高等学校数学教材配套辅导书

概率统计辅导

主　编　北京大学数学科学学院　章昕

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

316

概率统计辅导

主　编　北京大学数学科学学院　章　昕
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导/章昕编著. - 北京:科学技术文献出版社,2000.10

ISBN 7-5023-3636-2

Ⅰ.概... Ⅱ.章... Ⅲ.①概率论-自学参考资料②数理统计-自学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 45451 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社

邮 购 部 电 话:(010)62579473-8100

图书发行部电话:(010)62534708,62624508,62624119

门 市 部 电 话:(010)62534447,62543201

图书发行部传真:(010)62579473-8002

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策　划　编　辑:胡东华

责　任　编　辑:张美丽

责　任　校　对:张美丽

封　面　设　计:胡东华

发　　行　　者:科学技术文献出版社发行　新华书店总店北京发行所经销

印　　刷　　者:北京市金华彩印厂

版　(　印　)　次:2000 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

开　　　　　本:850×1168　大 32 开

字　　　　　数:280 千字

印　　　　　张:17.5

定　　　　　价:20.00 元

前　言

概率统计作为数学的一个重要分支在许多领域中有着广泛的应用。现在,不但理工科学,而且经济学、管理学专业对概率统计的要求也越来越高。如果仅仅靠一本教材,一星期有限的几个课时,再加上课后少量的练习,往往是很难学好这门课的,在一年一次越来越热的考研中,概率统计不容忽视,而且难度有所增加,如何学好这门课,已成为广大同学迫切希望解决的问题。

基于这一目的,我们精心编写了这本书。在书的每一节里,我们首先列出了这一节的主要内容及计算公式;然后给出了大量详细的例题解答,使读者能在最短的时间对每一节内容一目了然,并借助例题达到理解记忆,融汇贯通,并能达到举一反三之目的。对于有些例题,还给出了几种解法,以便读者进行对比。在每一章的后面,我们列出了十几年的考研真题,以便考研的同学能够参考和借鉴。最后,给出了一定量的练习,读者可以自己挑选,做完后可参考后面的答案来评判掌握的情况。

本书的创意由胡东华老师提出,并在其指导下完成,特此致谢!由于编者水平有限,加之时间仓促,匆匆草就,其中错漏不妥之处,敬请广大读者批评指正。

第一章　随机事件及其概率

在这一章里，我们首先复习随机事件及其概率，事件的关系和运算等基本概念，然后介绍几种常用的概率：古典概率、几何概率、条件概率和贝努里概型，最后学习一些计算概率的常用方法。通过复习，应掌握如何判别事件的概率的概型及如何利用概率的性质和有关公式来计算概率。

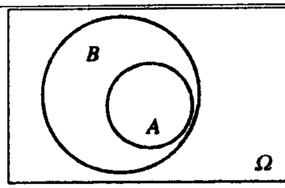
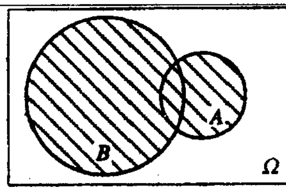
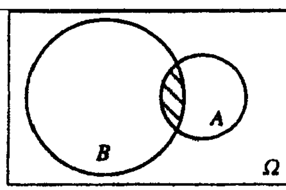
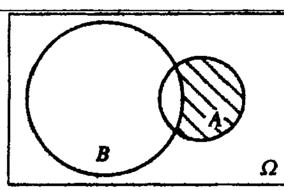
§1.1　事件的关系和运算

1.1.1　考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1　事件及几个基本概念的定义

<table>
<tr><th>名称</th><th>定　　义</th><th>举例</th></tr>
<tr><td>随机试验</td><td>可以在相同的条件下重复进行，并且每次试验的结果事先不可预知的试验</td><td rowspan="6">掷一颗均匀的骰子，观察出现的点数是一个随机试验。试验的结果“点数是 3”是一个随机事件。而事件 w_1 = “点数 1”，w_2 = “点数 2”，…，w_6 = “点数 6”是 6 个基本事件，事件 B = “点数为奇数”是一个复合事件。“点数为 1 到 6 中的某一个”为必然事件；“点数为 7”是不可能事件。</td></tr>
<tr><td>随机事件</td><td>在随机试验中，可能发生也可能不发生的事件，也简称为事件</td></tr>
<tr><td>基本事件</td><td>仅含有一个样本点的随机事件（随机试验中每一种可能的试验结果称为一个样本点）</td></tr>
<tr><td>复合事件</td><td>含两个或两个以上样本点的随机事件</td></tr>
<tr><td>必然事件</td><td>必然会发生的事件</td></tr>
<tr><td>不可能事件</td><td>试验中不可能发生的事件</td></tr>
</table>

