高等专科院校试用教材

高等数学学习方法指导

李　华　党景柏
张　琪　侯双根　编

陕西科学技术出版社

高等专科院校试用教材数学丛书共四册：《高等数学》（上、下册）、《高等数学学习方法指导》、《线性代数》、《概率与统计》。本丛书由西安交通大学蒋传章、西北大学熊必璠主编，西北大学赵根榕、西北工业大学孙家永、西安冶金建筑学院潘鼎坤、四川经济管理干部学院马兴波、西北轻工业学院沈元林、海南大学周德晖等审稿。

高等专科院校试用教材

高等数学学习方法指导

李　华　党景柏
张　琪　侯双根　编

责任编辑　赵生久

陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街131号）

新华书店经销　　国营五二三厂印刷

787×1092毫米　32开本　8.875印张　18.7万字

1987年8月第1版　1987年8月第1次印刷

印数：1—16,500

ISBN 7-5369-0021-x/G·12

统一书号：7202·150　定价2.20元

前　言

本指导书是为了配合读者学习本丛书的高等数学编写的，全书共分十一章，每章的内容包括：一、基本内容与要求．二、学习方法指示．三、习题选解．四、自测题．在书末附有每章自测题的答案．

读者在学习每章的课文前，可以先阅读一下本指导书相应的第一部分“基本内容与要求”，初步了解该章的基本内容与要求，尤是了解重点和难点后，在学习课文时思想上就比较主动，便于学好该章；在学习课文时可参考相应的第二部分“学习方法指示”，这一段主要是解决在学习该章时在概念上、计算上容易发生混淆、错误的地方提请读者注意，并指出应如何去正确理解概念与对问题进行正确的计算，并对重点与难点的地方加以进一步的分析，使读者便于掌握各章的重点与难点；相应的第三部分“习题选解（略解）”读者在独立完成该章各节的基本练习后，对有些较难的习题我们作了略解或提示，帮助读者思考，写出自己的详细解法，请读者不要去照抄这些简单的计算过程；在学完该章后，读者可以作相应的第四部分“自测题”以检查自己的学习情况．在第十一章末还附有六份试题，读者可用150分钟去作一份试题．自己评一个分数，看看自己是否已经比较好的掌握了上册（或下册）的内容．

本指导书各章的第二部分“学习方法指示”是作者多年

从事高等数学教学经验的积累，写得比较深入、细致、有作者独特的见解。有助于读者在学习课文时加深理解。

本书由海南大学周德晖副教授、西北大学耿光副教授审阅。

由于我们水平所限，不足和疏漏之处，希读者批评指正。

编者于西安

1986.11.

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、基本内容与要求

1．基本内容

1）函数概念（包括函数定义，反函数概念，复合函数概念）．

2）基本初等函数（包括定义，定义域，图形，简单性态）．

3）极限概念（包括数列极限的定义，函数极限的定义，函数的左右极限）．

4）极限的运算（包括极限的四则运算，两个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$）．

5）无穷小与无穷大（包括定义，相互关系，无穷小的比较）．

6）函数的连续性（包括定义，运算，间断点，闭区间连续函数的性质）．

2．基本要求

1）正确理解函数的定义，要弄清对应法则$f(\ )$与定义域两个要素的含义，会求一般函数的定义域．

2）掌握基本初等函数的定义，定义域，图形及简单性质。

3）弄清复合函数的概念，会熟练地分解复合函数的复合过程。

4）正确理解各种极限概念，掌握描述各种极限状态（包括各种无穷大量）的思想方法。

5）会用极限的有理运算或其他方法，以及两个重要极限去熟练地计算极限。

6）理解无穷小量及其比较。

7）掌握函数连续性的概念及其运算法则，明确基本初等函数和初等函数的连续性，会求函数的间断点并判定其类型。

3. 重点和难点

1）重点，函数定义，初等函数，函数极限的概念，极限的四则运算，连续函数的概念，初等函数的连续性。

2）难点，建立函数的关系式，极限的定义。

二、学习方法指示

1. 函数是高等数学的主要研究对象，它反映了物质世界中各种变量之间的联系与相互依从关系，在函数定义中有两个重要因素，即定义域与对应法则，只有定义域与对应法则都确定了，函数才能完全确定。对两个函数如果定义域和对应法则都相同，它们就是同一函数，否则就不是同一函数，如 $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$，因$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$，而$g(x)$定义域是$(0,\infty)$所以它们不相同，又如

