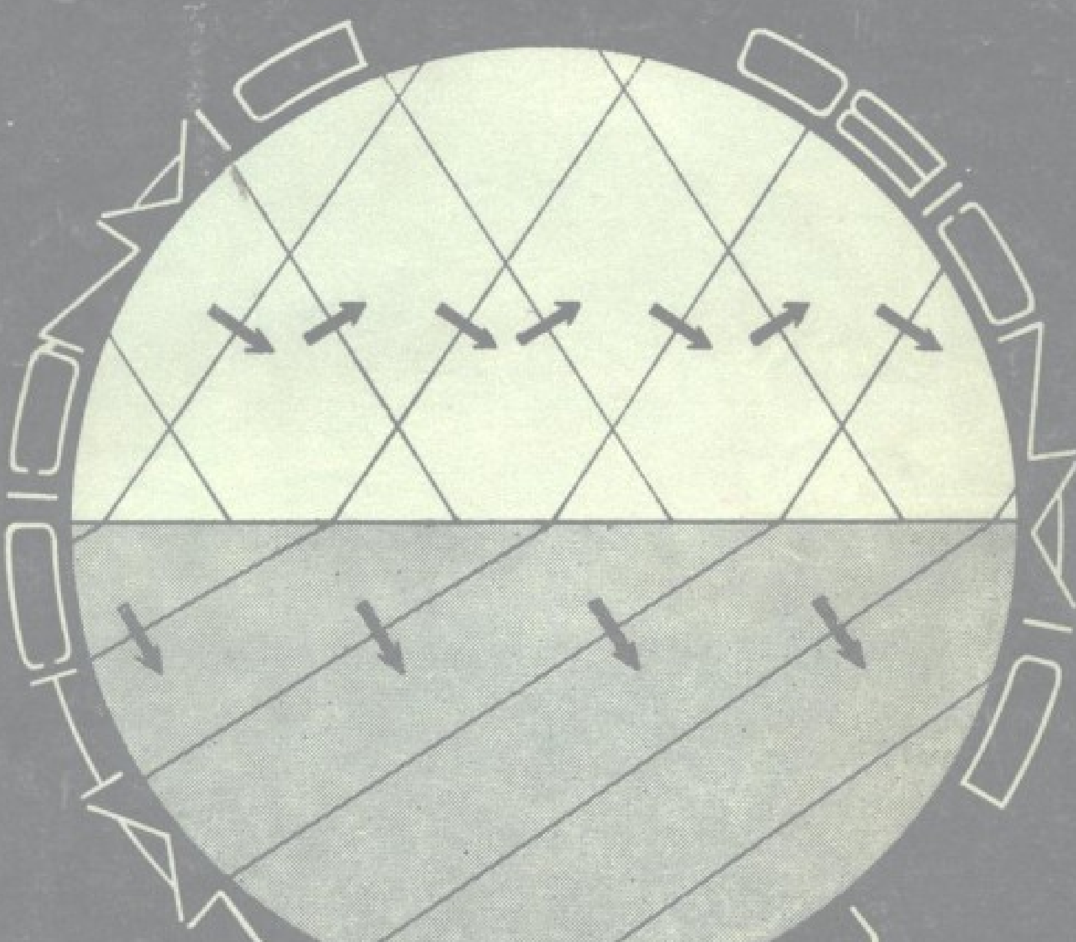
电磁场——电磁波

[美] P·劳兰
D·R·考森 著

陈成钧 译



人民教育出版社

电磁场与电磁波

［美］ P. 劳　兰
D. R. 考森 著
陈成钧 译

人民教育出版社

内 容 简 介

本书根据美国 P. Lorrain 和 D. R. Corson 合编的《*Electromagnetic fields and waves*》第二版(1970 年增订本)译出。