表 1.1.2　事件的关系和运算

名称	意义	文氏图	备注
事件的包含	如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，称事件 B 包含事件 A。用 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 表示。		注：$\phi \subset A \subset \Omega$ 总是成立的。
事件的相等	如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等。用 $A = B$ 表示。		
事件的和	“事件 A 与 B 中至少有一个发生”是一个事件，称为事件 A 与 B 的和，记为 $A + B$ 或 $A \cup B$。		注：事件 $A + B$ 发生是指仅 A 发生或者仅 B 发生或者 A 与 B 同时发生。
事件的积	“事件 A、B 同时发生”是一个事件，称为 A 与 B 的积。记为 AB 或 $A \cap B$。		注：事件 AB 发生是指 A 发生且 B 也发生。
事件的差	“事件 A 发生而 B 不发生”是一个事件。称为 A 与 B 的差，记作 $A - B$。		注：$A - B$ 与 $B - A$ 是两个不同的事件。

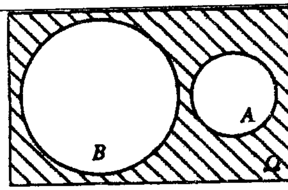
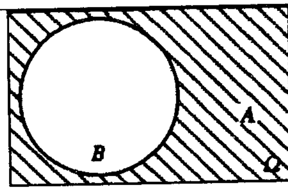
名称	意义	文氏图	备注
事件的互不相容(互斥)	如果事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$。称 A 与 B 互不相容(或互斥)。		注:A 与 B 互不相容只表示这两个事件不能同时发生,但却允许它们同时都不发生。
事件的对立	事件 A 与 B 不能同时发生,但必须有一个发生,即 A,B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$,称 A 与 B 是对立的(或互逆的)事件,记为 $\bar{A}=B$ 或 $\bar{B}=A$。		注:当 A 与 B 对立时,A 与 B 既不能同时发生,但也不能同时不发生,即 A 发生时,B 一定不发生,而 A 不发生时,B 一定发生。
完备事件组	如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。		

表 1.1.3　同种记号在概率论与集合论中的对照

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
w	基本事件	元素
A	事件	子集
$A \subseteq B$	事件 A 发生,则 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 和事件 B 是同一个事件	A 与 B 相等
$A \cup B(A + B)$	事件 A 与 B 中至少有一个发生	A 与 B 的并集(和集)
$A \cap B(AB)$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生,而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \phi$	事件 A 与 B 不相容	A 与 B 的交集为空
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的补集

表 1.1.4　关系运算的推广

分配律:$AB + C = (A + C)(B + C)$;	交换律:$A + B = B + A, AB = BA$;
摩根律(对偶律):$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$;	结合律:$(A + B) + C = A + (B + C)$; $(AB)C = A(BC)$;
补元律:$A\bar{A} = \phi \quad A + \bar{A} = \Omega$;	还原律:$\bar{\bar{A}} = A$;
吸收律:若 $A \subset B$,则 $AB = A$,且 $A + B = B$;	分解律:若 $A \subset B$,则 $B = A + \bar{A}B$;
蕴涵律:若 $AB = \phi$,则 $A \subset \bar{B}, B \subset \bar{A}$;	排中律:$A \cup \bar{A} = \Omega$;
矛盾律:$A \cap \bar{A} = \phi$;	差积转换律:$A - B = A \cap \bar{B} = A - (A \cap B)$。

1.1.2 典型例题解析

例 1:设袋内有 10 个编号为 1 ~ 10 的球,从中任取一个,观察其号码

(1) 写出这个试验的样本空间。

(2) 若 A 表示"取得的球的号码是奇数",B 表示"取得的球的号码是偶数",C 表示"取得的球的号码小于 5",则

①$A+B$, ②AB, ③$\bar{C}$, ④$\bar{A}\bar{C}$,

⑤$\overline{B+C}$, ⑥$\overline{BC}$, ⑦$A-C$ 各表示什么事件?

