

新经济时代经管教程



新经济时代经管教程

运筹学

运筹学

Research Operations

吴良刚 主编

吴良刚 主编

22
69

人民出版社

湖南人民出版社

新经济时代经管教程

运筹学 Research Operations

李一智	王坚强	徐选华	吴良刚
主审	副主编	主编	

湖南人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/吴良刚主编.—长沙:湖南人民出版社,
2001.3

新经济时代经管教程

ISBN 7-5438-2517-1

I.运... II.①吴... III.运筹学-教材

IV.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 08677 号

责任编辑:李文君

装帧设计:朱 平

运筹学

吴良刚 主编

*

湖南人民出版社出版、发行

(长沙市银盆南路 78 号 邮编:410006)

湖南省新华书店经销 湖南省印研所实验工厂印刷

2001 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

开本:720×960 1/16 印张:17

字数:300,000 印数:1-3,500

ISBN7-5438-2517-1
F·405 定价:25.50 元

出版者的话

美国著名管理学家孔茨说过：有效的管理总是一种随机制宜的、因情况而异的管理。

21世纪是全球经济一体化的新时代，步入国际经营化是我国经济发展的必然。企业经营管理的国际化，要求企业必须具备全局的、逐步的发展战略和策略；在管理方面必须具有更大的弹性和适应性，使管理方法和技术视环境的变迁而改进和创新。而这一切，都需依赖于人才智能资本的作用。也就是说，步入国际经营化的企业需要具有创造力的能人来治理。因此，培养我们自己的适应新时代的有思想的企业家，有品位的管理者就更显必要与迫切。

正是基于上述理由，我们编辑出版了这套《新经济时代经管教程》。

这套丛书凝聚了学界智者多年探索和研究的心血。正是由于他们的默默耕耘和不懈努力，才使得作品不论从内容到形式都是“新的”，既适应新经济环境对经济管理内容与方法的需求，也符合新技术条件下人类思维的不断创新特性，是对管理经验和技巧的总结和提炼，是一种集体智慧的结晶。

本次推出的作品共13部：《工商管理案例集》、《管理学》、《人力资源管理理论与实务》、《现代市场营销学》、《国际结算》、《技术经济与项目经济评价》、《工程项目管理》、《运筹学》、《网络与电子商务》、《电子商务实现技术》、《金融学》、《投资银行理论与实务》、《财务管理》等。丛书既适用于高校教学和其他办学形式的成人教育，也适用于广大有志于经济、管理方面的探索者和实践者。应该说明的是，这套丛书的书目是不断扩展的，我们这样做的目的是期望能有更多的有识之士加入到这套丛书的建设中来。

企业管理中有许多可变因素，管理理论和方法也是不断变化的。因此，我们提供给读者的永远也不可能是其必须使用的惟一理论，但我们相信，我们的努力至少可以提供一些思路和启发。如果真能做到这一点，是我们最大的荣幸。由于出版时间仓促，加之建设自己的经济、管理方面的教材这一探索性质，书中难免有挂一而漏万之处，恳请指正。

湖南人民出版社文教室

2001年2月

— · 1 · —

HG88/06

前 言

随着社会主义市场经济体制的确立和与国际经济的接轨,随着科学技术的发展,生产规模的扩大,社会的进步,经济、管理工作的复杂程度和难度也愈来愈大,不仅需要定性的分析,而且更需要有定量的描述。运筹学作为一门定量优化的学科,可以解决诸如最优计划、最优分配、最优设计、最优管理、最优决策等各行各业的最优化问题。要提高经济效益,要实现科学的管理与决策,不懂得运筹学是不行的。因此,无论学什么专业,也无论从事什么工作,学习一些运筹学基础知识,都是必要的。

近年来,大批高等院校各类专业纷纷增设了运筹学类课程,社会上也出现了自学运筹学的热潮,本书正是为高等院校经济、管理类专业编写的运筹学教材,同时也适合于各行各业的工程技术人员、管理人员作为自学参考。

本书是在作者多年为经济、管理类专业学生讲授运筹学的教学经验基础上编写而成的。本书在阐述基本概念与原理时力求清晰、透彻,在介绍各类运筹学的寻优方法时,始终强调思路和方法,着重提高分析研究能力。同时阐明模型中各类数据、参数的事理意义和经济含义,而对数学基础要求较高的定理证明则予以忽略或少讲,使读者不会感到运筹学内容繁琐枯燥。本教材适用于高等院校经济、管理专业, MBA 专业以及其他相关专业。

本书由中南大学工商管理学院吴良刚副教授主编,其中第一、二、三、七章由吴良刚副教授编写,第四章由王坚强副教授编写,第五、六章由徐选华讲师编写。在本书的编写过程中,得到了中南大学工商管理学院博士生导师李一智教授、湖南师范大学理学院李显方教授的热情帮助和指导,在此表示衷心感谢。最后还要感谢中南大学工商管理学院和湖南人民出版社的领导对本书的出版所给予的大力支持和赞助。