这是一本七十年代在美国和西欧较为流行的电动力学教科书。可供我国高等学校物理、工程物理、无线电电子学等专业作电动力学教学参考书，也可供有关教师和工程技术人员参考。

电磁场与电磁波

[美] P. 劳 兰
D. R. 考 森 著

陈 成 钧 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

浙江舟山印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 31 字数 680,000

1980 年 7 月第 1 版 1981 年 2 月第 1 次印刷

印数 00,001—16,000

书号 15012·0259 定价 2.55 元

译 者 序

这是一本七十年代在美国和欧洲较为流行的大学高年级电动力学教科书。书中除了系统地叙述电磁学的基础理论以外，还叙述了范围广泛的物理和工程应用问题，涉及核物理、天体物理、物理光学、无线电电子学等许多方面，对我国理工科大学物理、工程物理、无线电电子学等系的高年级学生和有关的物理学工作者、工程技术人员和教师，都是一本有益的参考书。

作者考森(D. R. Corson) 是美国康奈尔(Cornell) 大学校长，一位有资历的物理学家。在1969年被选为校长以前，曾任该校物理系教授、系主任、工学院院长和教务长。另一位作者劳兰(P. Lorrain)是加拿大蒙特利尔(Montreal)大学物理系教授，曾任该校物理系主任、加拿大物理学家协会主席，并曾应邀到法国格兰诺伯(Grenoble)大学和西班牙马德里大学担任客坐教授。

这本书所以值得向我国读者推荐，是因为它有一系列特点。首先，主要的物理概念叙述得相当细致深入，物理图象十分清楚，关键的概念往往从各个侧面反复讲透。第二，书中有一章比较容易读的相对论引论(第五章)，然后在第六章中，通过库仑定律和洛仑兹变换而导出全部麦克斯韦方程组，这是一种新颖但日益流行的叙述方法，它能帮助理解电磁学理论的内在的深刻联系。第三，书中的308幅插图，占有相当突出的地位，翻阅一下就会发现，作者运用了美术家画素描的技巧，使图具有强的立体感，有些欧美教授欢迎这本书主要是因为这些立体图有助于理解电磁场中的三维的关系，此外，这里的场图都是用电子计算机绘制的，图线具有定量的准确性。第四，全书有140个例子和400道习题，构成了书的不可分割的组成部份，涉及的内容相当广泛，有的是帮助理解物理概念的实例，有的是帮助建立数量级概念的数字计算题，有的要用一定的数学工具，还有大量从当代科学文献中搜集来的物理和工程题目，如宇宙论、脉冲星、太阳风、离子曳引加速器、轨旋真空泵、气体透镜波导等，这是为了尽快地引导读者去接近当代文献中所讨论的活生生的科学实践，但程度都不深。

本书承美国西弗吉尼亚州卫斯里学院(Wesley College, West Virginia)物理系孙汝逵教授在1977年秋推荐并赠样书。在译述中，我们力图保持原书文字流畅而口语化的风格。原书有些印刷错误、笔误和个别的叙述错误，凡已发现的，都已作了订正。

由于译者水平有限，译文中错误与不当之处一定不少，尚希不吝指正，以便改进。

河北矿冶学院电工教研室主任董毓秀教授在百忙中审阅了译稿并提出了宝贵的意见，谨致谢意。

陈成钧

于中国科学技术大学研究生院

1979年2月

序　言

本书是我们合著的《电磁场与电磁波引论》一书的增订本。尽管“引论”一词在新书名中省去了，总的程度并没有变化。

同第一版一样，书的主要读者，是学过至少一门完整的电磁学课程、一门完整的微积分课程包括微分方程引论的大学生。对于打算复习这一学科的科学家和工程师也有用。

主要的更动是增添了讲相对论的两章。如果学时不够，可略去不读，也无妨于教材的连贯性。其他各章都着力改写过，增删甚多。添了大约100幅新插图，用同第一版一样的办法来展示出立体的物体和现象。场的图解(如第四章的那些图)是借助于计算机来绘制的。全部140个例子和413道习题，大多是新的。

这本书的目的，是向读者提供运用电磁学基本概念的知识。正如A. N. 怀特海德在半个世纪前所说的那样：“教育，就是使人获得运用知识的才艺”。这就解释了我们为什么编入了较大数量的例子和习题，也解释了我们为什么涉及的题材较少但叙述透彻。举例说，拉普拉斯方程只讲了直角坐标和球坐标中的解，而没有讲柱坐标中的解。