(3) 事件 A 与 B 是否互不相容?

(4) AC 与 $\bar{A}\bar{C}$ 是否互不相容?是否对立?

解:(1) 若用 w_i 表示"取得的球的号码为 i"($i=1,2,\cdots,10$),则这个试验的样本空间为 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_{10}\}$。

(2) ① $A+B$ 表示"取得的球的号码或者是奇数,或者是偶数",它是必然事件,即 $A+B=\Omega$。

② AB 表示"取得的球的号码既是奇数又是偶数",它是不可能事件,即 $AB=\phi$。

③$\bar{C}$ 表示"取得的球的号码大于等于 5",即 $\bar{C}=\{w_5,w_6,\cdots,w_{10}\}$。

④$\bar{A}\bar{C}$ 表示"取得的球的号码是大于 5 的偶数",即 $\bar{A}\bar{C}=\{w_6,w_8,w_{10}\}$。

⑤ $\overline{B+C}$ 表示"取得的球的号码不是偶数也不小于 5",也就是"取得的球的号码是大于等于 5 的奇数",即$\overline{B+C}=\bar{B}\bar{C}=\{w_5,w_7,w_9\}$。

⑥ $\overline{BC}$ 表示"取得的球的号码不是小于 5 的偶数",也就是"取得的球的号码是奇数或者大于等于 5",即$\overline{BC}=\bar{B}+\bar{C}=\{w_1,w_3,w_5,w_6,w_7,w_8,w_9,w_{10}\}$。

⑦$A-C$表示"取得的球的号码是奇数但不小于5",也就是"取得的球的号码是大于等于 5 的奇数",即 $A-C=\{w_5,w_7,w_9\}$。

(3)A与B互不相容,因为取得的球的号码不会既是奇数又是偶数,即 $AB=\phi$。同时,$A+B=\Omega$,所以 A 与 B 是对立事件。

(4) 因为 $AC=\{w_1,w_3\}$,$\bar{A}\bar{C}=\{w_6,w_8,w_{10}\}$ 所以$(AC)(\bar{A}\bar{C})=\phi$,但 $AC+\bar{A}\bar{C}=\{w_1,w_3,w_6,w_8,w_{10}\}\neq\Omega$,因而 AC 与$\bar{A}\bar{C}$ 互不相容,但不对立。

例 2:在计算机系学生中任选一名学生,设事件

$A=$"选出的学生是男生";

$B=$"选出的学生是三年级学生";

$C=$"选出的学生是科普队的"。

(1) 叙述事件 $AB\bar{C}$ 的含义。

(2) 在什么条件下，$ABC = C$ 成立？

(3) 什么时候关系 $C \subseteq B$ 成立？

解：(1) 事件 AB 的含义是"选出的学生是三年级的男生"，而事件 $\bar{C}$ 的含义是选出的学生不是科普队的，所以 $AB\bar{C}$ 的含义是"选出的学生是三年级的男生不是科普队员"。

(2) 由于 $ABC \subseteq C$，故 $ABC = C$ 的条件是：当且仅当 $C \subseteq ABC$. 即当且仅当 $C \subseteq AB$，即"科普队员都是三年级的男生"。

(3) 当科普队员全是三年级学生时，C 是 B 的子事件，即 $C \subseteq B$ 成立。

例 3：用已知事件表达有关的其他事件

(1)"A 发生，而 B 与 C 都不发生" 可表为 $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A\overline{(B \cup C)}$；

(2)"A,B,C 中恰有一个发生" 可表为 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$；

(3)"A,B,C 中恰有两个发生" 可表为 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$ 或 $AB \cup BC \cup CA - ABC$；