$f(x)=|x|$与$g(x)=\sqrt{x^2}$它们的定义域与对应法则都相同，所以它们就是相同的函数。

函数定义中重要的一点是，自变量x在数轴上某部分任取一值时，函数y都有确定的值与之对应。至于对应法则以什么形式来表示函数是无关重要的，因此函数表示方法不一定要用解析式子来表示，也可以用图象法和列表法表示，如果实际需要，一个函数可以同时用几个式子来表示。如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1;\\ x, & 1\leqslant x<2;\\ x^2-6x+\dfrac{19}{2}, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

就是用三个式子来表示一个函数。（注意这是一个函数，而不是三个函数）。它的定义域是$[0,4]$。当x在$[0,1)$上取值时，$f(x)=\dfrac{1}{2}x$。当x在$[1,2)$上取值时，$f(x)=x$，当x在$[2,4]$上取值时$f(x)=x^2-6x+\dfrac{19}{2}$。

在函数记号中，$f(\ )$指的是函数的对应法则，如，$f(x)=\sqrt[3]{\sin(x+1)^2}$。$f(\ )$指的是这样一个法则，对自变量加1括号的平方，再取正弦，然后开立方的法则，所以$f(\ )$这个法则是由具体函数给出的，一般说来，不同的具体函数对应着不同的对应法则。它可以是一个数学表达式，也可以是一个表格，或一个图形。

2．函数的定义域，是函数概念的重要因素，因高等数学所讨论的范围是实数域，如果自变量取值超出了此范围，我们就说函数没有意义。函数的定义域是指使函数y有意义

的自变量 x 的取值范围。即当 $x=x_0$ 时，函数 $f(x)$ 有确定值 $f(x_0)$ 与之对应，就称函数在 $x=x_0$ 处有意义，所有有定义点的集合称为函数的定义域。

函数的定义域的表示法常用不等式表示、区间表示、集合表示、叙述法表示、图示表示等。

如 $y=x+\ln(x-3)$　定义域是 $3<x<+\infty$ 或 $(3, +\infty)$

$y=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sin x}$ 定义域是 $\left[2k\pi-\dfrac{7}{6}\pi, 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]$ $(k=0, \pm1, \pm2\cdots\cdots)$.

$y=\dfrac{5}{3x-5}$　定义域是 $\left\{x \mid x\neq\dfrac{5}{3}, x\in R\right\}$.

$$y=\begin{cases} x^3+1, & x\geqslant 0; \\ \dfrac{1}{x}, & x<0. \end{cases}$$　定义域是 $(-\infty, +\infty)$

函数定义域求法是：若是实际问题，定义域除考虑函数解析式有意义外，还需使实际问题有意义才行。若函数为一般数学式子时，定义域一般是使这个数学式子有意义的一切实数集合；若函数解析式是由几个数学式子经四则运算组合而成的，则它的定义域就应取这几个数学式子自变量允许值的公共部分。

3. 反函数与复合函数是函数结构中的两个重要概念。一个函数的反函数往往不是单值函数，如 $y=x^2$ 的反函数 $y=\pm\sqrt{x}$，就是双值函数。由图形容易看到，如果函数 $y=f(x)$ 在某一区间单调时，它的反函数也必单值单调。函数 $f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$，由方程角度来看，它们是变量 x 与 y 之间的同一个方程，它们的图象在同一坐标平面是相同

的．而函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$．反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域一般是原来函数 $y=f(x)$ 的值域．搞清复合函数的概念主要在于把一个比较复杂的函数适当引入中间变量，即分解成若干个基本初等函数，使我们对复杂函数的讨论，可能化为对基本初等函数的讨论，对于函数的复合要注意的是：不是任何两个函数都能复合的，如 y 是通过中间变量 u 是自变量 x 的函数，只有自变量 x 的取值所对应中间变量 u 的值不超过函数 y 的定义域时才能复合．对复合函数更重要的是，将一个复杂的函数分解为若干个基本初等函数，如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 可分解为 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-w$　$w=x^2$．

4．我们高等数中所研究的函数，主要是所谓初等函数．在自然科学与工程技术中最常见的函数也是初等函数．初等函数是常数与基本初等函数（幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数）经过有限次有理运算与有限次函数复合所产生并能用一个解析式表出来的函数，因此，作为构成初等函数的基本初等函数尤其显得重要，虽然基本初等函数在中学已经学过，但是仍要有足够的重视，对它的定义域，图形，简单性质还需牢记．

5．极限的概念反映了函数在自变量无限变化的过程中，因变量的某种变化趋势，极限概念是高等数学的基本概念，极限方法是高等数学研究问题的根本方法，是研究微积分的重要工具．它是指自变量 $x\to\infty$（包括 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$）；$x\to x_0$（包括 $x\to x_0^+$　$x\to x_0^-$，$x\to x_0$）时因变量 $f(x)\to A$，$f(x)\to\infty$（包括 $f(x)\to+\infty$，$f(x)\to-\infty$，$f(x)\to\infty$），