内容

为了减少需要的数学预备知识，我们编入了讲矢量的一章(第一章)，讨论了勒让特微分方程(§4.5)，还编入了关于用 $\exp j\omega t$ 代替 $\cos\omega t$ 的技巧和关于波的传播的附录。

在讲矢量的第一章之后，第二、三和四章描述在真空中和介质中的静电场。第四章全部叙述拉普拉斯方程和泊松方程的解法。

第五章和第六章讨论相对论，它可以略去不读而不失掉连贯性，事实上，本书兼用通常的方式和相对论方式导出电磁学方程组，在某种意义上说，这两种方式是互相补充的。第五章是相对论基本概念的简短叙述，很少涉及电荷。从数学上来说，除了需要基本数学分析和第一章的矢量分析外，不需要更多的预备知识。第六章的内容，是从库仑定律和洛仑兹变换出发来阐明麦克斯韦方程组，为简单起见，在叙述中假定电荷以匀速运动。

第七章和第八章论述引出磁场的通常方法，兼顾恒定电流和变动电流。此处与他处一样，并不需要引用第六章的内容。

第九章的内容是讨论磁性材料，在一定程度上与讨论电介质的第三章相平行。

在第十章，不用相对论而重新导出关于 $\boldsymbol{B}$ 的旋度的麦克斯韦方程，这是通过对四个麦克斯韦方程式和它们的更一般的内涵进行讨论而得出的。这个观点与第六章的观点不同，实质上是不重复的。

最后四章，十一至十四，关系到麦克斯韦方程组的各种应用：第十一章是无限介质中的平面波，第十二章是反射和折射，第十三章是导波，第十四章是辐射。在第十一章和第十二章中涉及的介质只有理想电介质、良导体和低压电离气体。同样，第十三章只限于两种最简单的导波即同轴线中的TEM模式和矩形波导中的 $TE_{1,0}$ 模式。第十四章讨论电偶极子和磁偶极子、四极

子，以及关于半波天线、天线阵和互易定理的基本概念。

对于较简单的电磁学课程，可以只读第二、三章(略去§3.3, §3.4, §3.8, §3.9和§3.10各节)，第四章(略去§4.4和§4.5两节)，第七、八、九章(略去§9.3但保留$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$这一公式)和第十章。对于较高级的课程则与此相反，第二、三、四、五、七、八和九各章可以用各章末的总结作简短的复习，然后从第六章开始，进到第十章和以后各章。当然，还有许多别的可能选择。

在第十二章中，§12.3和§12.7可以略去。它涉及费涅尔公式在几个特殊场合下的应用，与以后各章没有实质的联系。第十三章，对于处理电磁波传播问题的方法和工程应用方面都颇有教益，但对于领会第十四章的内容并非必要。第十四章的基础是第十章和第十一章的头两节。

习题

第二版包括了广泛收集的习题，许多是从当代物理学和工程学文献中引来的。这些习题清楚地表明，电磁学在广阔的天地中有着丰富的应用。它对已学到的知识起着举一反三的作用，而且有创造性发挥的余地。把这些习题全做出来，需要花费很多时间和精力，因此只有少数人能做到。可以留下一部份将来重读时再做。

如果有条件，建议在计算机上解习题。

单位和符号

本书采用了国际单位制(SI)，它是1960年在巴黎召开的第十一届度量衡大会上采纳的。这个单位制的基本单位是米、千克、秒、安培、开尔文和坎德拉，在电磁学领域内，实质上与乔尔基单位制(即有理化高斯制)或MKSA单位制相同。

描述周期性现象的指数函数，可以用$\exp(j\omega t)$，也可以用$\exp(-j\omega t)$，它们的实部都是$\cos\omega t$。我们采用正指数函数，它较为有利。否则，阻抗就不是$R+jX$而成了$R-jX$。

P. 劳兰

D. R. 考森

符 号 表

空间　时间　力学

$dl, ds, d\mathbf{r}$	长度元或距离元
l, L, s, r	总长度或距离
da	面积元
S	总面积
$d\tau$	体积元
τ	总体积
Ω	立体角
$\mathbf{n}$	面的法矢量
λ	波长
λ_0	真空中的波长
λ_g	波导中的波长
$\bar{\lambda}=\lambda/2\pi=1/k_r$	弧度长
$k=k_r-jk_i$	波数
k_i	衰减常数
$\delta=1/k_i$	衰减距离
t	时间
$T=1/f$	周期
$f=1/T$	频率
$\omega=2\pi f$	角频率