(4)"A,B,C 中不多于一个发生" 可表为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$。

注：上面的表示法是根据事件的关系与运算，以及事件的运算律得到的。比如(1)，单个看，是 A 发生，B 不发生，C 也不发生，所以就是 $A\bar{B}\bar{C}$；把"B,C 都不发生"一起看，它的逆事件是"B,C 中至少一个发生"，即 $B \cup C$，于是"B,C 都不发生"就是 $\overline{B \cup C}$，所以结果可以写成 $A\overline{(B \cup C)}$。

例 4：设 A,B,C 为随机事件，试证明下列各式：

(1) $(A - AB) \cup B = A \cup B$；

(2) $(A \cup B) - B = A - AB = A\bar{B}$；

(3) $(A \cup B) - AB = A\bar{B} \cup \bar{A}B$；

(4) $A \cup (B - AB) \cup (C - AC) = A \cup B \cup C$。

证明　(1) 方法一　设 $w \in A \cup B$，则

$$\begin{cases} \text{或 } w \in A\bar{B} \Rightarrow w \in A \text{ 同时 } w \in \bar{B} \Rightarrow w \in (A - B) \Rightarrow w \in (A - AB) \\ \text{或 } w \in \bar{A}B \Rightarrow w \in B \text{ 同时 } w \in \bar{A} \Rightarrow w \in B \\ \text{或 } w \in AB \Rightarrow w \in B \end{cases}$$

于是 $w \in (A - AB) \cup B$ 故

$$(A - AB) \cup B \supset A \cup B$$

另一方面，有 $(A - AB) \subset A \subset A \cup B$。于是

$$(A - AB) \cup B \subset A \cup B$$

故 $$(A-AB)\cup B=A\cup B$$

方法二　设 $A\cup B$ 发生,则 A,B 至少有一个发生,那么有下面三种情况:

①A 发生而 B 不发生 $\Rightarrow A$ 发生而 AB 不发生 $\Rightarrow A-AB$ 发生 $\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生;

②A 不发生而 B 发生 $\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生;

③A,B 都发生 $\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生。

因此不论哪种情况,总有 $(A-AB)\cup B$ 发生,即有

$$(A-AB)\cup B\supset A\cup B$$

另一方面,由方法一知,$(A-AB)\cup B\subset A\cup B$,由于"$\subset$"及"$\supset$"同时成立,故(1)得证。

方法三　注意到 $A-B=A\bar{B}$,于是

$$\begin{aligned}(A-AB)\cup B&=(A\overline{AB})\cup B=[A(\bar{A}\cup\bar{B})]\cup B\\&=(A\bar{A}\cup A\bar{B})\cup B\\&=(A\bar{B})\cup B=A\cup B\end{aligned}$$

方法四　由于 $A-AB$ 表示 A 发生而 A,B 不同时发生,即 A 发生 B 不发生,故 $(A-AB)\cup B$ 表示 A 与 B 至少有一个发生,这等价于事件 $A\cup B$ 发生。故 $(A-AB)\cup B=A\cup B$。

(2) 由于

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}=A\bar{B}$$

而 $$A-AB=A\overline{AB}=A(\bar{A}\cup\bar{B})=A\bar{A}\cup A\bar{B}=A\bar{B}$$

故 $$(A\cup B)-B=A-AB=A\bar{B}$$

(3) 由于

$$\begin{aligned}(A\cup B)-AB&=(A\cup B)(\overline{AB})=(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})\\&=[(A\cup B)\bar{A}]\cup[(A\cup B)\bar{B}]=\bar{A}B\cup A\bar{B}\end{aligned}$$

故 $$(A\cup B)-AB=A\bar{B}\cup\bar{A}B$$

(4) 由于

$$\begin{aligned}&A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup(B\overline{AB})\cup(C\overline{AC})\\&=A\cup[B(\bar{A}\cup\bar{B})]\cup[C(\bar{A}\cup\bar{C})]\\&=A\cup(B\bar{A})\cup(C\bar{A})=(A\cup B)\cup(C\bar{A})\\&=[(A\cup B)\cup C]\cap[(A\cup B)\cup\bar{A}]\\&=(A\cup B\cup C)\cap\Omega=A\cup B\cup C\end{aligned}$$