由于水平有限,书中疏漏及缺点错误在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

2001 年 2 月于中南大学

目 录

导 语	(1)
第一章 线性规划基础	(4)
1. 线性规划问题及其数学模型	(4)
2. 线性规划图解法及其几何意义	(15)
3. 单纯形法原理	(21)
4. 单纯形法步骤及过程	(28)
5. 单纯形表	(34)
6. 单纯形法理论分析	(38)
7. 单纯形法的进一步讨论	(42)
本章小结	(51)
习题一	(51)
第二章 线性规划专题	(57)
1. 逆矩阵单纯形法	(57)
2. 对偶规划	(62)
3. 对偶问题的经济解释——影子价格	(75)
4. 灵敏度分析	(75)
5. 参数线性规划	(84)
6. 运输问题	(88)
7. 目标规划	(104)
本章小结	(112)
习题二	(113)
第三章 整数规划	(121)

1. 整数规划的特点	(121)
2. 分枝定界法	(122)
3. 割平面法	(125)
4. 0-1 规划和隐枚举法	(129)
5. 分派问题与匈牙利法	(132)
本章小结	(136)
习题三	(136)
第四章 动态规划	(139)
1. 多阶段决策问题	(139)
2. 动态、决策的基本要领和基本方程	(140)
3. 动态规划应用举例	(152)
本章小结	(166)
习题四	(167)
第五章 图与网络分析	(171)
1. 图的基本概念	(171)
2. 树	(176)
3. 最短路径问题	(181)
4. 网络最大流向问题	(188)
5. 最小费用最大流问题	(195)
本章小结	(200)
习题五	(201)
第六章 存贮论	(205)
1. 库存控制系统及其基本概念	(206)
2. 确定性存贮模型	(210)
3. 随机性存贮模型	(227)
本章小结	(232)
习题六	(233)

第七章 决策论	(236)
1. 引言	(236)
2. 决策分类	(236)
3. 决策过程	(237)
4. 不确定型的决策	(238)
5. 风险决策	(243)
6. 效用理论在决策中的应用	(248)
7. 决策树	(251)
本章小结	(256)
习题七	(256)

导 语

一、运筹学的概念及发展渊源

运筹学作为一门定量优化决策科学，推本溯源，已有半个世纪的历史。

运筹学作为科学名字出现在 20 世纪 30 年代末。当时英、美对付德国的空袭，雷达作为防空系统的一部分，技术上是可行的，但实际运用时却并不好用。为此，成立了一个由数学家、物理学家和军事学家组成的研究小组（起名为 Operations Research），研究如何合理运用雷达空防系统进行一类新问题的研究。为了进行运筹学研究，在英、美的军队中成立了一些专门 Operation Research 小组研究各种军事问题。第二次世界大战后，运筹学除军事方面的应用研究外，相继在工业、农业、经济和社会问题等各领域都有应用。最早建立运筹学会的国家是英国（1948 年），接着是美国（1952 年）、法国（1956）、日本和印度（1957 年）等。到 1986 年止，国际上已有 38 个国家和地区建立了运筹学会或类似的组织。我国的运筹学会成立于 1980 年。在 1959 年英、美、法三国的运筹学会发起成立了国际运筹学联合会（IFORSO），以后各国的运筹学会纷纷加入，我国于 1982 年加入该会。

新中国成立后的 50 年代，我国运筹学界在翻译 Operations Research 这一术语时，从《史记·高祖本纪》“夫运筹策帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房”一语中，摘取“运筹”二字作为这门科学的名称，既显示其军事的起源，也表明运筹学的哲理思想远在我国古代已经存在。于是，“运筹学”之名不胥而走，为学界普遍接受。

二、运筹学的性质和特征

作为一门定量优化决策科学，运筹学利用了现代数学、计算机科学以及其他科学的最新成果来研究人类从事各种活动中处理事务的数量化规律，使有限的人、财、物、时、空、信息等资源得到充分和合理的利用，以期获得尽可能满意的经济和社会效果。就其理论和应用意义来归纳，运筹学具有以下性质和特征：