的极限，而极限定义是对这些状态精确的数学描述，思想方法是一致的，为了对极限概念的实质理解清楚，现以数列极限为例给以剖析，若对于任意给定的小正数 ε，总存在一个正数 N，使得当一切 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$，当 n 趋于无穷大时的极限。记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或 $x_n\to A\ (n\to\infty)$．在此"ε—N"定义中，首先我们要了解 ε 和 N 是什么，它们在描述"无限趋近"过程中起的作用又是什么？我们说 ε 是任意小的正数，其含意有两个方面，一是它的任意性，即 ε 可以任意选取，因为只有这样，不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 才能刻划 x_n 无限接近 A，这就是极限的本质，换句话说，正是 ε 的任意性，数列 $\{x_n\}$ 在变化过程中与 A 接近的程度可以达到任意的要求，无论我们要求多么接近就能达到多么接近。二是它又具有相对的稳定性，即 ε 一经过选取就相对的固定下来，我们就可以找 N，否则验证工作无法进行，什么时候 $|x_n-A|<\varepsilon$（注意 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立是指当 $n>N$ 时，即 $|x_{n+1}-A|<\varepsilon$，$|x_{n+2}-A|<\varepsilon$，……这无穷多个不等式都成立）就成立呢？这就是 N 的作用，N 是刻划次数 n 无限变大的程度（显然 N 是与 ε 有关的，对于不同的 ε 就有不同的 N，但它们不呈现函数关系，任意给定 $\varepsilon>0$ 总能找到一个正数 N，也就是说存在一点 x_N 从这点以后数列 $\{x_n\}$ 还是无穷无尽的变化着，但全部都落在 $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ 邻域之内，那么我们就完全掌握了数列在整个变化过程中的变化趋势，它就可以无限接近 A，所以关键在于这样一个数 N 是否存在，因此可以用 N 的存在来肯定当 $n\to\infty$ 时 $|x_n-A|<\varepsilon$ 的成立，也可以说 $n>N$ 是保证结论成立的条件。

对函数的极限定义可以类似地分析理解。

6. 求极限的方法。极限的求法类型众多，比较灵活，需要在学习中注意摸索和总结自己的技巧和经验，现就求极限的方法归纳几点以供参考：

1）利用极限的四则运算法则求极限。

当$x\to\infty$时，分子分母极限都是无穷，这时不能用商的法则，可用分母x的最高次幂去除分子，分母，再按运算法则取极限；当$x\to x_0$时，分子分母的极限均为0，这时同样不能用商的极限法则，可以首先将分子，分母分解因式，然后约简分式，再用法则求极限。

2）利用分子，分母有理化来求极限。

3）利用无穷小量的性质求极限。

例如、求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{ax^2+1}$

当$x\to\infty$时，分子分母的极限都不存在，因而不能用商的极限运算法则，但因$|\cos x|\leqslant 1$，即$\cos x$是有界变量，而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{ax^2+1}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{ax^2+1}=0$，（有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量）。

4）利用两个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$与$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$求极限。

当极限式中含有三角函数时，可通过三角恒等式变换，利用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$来求，当极限式中含有幂指函数可以通过变量代换，用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$来求，（注意用两个重要极限求极

限时，也常用它们等价命题：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$与$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$来求。

5）当极限函数是以分段函数给出时，在分段点 x_0 处，因为$x>x_0$与$x<x_0$时的函数表达式不同，所以必须要用左右极限来求，只有左右极限存在且相等时才有极限。

例如，设

$$\xi(x)=\begin{cases}3x^2+2, & x\leqslant 0;\\ \sqrt{5x+4}, & 0<x\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{2}\ln(x^2+3), & x>1,\end{cases}$$

求在分界点处的极限。

在 $x=0$ 处

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x^2+2)=2$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{5x+4}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$。

在 $x=1$ 处

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{5x+4}=3$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)=\dfrac{1}{2}\ln 4$,

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$,

所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在。

同样地，若函数是含有指数函数的复合函数 $a^{f(x)}$（或 $e^{f(x)}$）其中 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，要求极限时，由于无穷大有正负无穷大之分，所以 $a^{f(x)}$（或 $e^{f(x)}$）当 $x\to x_0$ 时，左右极限可能不同，因此需要考虑左右极限，若函数是含有如 $\operatorname{arc\,tg} f(x)$；$\operatorname{arc\,ctg} f(x)$ 的函数，且当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 时，也要考虑左右极限。

函数求极限方法是比较灵活的，除了根据函数类型用基本方法外，还要巧妙地将函数化为基本方法类型或综合运用上述方法，除以上的方法外还可以用极限的准则，等价无穷小等方法去求极限，随着高等数学学习的不断深入，往后还可以得到某些求极限的重要方法。