故 $$A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup B\cup C$$

1.1.3 小结

在本节中,我们详细的给出了事件及其相关的概念,事件的关系和运算的定义和运算律。在例题中,给出了如何求试验的样本空间,如何用已知事件的关系来表示其他事件,及事件之间关系的演算。

§1.2 事件的概率

1.2.1 考试内容及理解记忆方法

1. 概率的定义

(1) 概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 m 次,当 n 逐渐增大时,比值 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动,且 n 越大,摆动幅度越小。则称此常数 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$。

注:比值 $\frac{m}{n}$ 称作 n 次试验中 A 发生的频率,必须进行 n 次试验才能计算事件 A 发生的频率;而事件 A 的概率 $P(A)$ 是事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小。

(2) 概率的古典定义

若试验结果一共有 n 个基本事件 $w_1, w_2, \cdots, w_n$,且每次试验中各基本事件出现的可能性完全相同,而事件 A 由其中 m 个事件 $w_{i1}, w_{i2}, \cdots, w_{im} (m \leqslant n)$ 组成,则事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$。

注:概率的古典定义要求试验具有两个特点:试验的样本空间的样本点的有限性和每次试验中各基本事件 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 出现的等可能性。我们称具有上述两个特点的试验为古典试验,建立在古典试验上的数学模型为古典概型。

(3) 概率的公理化定义

设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记作 $P(A)$,称为事件 A 的概率。如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1° 非负性　对于每一个事件 A,有 $P(A) \geqslant 0$;

2° 规范性　$P(\Omega) = 1$;

3° 可列可加性　设 $A_1, A_2, \cdots$,是两两互不相容的事件,即 $i \neq j$ 时,$A_iA_j \neq \phi$,$i, j = 1, 2, \cdots$,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

2. 概率的性质

给定概率空间(Ω, P),可推出概率的下列性质:

1°$P(\phi) = 0$,即不可能事件的概率等于0。

2° 有限可加性　若 n 个事件$A_1, \cdots, A_n$ 满足$A_i \cap A_j = \phi(i \neq j)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3° 逆事件的概率　$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4° 单调性　设 A、B 是两个事件,且 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$,且

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

5° 连续性　设事件列 $A_1, A_2, \cdots$,满足 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$,且 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$,则 $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$

6° 加法定理　若 A、B 是任意两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般地,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件,则

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots \\ & + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned}$$

1.2.2　典型例题解析

例1　掷二枚骰子,求事件 A 为出现的点数之和等于3的概率。

解法一:掷两枚骰子出现的点数之和的可能数值为$\{2,3,4,5,\cdots,12\}$,事件 A 的结果只有3,故 $P(A) = \frac{1}{11}$。

解法二:掷两枚骰子可能出现的情况:

$(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)$ 基本事件总数 $6 \times 6 = 36$。在这些结果中,事件 A 只有两种结果:$(1,2),(2,1)$,故

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

从上述两种解法中,不难发现解法一错误。错因在于公式

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

仅当所述的试验结果是等可能性时才成立。而取数值2和3不是等可能的,2

只有情况(1,1)才出现,而3有两种情况(1,2)、(2,1),其他情况可以类推。

例2　某产品100件,其中3件次品,现从中抽取3件(不放回抽样),求下列事件的概率:

(1) 三件中恰有二件次品;

(2) 第三件才抽到次品。

解法一:设 A—{取正品},B—{取次品},C—{三件中恰有二件次品},D—{第三件才抽到次品}

(1) $P(C)=\dfrac{C_3^2C_{97}^1}{P_{100}^3}$

(2) $P(D)=\dfrac{C_3^1C_{97}^1}{P_{100}^3}$

解法二:(1) $P(C)=\dfrac{C_3^2C_{97}^1}{C_{100}^3}=\dfrac{97}{107800}$

或 $P(C)=P$(恰有两件次品)

