 二、不　等　式

知识点、重点及难点概要：

（1）不等式证明的三种方法：比较法、综合法和分析法.

（2）解不等式主要通过等价转化方法，“数形结合”常能化难为易.

（3）加强与函数、方程、数列、解析几何的联系与转换.

（4）要重视分类讨论思想的应用.

（5）求函数最值，要注意基本不等式成立的充要条件（当且……，仅当，……）.

例 1　比较$(1-\cos x)$和$\sin x$的大小$\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

简析：$\because\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\therefore\ 1-\cos x>0,\sin x>0.\ \frac{1-\cos x}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$.（作商）

例 2　设$a>0,\ b>0,\ c>0$，比较$a^a b^b c^c$与$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$的大小.

简析：$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{(a-b)}{3}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{(b-c)}{3}}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\geqslant 1$.

例 3　设三角形三边$a,b,c$满足$a^2+b^2=c^2$.

求证：当$n\geqslant 3$且$n\in\mathbf{N}$时，$a^n+b^n<c^n$.

提示：设$a=c\cos\theta,\ b=c\sin\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$. $a^n=c^n\cos^n\theta<c^n\cos^2\theta\ (n\geqslant 3)$，$b^n\leqslant(c\sin\theta)^n\leqslant c^n\sin^2\theta$.

例 4　若$a+b+c=1$，且$a,b,c$均为非负数.

求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3}$.

提示：$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leqslant\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{2}=1$.

例 5　若$x^2+4y^2=4x$，求$x^2+y^2$的最值.

简解：设$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta\ (0\leqslant\theta<2\pi)$.

$$r=\frac{4\cos\theta}{4-3\cos^2\theta}=\frac{4}{\frac{4}{\cos\theta}-3\cos\theta},\ 0\leqslant r\leqslant 4.$$

例 6　解关于$x$的不等式：

$$\frac{x+2}{k}>1+\frac{x-3}{k^2}(k\in\mathbf{R},k\neq 0).$$

简解：化简得$(k-1)x>k^2-2k-3$.

当$k>1$时，$x\in\left(\frac{k^2-2k-3}{k-1},+\infty\right)$.

当$k=1$时，$x\in\mathbf{R}$.

当$k<1$时，$x\in\left(-\infty,\frac{k^2-2k-3}{k-1}\right)$.

例 7　若$\frac{1}{p}x^2+qx+p>0$解集$A=\{x\mid 2<x<4\}$.求实数$p$、$q$的值.

简析：$A\Rightarrow(x-2)(x-4)<0\Rightarrow -x^2+6x-8>0$. $\frac{\frac{1}{p}}{-1}=\frac{q}{6}=\frac{p}{-8}\Rightarrow p=-2\sqrt{2},q=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

例 8　已知$a>0$,解不等式$\sqrt{a(a-2x)}>x-1$.

简解：$a(a-2x)\geqslant 0,\Rightarrow x\leqslant\frac{a}{2}$.

考虑$\frac{a}{2}=1,\frac{a}{2}>1,\frac{a}{2}<1$三种情况，

$\therefore$　当$a\geqslant 2$时,$x<1-a+\sqrt{2a^2-2a}$；当$0<a<2$时,$x\leqslant\frac{a}{2}$.

也可用图象法解,如图 2－1.

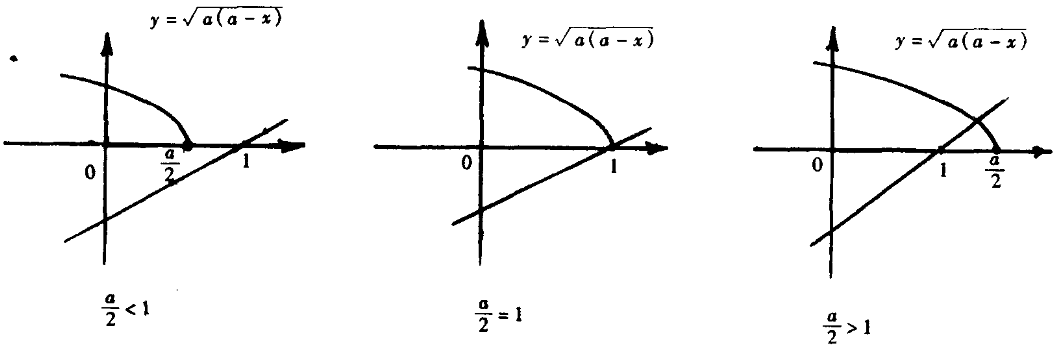



**图　2－1**

例 9　解关于$x$的不等式$\log_{kx}x+\log_x kx^2>0(k>0)$.