7．在无穷小量和无穷大量的极限运算中，要注意的是无穷个无穷小量的和，无穷个无穷小量的积不一定是无穷小量。两个无穷大量之和也不一定是无穷大量，可能是常量，也可能不存在。同样的无穷大与有界变量的乘积不一定是无穷大量，有时可能是无穷小，也可能是非零常量如，当 $x\to\infty$ 时 $f(x)=x$ 为无穷大，$g(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}$，　$h(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 均为有界量，但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\sin^2\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)h(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=1$。

8．函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续性的三种形式即

1）自变量增量 $\Delta x=x-x_0$ 为无穷小时，对应的函数增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+x)-f(x_0)$ 也是无穷小。

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

3) 对任意给定的$\varepsilon>0$，存在着$\delta>0$，当$|\Delta x|<\delta$时，不等式$|\Delta y|<\varepsilon$成立。

这三种形式实质上表达同一个概念，其间没有丝毫本质上的区别，但在应用时，可根据具体情况采用某一种较合适的形式，一般说来第一种多用于检验函数的连续性，第二种多用于讨论函数的间断点，第三种多用于理论上的推导。

在讨论函数连续时必须注意三个问题。

1) 在一点连续和在一点有极限的不同之处，在一点有极限只考虑在该点附近函数$f(x)$变化情况，而在一点连续，不仅要考虑$f(x)$在点x_0附近的变化情况，而且要考虑在点x_0，函数值$f(x_0)$是否存在。

2) 函数$f(x)$在点x_0连续三个条件，（即$f(x)$在点x_0有定义，极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在；这个极限值和函数值$f(x_0)$相等，）同时具备时，才称函数$f(x)$在点$x_0$连续，只要其中一条不成立，$f(x)$就在点$x_0$间断。

3) 考察$f(x)$在点x_0是否连续一般步骤；第一步，看$f(x_0)$是否存在，如果不存在，则$f(x)$在点x_0间断；如果$f(x_0)$存在，再进行第二步；第二步看$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$是否存在，若不存在，则$f(x)$在点$x_0$间断，如果不存在，再进行第三步看$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$是否等于$f(x_0)$，若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$则$f(x)$在点$x_0$间断（且$x_0$为$f(x)$的第一类间断点），若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则函数$f(x)$在点$x_0$连续。

初等函数在其定义区间内都是连续的，因此初等函数的间断点一定不在定义区间内。分段函数不是初等函数，定义区间内的点也可能是函数的不连续点，一般说来，分段函数要在分界点处讨论其连续性。

三、习题选解

习题 1-1

5. (6) **解** 函数的定义域必须满足下列条件：

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases},$$

∴ 函数的定义域为 $[-1,0)$，$(0,1]$。

6. (8) **解** 要使函数有意义，必须

$$\sin x \geqslant 0,$$

∴ 函数的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，

其中 $k=0$，$\pm 1, \pm 2 \cdots$。

(9) **解** 要使函数有意义，必须满足

$$e^x - e^{-x} \neq 0，即\ e^x \neq e^{-x}$$

亦即 $x \neq -x$，故 $x \neq 0$。

∴ 函数的定义域为 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。

9. **解** ∵ $\varphi(t)=t^3+1$

∴ $\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$,

$[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1$,

$\varphi[\varphi(t)]=(t^3+1)^3+1=t^9+3t^6+3t^3+2$,

$$\varphi\left[\frac{1}{\varphi(t)}\right]=\left[\frac{1}{t^3+1}\right]^3+1=1+\frac{1}{t^9+3t^6+3t^3+1}.$$

11. **解** $\because \quad f(x)=2x^2+6x-3,$

$$\therefore \quad \varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$=\frac{1}{2}(4x^2-6)$$

$$=2x^2-3,$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$=\frac{1}{2}\times 12x=6x.$$

$\because \quad \varphi(-x)=\varphi(x)=2x^2-3,$

$\therefore \quad \varphi(x)$是偶函数.

21. **解** 设做桶所需费用为 y 元，桶高为 h m，铁的单价为 k 元/m^2.

$$\because \quad 10=h\pi r^2, \quad \therefore \quad h=\frac{10}{\pi r^2}.$$

依题意 $y=5k\pi r^2+k2\pi r\cdot\dfrac{10}{\pi r^2},$

$\therefore \quad y=5k\left(\pi r^2+\dfrac{4}{r}\right)$. 即为所求的函数关系.

22. **解** 设容器的高为h，底面半径为r,

则 $\quad 2\pi r=(2\pi-\alpha)R,$

$$\therefore \quad r=\frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi},$$

又 $\quad h=\sqrt{R^2-r^2},$