$=P$(正次次)$+P$(次正次)$+P$(次次正)

$$=\frac{C_{97}^1C_3^1C_2^1}{C_{100}^1C_{99}^1C_{98}^1}+\frac{C_3^1C_{97}^1C_2^1}{C_{100}^1C_{99}^1C_{98}^1}+\frac{C_3^1C_2^1C_{97}^1}{C_{100}^1C_{99}^1C_{98}^1}$$

$$=\frac{97}{107800}$$

(2) $P(D)=\dfrac{C_{97}^1C_{96}^1C_3^1}{C_{100}^1C_{99}^1C_{98}^1}=\dfrac{388}{13475}$

或　$P(D)=\dfrac{P_{97}^2P_3^1}{P_{100}^3}=\dfrac{388}{13475}$

上述两种解法中,解法一错误。错因在于样本空间不一致。

注:用古典概率公式计算事件的概率时,可在不同的样本空间中考虑分析问题。但计算基本事件总数,事件 A 的基本事件个数时,二者必须在同一确定的样本空间考虑,否则会出错误。

例3　假设电话号码由7位数字组成(第一位数字不为0),试求下列事件的概率:$A_1=${7位数两两不同};$A_2=${7位数为3501896};$A_3=${7位数完全相同};$A_4=${7位数不含0和9};$A_5=${7位数不含0或9};$A_6=${7位数含0不含9}。

解:由0,1,2,…,9第十个数字可以形成 $N=9\times10^6$ 个不同电话号码。以 $N_i(i=1,2,\cdots,6)$ 表示事件 A_i 的号码数。那么 $N_1=9\times9\times8\times7\times6\times5$;$N_2=1$;$N_3=9$;$N_4=8^7$;$N_5=9^7+8\times9^6-8^7$(不含0的 9^7 种,不含9的 8×9^6 种,不含0和9的 8^7 种);$N_6=8\times9^6$-8^7(不含9的 8×9^6 种,不含0和9的 8^7 种)。于是,由公式 $P(A)$

$=\frac{m}{n}$，有

$$P(A_1)=\frac{N_1}{N}=0.06048;$$

$$P(A_2)=\frac{N_2}{N}=0.000000\dot{1};$$

$$P(A_3)=\frac{N_3}{N}=0.000001;$$

$$P(A_4)=\frac{N_4}{N}=0.23301689;$$

$$P(A_5)=\frac{N_5}{N}=0.770816\dot{1};$$

$$P(A_6)=\frac{N_6}{N}=0.239375\dot{1}。$$

例 4　任意将 10 本书放在书架，其中有两套书，一套 3 卷，另一套 4 卷，求下列事件的概率：(1)3 卷一套的放在一起；(2)4 卷一套的放在一起；(3) 两套各自放在一起；(4) 两套中至少有一套放在一起；(5) 两套各自放在一起，还按卷次顺序排好。

解：这是一古典概型概率问题，设 A 表示"3 卷一套的放在一起"，B 表示"4 卷一套的放在一起"，C 表示"两套各自放在一起"，D 表示"两套按卷次顺序排好"。

(1)3 卷一套的放在一起，可把 3 卷看成一个整体，总共有 8 个位置，不同的放法共有 8!种，3 卷一套之间可以任意排，共有 3!种放法，所以

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}$$

(2)
$$P(B)=\frac{7!\times 4!}{10!}=\frac{1}{30}$$

(3) 两套各自放在一起，把两套分别看成两个整体，共有 5 个位置，不同的排法共有 5!种，4 卷一套放在一起共有 4!种不同排法，3 卷一套的放在一起共有 3!种不同排法，所以

$$P(C)=P(AB)=\frac{5!\times 4!\times 3!}{10!}=\frac{1}{210}$$

(4)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}-\frac{1}{210}$$
$$=\frac{2}{21}$$

(5) 这是求事件 ABD 的概率，每一卷书按卷次顺序排好只有 2 种排法，所以

$$P(ABD)=\frac{5!\times 2\times 2}{10!}=\frac{1}{7560}$$

例 5　某班有 N 个战士，每人各有 1 支枪，这些枪外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，若每个人随机地取走 1 支枪：(1) 至少有 1 个人拿到自己的枪的概率是多少？(2) 恰好有 k 个人($0\leqslant k\leqslant N$) 拿到自己的枪的概率是多少？

解(1) 设 A_i 表示“第 i 个战士拿到自己的枪”($i=1,2,\cdots,N$)，此题为求事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N$ 的概率。