简解一：$\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\kx\neq 1\\\frac{\log_k x}{1+\log_k x}+\frac{1+2\log_k x}{\log_k x}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\x\neq 1,\\x\neq\frac{1}{k},\\\log_k x<-1\text{ 或 }\log_k x>0.\end{cases}$

当$k>1$时,$0<x<\frac{1}{k}$或$x>1$；

当$k<1$时,$0<x<1$或$x>\frac{1}{k}$；

当$k=1$时,$x>0$且$x\neq 1$.

简解二：原不等式化为　$\frac{1}{1+\log_x k}+(1+\log_x k)+1>0$.

## 练　习　1

1．如果$0<2a<1,M=1-a^2,N=1+a^2,P=\frac{1}{1-a},Q=\frac{1}{1+a}$,那么(　).

(A) $Q<P<M<N$　　(B) $Q<M<N<P$

(C) $M<N<Q<P$　　(D) $M<Q<P<N$

2．设$x$、$y\in\mathbf{R}$,且$|x|<1$,则$|y|<1$是$0<xy<1$的(　).

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 非充分条件，也非必要条件

3. $x<1$ 且 $x\neq -1$ 是 $(1-|x|)(1+x)$ 为正数的(　).

(A) 充分且必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充分但不必要条件　　(D) 不充分且不必要条件

4. 设 $-1<\alpha<\beta<1$，则下列各式中恒成立的是(　).

(A) $-2<\alpha-\beta<0$　　(B) $-2<\alpha-\beta<-1$

(C) $-1<\alpha-\beta<0$　　(D) $-1<\alpha-\beta<1$

5. 设 $x\in\mathbf{R}^+$，$n\in\mathbf{N}$，$x+\dfrac{p}{x^n}\geqslant n+1$，其中 $p$ 等于(　).

(A) $n^n$　　(B) $n^2$　　(C) $n$　　(D) $n+1$

6. 已知 $A=\{x\,|x^2-2x-3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\,|x^2+x-6<0\}$，$C=\{x\,|x^2+ax+b<0\}$，$C=A\cap B$，那么 $a+b$ 等于(　).

(A) 3　　(B) 1　　(C) $-3$　　(D) $-1$

7. 已知 $a>0,b>0$，则不等式 $-b<\dfrac{1}{x}<a$ 等价于(　).

(A) $x<-\dfrac{1}{a}$ 或 $x>\dfrac{1}{b}$　　(B) $x<-\dfrac{1}{b}$ 或 $x>\dfrac{1}{a}$

(C) $-\dfrac{1}{a}<x<0$ 或 $0<x<\dfrac{1}{b}$　　(D) $-\dfrac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\dfrac{1}{a}$

8. $a$、$b$、$c\in\mathbf{R}$，对于任何实数 $x$，不等式 $a\sin x+b\cos x+c>0$ 都成立的充要条件(　).

(A) $a$、$b$ 都同时为 0，且 $c>0$　　(B) $\sqrt{a^2+b^2}<c$

(C) $\sqrt{a^2+b^2}=c$　　(D) $\sqrt{a^2+b^2}>c$

9. 若 $x_1$、$x_2$ 是方程 $x^2+ax+8=0$ 的两个相异实根，则有(　).

(A) $|x_1|>2,|x_2|>2$　　(B) $|x_1|>3,|x_2|>3$

(C) $|x_1|+|x_2|>4\sqrt{2}$　　(D) $|x_1-x_2|\leqslant 4\sqrt{2}$

## 练　习　2

1. “$a>b\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$”成立的充要条件________.

2. 函数 $y=\sin x+\dfrac{2}{\sin x}(x\in(0,\pi))$ 的最小值为________.

3. 对于 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $|x+1|+|x-2|>a$ 恒成立，则 $a$ 的取值范围是________.

4. 若 $|x+y|=2$，则 $xy$ 的最大值是________.

5. $y=\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha$ 的值域是________.

6. 设 $x>0,y>0,x+2y=1$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值为________.

7. 要使不等式 $xy\leqslant ax^2+2y^2$ 对于 $x\neq0$、$y\neq0$ 的任何实数均成立，实数 $a$ 的最小值为________.

## 练　习　3

1. 设 $a>0,a\neq1,t>0$，比较 $\dfrac{1}{2}\log_a t$ 和 $\log_a\dfrac{t+1}{2}$ 的大小，并证明你的结论.

2. $a$、$b\in\mathbf{R}^+$ 试比较 $a^ab^b$ 与 $a^bb^a$ 的大小.