$u, v, \gamma=\dfrac{1}{\left\{1-\left(\dfrac{u}{c}\right)^2\right\}^{1/2}}$	速度
$a=\dfrac{\partial u}{\partial t}$	加速度
ω	角速度
$\alpha=\dfrac{\partial\omega}{\partial t}$	角加速度
m	质量
ρ	密度
q	曲线坐标
r	四维矢量
$\boldsymbol{p}$	动量
p	四维动量
I	转动惯量
$\boldsymbol{F}$	力
$\boldsymbol{\Gamma}$	力矩
p	压力
W	能量

电磁学

Q	电量
$c=2.998\times10^8$ 米/秒	光速
ρ	体电荷密度
σ	面电荷密度
ν, λ	线电荷密度
V	电势，标势
U	感生电动势，电压
$\boldsymbol{E}$	电场强度
$\boldsymbol{D}$	电位移
$\epsilon_0=8.854\times10^{-12}$ 法拉/米	真空的介电常数
ϵ_r	相对介电常数
$\epsilon=D/E$	介电常数
Q	媒质的 Q
$\boldsymbol{p}$	电偶极矩
$\boldsymbol{P}$	电极化强度，单位体积内的电偶极矩

α	分子极化率
χ_e	电极化率
q	电四极矩
I	电流
$\boldsymbol{J}$	体电流密度
J	四维电流密度
$\boldsymbol{\lambda}$	面电流密度
$N_A=6.023\times10^{23}$ 1/克分子	阿伏加德罗常数
M	分子量
$k=1.381\times10^{-23}$ 焦耳/开尔文	玻尔兹曼常数
$e=1.602\times10^{-19}$ 库伦	电子电荷
$\hbar=1.055\times10^{-34}$	普朗克常数除以 2π
$\boldsymbol{A}$	矢势
A	四维势
$\boldsymbol{B}$	磁感应强度
$\boldsymbol{H}$	磁场强度

Φ	磁通量	R	电阻
$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ 亨利/米	真空的导磁率	C	电容
μ_r	相对导磁率	L	自感
$\mu=B/H$	导磁率	M	互感
$\boldsymbol{M}$	单位体积内的磁矩	ρ	电阻率
χ_m	磁化率	σ	电导率
$\boldsymbol{m}$	磁偶极矩	$\mathbf{S}$	波印廷矢量

数学符号

$\approx$	近似等于	$\nabla\times$	旋度
$\propto$	正比于	$\Box$	方算符
$n!$	n 的阶乘	∇^2	拉普拉斯算符
$e^x, \exp(x)$	x 的指数函数	$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	笛卡儿坐标系的单位矢量
$\mathrm{Re}\, z$	z 的实部		
$\mathrm{Im}\, z$	z 的虚部	$\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{z}_1$	柱坐标系的单位矢量
$\lvert z\rvert$	z 的模		
$\log x$	x 的十进对数	$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\varphi}_1$	球坐标系的单位矢量
$\ln x$	x 的自然对数		
$\arctan x$	x 的反正切	$\boldsymbol{r}_1$	沿 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量
z^*	z 的复共轭	(x, y, z)	场点
$\boldsymbol{E}$	矢量	(x', y', z')	源点
∇	梯度	$\overline{E}$	平均值
$\nabla\cdot$	散度		

一车

胡

目　录

第一章　矢　　量

关于电磁现象，我们是通过电荷和电流的场来进行讨论的。例如，两个电荷之间的力，我们把它看作是由于其中任一个电荷与另一个电荷的场相互作用的结果。

因此一开头就得把处理场的数学方法彻底弄通是很重要的。这一章讨论矢量，目的就在于此。顺便提醒一下，场的概念和矢量数学不仅对电磁理论，而且对现代物理学的几乎所有方面都很重要。