由于
$$P(A_i)=\frac{(N-1)!\times 1}{N!}=\frac{1}{N}$$
$$P(A_iA_j)=\frac{(N-2)!\times 1\times 1}{N!}=\frac{1}{P_N^{\,2}}(i\neq j)$$
$$\cdots,$$
$$P(A_1A_2\cdots A_N)=\frac{1\times 1\times\cdots\times 1}{N!}=\frac{1}{N!}$$

由公式得
$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)&=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}P(A_iA_j)+\cdots\\&\quad+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)\\&=C_N^1\frac{1}{N}-C_N^2\frac{1}{P_N^{\,2}}+\cdots+(-1)^{N-1}C_N^N\frac{1}{P_N^N}\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{N-1}\frac{1}{N!}\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\end{aligned}$$

(2) 由(1) 得
$$\begin{aligned}P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_N)&=1-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)\\&=1-\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\\&=\sum_{k=2}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\end{aligned}$$

当 k 个指定的战士拿到自己的枪的概率是 $P_1=\frac{1}{P_N^k}$，其余 $N-k$ 个战士都没有拿到自己枪的概率 $P_2=\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(-1)^j}{j!}$。恰有 k 个战士拿到自己的枪，则这 k 个可以是 N 中任意的 k 个，从 N 个战士中选出一组 k 个共有 C_N^k 中选法，所以所求概率为：

$$P\{\text{恰有 } k \text{ 个战士拿到自己的枪}\}$$
$$=C_N^k\frac{1}{P_N^k}\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(-1)^j}{j!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(-1)^j}{j!}$$

例6　从 0,1,2,…,9 这十个数字中任意读一个数字,假定每个数字被读到的概率都是 1/10,先后读 7 个数字,试求下列各事件的概率:

(1)A_1 = {指定的一个 7 位数};

(2)A_2 = {7 个数字全不相同};

(3)A_3 = {不含 9 和 1};

(4)A_4 = {9 恰好出现两次}。

解:这里试验为"从 10 个数中读 7 个(即有放回地取 7 个)",任取 7 个数的排列是一个基本事件,基本事件总数为 10^7。

(1)A_1 是指定的一个 7 位数,只含一个基本事件,故 $P(A_1) = \frac{1}{10^7}$。

(2)A_2 包含的基本事件数是 10 个数字中任取 7 个的全排列 P_{10}^7,故 $P(A_2) = \frac{P_{10}^7}{10^7}$。

(3) 这时只许在 0,2,3,4,5,6,7,8 这 8 个数字中取 7 个,故 A_3 包含 8^7 个基本事件,于是 $P(A_3) = \frac{8^7}{10^7}$。

(4) 出现 9 两次可在 7 个数字的排列位置中的任意两个位置,故有 C_7^2 种选择。其余的 5 个位置,可以放余下 9 个数字中的任一个,共有 9^5 种选法。所以 A_4 中含有基本事件数为 $C_7^2 9^5$。于是 $P(A_4) = \frac{C_7^2 9^5}{10^7}$。

例7　考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$,其中系数 B 和 C 取值是随机的,分别等于将一枚骰子连掷两次先后出现的点数。试求下列事件的概率:A_1 = {方程有不同实根};A_2 = {方程有重根};A_3 = {方程无实根}。

解:考虑方程的判别式 $\Delta = B^2 - 4C$,三种情形的充分必要条件是,1)$\Delta > 0$(两个不同实根);2)$\Delta = 0$(重根);3)$\Delta < 0$(虚根)。

随机试验:一枚骰子连掷两次,总共有 $N = 6^2 = 36$ 个基本事件,B 和 C 各有 1,2,3,4,5,6 等六个可能值,因此,有

B	1	2	3	4	5	6	Σ
$D = B^2/4$	0.25	1	2.25	4	6.25	9	
$\Delta > 0, D > C$ 的情形数	0	0	2	3	6	6	17
$\Delta = 0, D = C$ 的情形数	0	1	0	1	0	0	2
$\Delta < 0, D < C$ 的情形数	6	5	4	2	0	0	17

于是,由 $P(A) = \frac{m}{n}$,有