我们假定你对矢量不熟悉，因此需要从头讲起。

如果情况相反，你对矢量分析已很熟悉，就可以不必读§1.1至§1.8，而把注意力集中到§1.9，它是讨论曲线坐标的。

从数学上看，场是描写空间中所有各点上的某一个物理量的函数。对于标量场，这个物理量由每一点上的一个单纯的数值就能完全确定。温度、密度和电位就是标量的例子，它们的数值可以随空间中的地点而变化。至于矢量场，它既有数值又有方向。风速、重力和电场强度就是矢量的几个例子。

矢量用黑体字母符号表示，白体字母符号则表示标量或者矢量的数值。

按照一般习惯，我们采用右旋笛卡儿坐标系，如图 1.1。将右手螺旋由正 x 轴转 90° 拧向正 y 轴，螺旋前进的方向则是正 z 轴的方向。

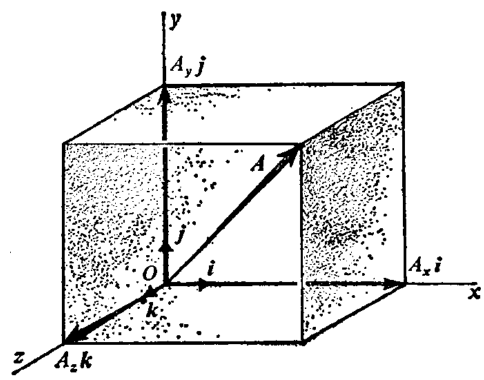


图 1-1　一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和三个矢量 $A_x\boldsymbol{i}$、$A_y\boldsymbol{j}$、$A_z\boldsymbol{k}$，把后面三个矢量首尾衔接起来，就与 $\boldsymbol{A}$ 相等。

§1.1　矢量代数

在三个互相垂直的轴上给出三个分量，一个矢量就确定了。例如，在图 1-1 的笛卡儿坐标系中，矢量的分量是 A_x、A_y、A_z。

利用单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，可以把矢量 $\boldsymbol{A}$ 唯一地分解为它的分量。这三个单位矢量分别定义为在正的 x、y、z 方向上数值为 1 个单位的矢量，则

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}. \tag{1-1}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 是三个数值为 A_x、A_y、A_z，分别平行于 x、y、z 轴的矢量的和。

$\boldsymbol{A}$ 的数值是

$$A=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)^{1/2}. \tag{1-2}$$

把两个矢量的相应分量相加，就得到它们的和

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k}. \tag{1-3}$$

把其中一个矢量变号后，再相加，就得到差

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(A_x-B_x)\boldsymbol{i}+(A_y-B_y)\boldsymbol{j}+(A_z-B_z)\boldsymbol{k}. \tag{1-4}$$

我们要用到两类乘积：标量积或称点积；矢量积或称叉积。标量积或点积是一标量，它由一个矢量的数值乘以第二个矢量的数值，再乘以两个矢量的夹角的余弦而得到的。例如，在图 1-2 中

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos(\varphi-\theta). \tag{1-5}$$

从定义可知，通常算术中的乘法交换律和分配律对于标量积是适用的，则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{1-6}$$

以及

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}. \tag{1-7}$$

从标量积的定义可知

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1, \tag{1-8}$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{1-9}$$

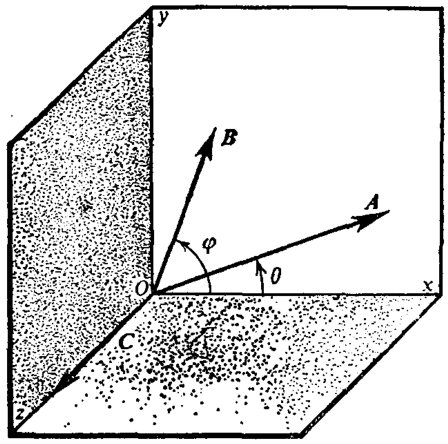


图 1-2 在 xy 平面内的两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$。矢量 $\boldsymbol{C}$ 是它们的矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。

因此

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}) \tag{1-10}$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \tag{1-11}$$

对于两个矢量在同一个坐标平面上的情况，上述结果很容易验证，作为例子如图 1-2 所示

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos(\varphi-\theta)=AB\cos\varphi\cos\theta+AB\sin\varphi\sin\theta \tag{1-12}$$

$$=A_xB_x+A_yB_y. \tag{1-13}$$

［例 1-1］ 标量积的一个简单的物理实例是力 $\boldsymbol{F}$ 作用一段位移 $\boldsymbol{s}$ 所作的功 W：$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$。

矢量积或叉积是一个矢量，它的方向与原来的两个矢量所在的平面垂直，它的数值是这两个矢量的数值的乘积，再乘以二者之间的夹角的正弦。矢量积的记法如下

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}, \tag{1-14}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 的数值

$$C=|AB\sin(\varphi-\theta)|, \tag{1-15}$$

φ 和 θ 的定义见图 1-2。$\boldsymbol{C}$ 的方向由右手螺旋规则给出：如果把第一个矢量($\boldsymbol{A}$)顺着较小的夹角转向第二个矢量($\boldsymbol{B}$)的方向，那么，矢量 $\boldsymbol{C}$ 的方向就是在与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面相垂直的轴上的右手螺旋前进的方向。

矢量积不服从交换律，因为把 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的顺序颠倒以后，$\boldsymbol{C}$ 的方向也倒过来了，则

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}). \tag{1-16}$$

不过分配律还是成立的

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}), \tag{1-17}$$

习题 1-7 将要证明这点。

从矢量积的定义可知

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0. \tag{1-18}$$

对于图 1-1 的右手坐标系来说，还有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \text{等等。} \tag{1-19}$$

如将$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的矢量积用它们的分量表示，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\times(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}) \tag{1-20}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k} \tag{1-21}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}. \tag{1-22}$$

对于图 1-2 上的两个矢量，这个结果可以验证如下：把 $\sin(\varphi-\theta)$展开，注意这个矢量积是在正 z 方向上。

［例 1-2］ 作为矢量积的一个较好的物理实例，力$\boldsymbol{F}$在力臂 $\boldsymbol{r}$ 上围绕O点产生的力矩$\boldsymbol{T}$，如图 1-3 所示，这里$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$。

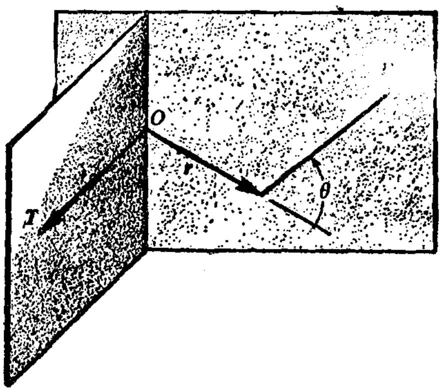


图 1-3　矢量乘法的例子。力$\boldsymbol{F}$围绕点O的力矩$\boldsymbol{T}$为$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$。这个矢量的数值是$rF\sin\theta$，方向如图所示。

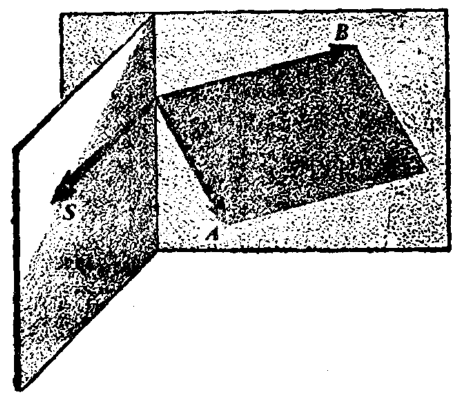


图 1-4　矢量乘法的另外一个例子。平行四边形的面积是$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}$。矢量$\boldsymbol{S}$与平行四边形垂直。

第二个例子是平行四边形的面积，如图 1-4 所示，这里的面积是$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，这个面积是由一个垂直于这个面的矢量来代表的。

还可定义出许多别的乘法运算来，但只有这里所指出的标量积和矢量积，对于描述实际的物理量，才是有用的。

§ 1.2　不变性

也许你已经注意到，对于标量积，我们有两种定义法，即(1-5)式和(1-11)式。

第一种定义，显然和某个特定的坐标系无关，它只与两个矢量的数值以及它们之间的夹角有关。与坐标系无关的量，叫做不变量。

第二个定义见(1-11)式，包含了$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$在某个特定坐标系里的分量。由于第二个定义是从第一个定义推导出来的，它应当也是不变量。例如，给出力$\boldsymbol{F}$和位移$\boldsymbol{s}$，第二个定义对于任何右手笛卡儿坐标系都会给出正确的数值结果。如果不是这样，对我们就毫无意义了。

现在我们来证明第二个定义，即(1-11)式，确实是不变量。首先，我们来看图 1-5 中的两个坐标系 x、y、z 和 x'、y'、z'，其中一个相对于另外一个有平移，但没有旋转。很显然，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的分量在两个坐标系中是一样的，因此，(1-11)式在两个坐标系中都导致同一结果。

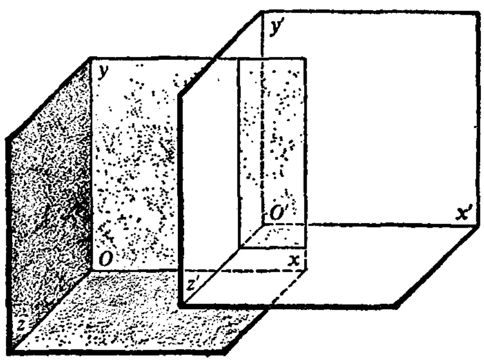


图 1-5　两个坐标系。x'、y'、z' 系统是由 x、y、z 系统通过平移而得到的。对应的坐标轴(如 Ox 和 $O'x'$)是平行的，但是原点 O 和O' 不重合。

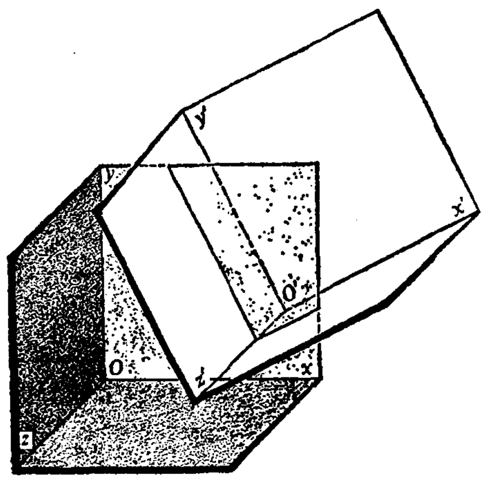


图 1-6　x'、y'、z' 坐标系是由x、y、z 坐标系通过平移和旋转而获得的。两个原点 O 和 O' 不重合，而且对应的轴也不平行。

图 1-6 中的两个坐标系 x、y、z 和 x'、y'、z' 之间的关系就更具有普遍意义，它既有平移又有旋转。

上面已说明平移不会有影响，所以只要考虑旋转。然而，坐标系的任何旋转，都可以分解为绕空间三个不同的轴依次进行的三个旋转，因此，只要分析一下(1-11)式在任何一个旋转之下是不是不变量就行了。图 1-7 绘出了这个旋转，x' 和 y' 轴相对于 x 和 y 轴倾斜了一个角度 θ。在这个情况下，P 点在两个坐标系中的坐标的关系如下

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta, \tag{1-23}$$

$$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta, \tag{1-24}$$

$$z'=z, \tag{1-25}$$

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \tag{1-26}$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta, \tag{1-27}$$

$$z=z'. \tag{1-28}$$

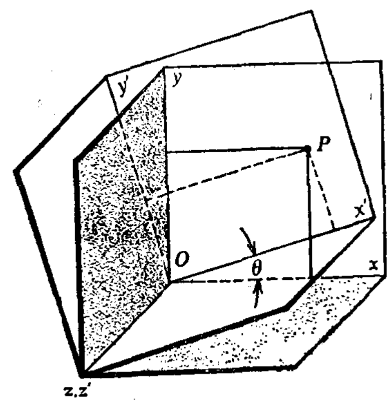


图 1-7　x'、y'、z' 坐标系是由 x、y、z 坐标系绕 z 轴旋转而获得的。

矢量的分量

$$\mathbf{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}=A_{x'}\boldsymbol{i}'+A_{y'}\boldsymbol{j}'+A_{z'}\boldsymbol{k}', \tag{1-29}$$

服从类似的变换公式

$$A_{x'}=A_x\cos\theta+A_y\sin\theta, \tag{1-30}$$

$$A_{y'}=-A_x\sin\theta+A_y\cos\theta, \tag{1-31}$$

$$A_{z'}=A_z, \tag{1-32}$$

$$A_x=A_{x'}\cos\theta-A_{y'}\sin\theta, \tag{1-33}$$

$$A_y = A_{x'}\sin\theta + A_{y'}\cos\theta, \tag{1-34}$$

$$A_z = A_{z'}. \tag{1-35}$$

对矢量$\boldsymbol{B}$也有类似的公式。若将上面的变换公式代入

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{1-36}$$

如果右端的表达式是个不变量，那么就会获得一个用带撇的分量组成的类似表达式。的确我们得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = A_{x'}B_{x'} + A_{y'}B_{y'} + A_{z'}B_{z'}. \tag{1-37}$$

因此，我们就证明了由(1-11)式所定义的标量积，在坐标轴平移和旋转这两种情况下都是一个不变量。

那么矢量积又怎样呢？它也有两种定义方法，一个是(1-14)式，一个是(1-22)式。

对第一个定义来说，两个矢量的矢量积是不变量，因为它只依赖于两个矢量的数值和它们之间的夹角。由(1-22)式定义的矢量积也是不变量吗？当然应该是，因为它是(1-14)式的直接推论。我们再应用同样的变换公式即(1-30)至(1-35)式，单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$也要同时按以下的公式变换

$$\boldsymbol{i} = \cos\theta\boldsymbol{i}' - \sin\theta\boldsymbol{j}', \tag{1-38}$$

$$\boldsymbol{j} = \sin\theta\boldsymbol{i}' + \cos\theta\boldsymbol{j}', \tag{1-39}$$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'. \tag{1-40}$$

从而可以得到

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ A_{x'} & A_{y'} & A_{z'} \\ B_{x'} & B_{y'} & B_{z'} \end{vmatrix}. \tag{1-41}$$

因此，由(1-22)式定义的矢量积也是不变量。

§1.3 对时间的导数

我们常常要遇到标量和矢量对于时间和空间坐标的变化率，也就是对时间和空间的导数。

矢量对时间的导数是清楚的。如图1-8，一个矢量$\boldsymbol{A}$，经过时间Δt变化了$\Delta\boldsymbol{A}$，一般来说数值和方向都会发生变化。由于$\Delta\boldsymbol{A}$的分量是ΔA_x、ΔA_y和ΔA_z，所以

$$\Delta\boldsymbol{A} = \Delta A_x\boldsymbol{i} + \Delta A_y\boldsymbol{j} + \Delta A_z\boldsymbol{k}. \tag{1-42}$$

照通常的办法，用Δt来除$\Delta\boldsymbol{A}$并取极限，我们得到导数$d\boldsymbol{A}/dt$的定义如下

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{1-43}$$

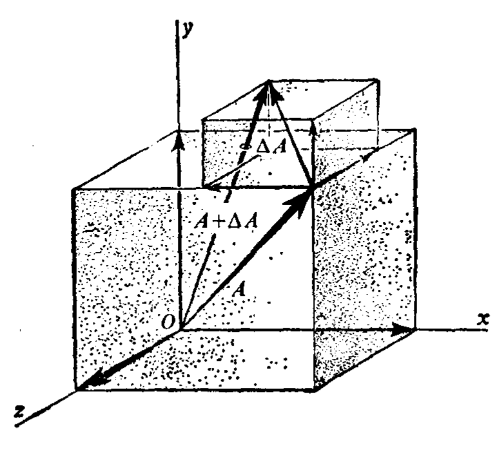


图1-8 矢量$\boldsymbol{A}$和它的增量$\Delta\boldsymbol{A}$，以及它们的分量。