1. 运筹学是一门以数学为工具，寻求各种问题最优方案的学科，所以

是一门优化科学。它是应用数学之一，可以说是一门内容相当广泛、实践性很强的应用数学。

2. 运筹学研究问题的特点是从系统的观点出发，研究全局性的规划问题及综合优化规律，它是系统工程学的主要理论基础。

3. 运筹学的应用具有多学科交叉的特点。如在实际应用中，要综合经济学、管理学、心理学、计算机科学、物理学、化学等学科的一些方法和知识，因此它又是一门边缘科学。

4. 运筹学强调的科学方法，其含义不单是某种研究方法的分散和偶然的应用，而是可用于整个一类问题上。

三、运筹学在解决实际问题中形成的工作步骤

运筹学在解决大量实际问题的过程中已形成自己的工作步骤：

1. 提出和形成问题。即要弄清问题的目标，可能的约束，问题的可控变量以及有关参数，搜集有关资料。

2. 建立模型。即把问题中可控变量、参数和目标及约束之间的关系用一定的模型表示出来。

3. 求解。用各种手段将模型求解，解可以是最优解、次优解、满意解。

4. 解的检验。检查求解步骤和程序有无错误，检查解是否反映现实问题。

5. 解的实施。

四、运筹学的主要内容及学习方法

学习运筹学应着重培养以下三方面的能力：善于运用所学知识，为各种实际问题建立数学模型；掌握各种模型的优化方法和解题技巧；正确理解和应用数学运算中各种参数的经济事理意义。

自第二次世界大战后，运筹学有了飞速的发展，形成了运筹学的许多分支，由于各行各业的特点不同，其运筹学的内容不尽相同。归纳起来，运筹学包含的主要内容见图 1。

本书在内容编写方面，考虑到经济管理专业、厂矿企业管理和工程技术人员的需要，注重运筹学原理和方法的应用，以及掌握处理和解决实际问题的能力。因此，本书在讲清原理和方法的基础上，通过大量应用举例，阐明经济事理意义。在内容叙述方面则力求通俗易懂，便于自学，而各章后附的习题，是对本章学习内容的巩固。

*

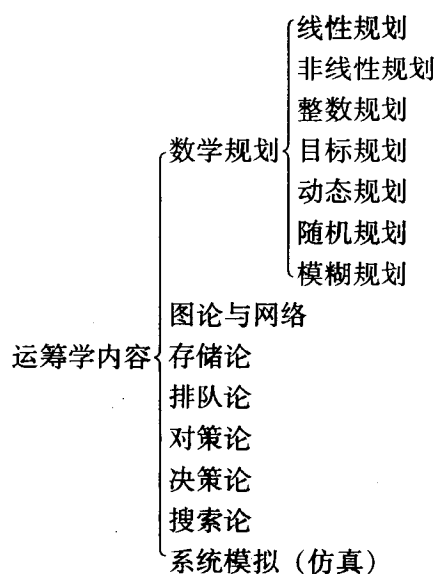


图 1 运筹学的内容

第一章 线性规划基础

线性规划 (Linear Programming) 是运筹学中数学规划的基础部分, 是运筹学中兴起较早的一个分支, 也是运筹学中应用最广泛的一个部分, 其计算方法也较成熟。

20 世纪 30 年代末, 苏联数学家康特罗维奇研究交通运输和机械加工等部门的生产品管理工作, 于 1939 年写了《生产组织与计划中的数学方法》一书初稿, 为线性规划建立数学模型及解法奠定了基础; 与此同时, 美国的库普曼研究了选择最优化运输方案的方法, 建立了“线性规划数学模型”, 并取得了重大进展。他们二人由于科学的创建, 后来成为诺贝尔经济学奖的获得者。到了 40 年代, 线性规划得到进一步应用和发展, 在工业、农业生产管理, 交通运输的指挥调度, 资源开发, 商业和银行等领域得到广泛应用, 对提高企业的经济效益有显著成效。随着生产规模的扩大和经济事务变得越来越繁杂, 对线性规划提出了更多的理论要求, 又促使这门学科迅速发展和完善。自 1947 年美国数学家丹捷格 (G. B. Dantzig) 提出了一般线性规划问题求解方法——单纯形法之后, 线性规划在理论上趋向成熟, 在实用中日益广泛与深入, 特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后, 线性规划的适用领域更为广泛了, 从解决技术问题的最优化设计, 到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用, 它已是现代管理科学的重要基础理论。

1. 线性规划问题及其数学模型

1.1 问题的提出

在生产管理和经营活动中经常提出一类问题, 即如何合理地利用有限的人、财、物等资源, 以便得到最好的经济效益。线性规划是利用数学为工具, 来研究在一定的人、财、物等资料条件下, 用最少的资源耗费, 取得最大的经济效益。

下面我们来讨论一个线性问题引例, 由此引出一个线性规划问题。

〔例 1-1〕 (线性规划问题引例) 某企业生产甲、乙两种产品, 要用 A、B、C 3 种不同的原料。

从工艺资料知道: 每生产 1 吨甲产品, 需耗用 3 种原料分别为 1, 1, 0 单位; 生产 1 吨乙产品, 需耗用 3 种原料分别为 1, 2, 1 单位。每天原料供应的能力分别为 6, 8, 3 单位。又知道每生产 1 吨甲产品, 企业利润收入为 300 元, 每生产 1 吨乙产品, 企业利润收入为 400 元。上述资料见表 1-1。

表 1-1

单位耗用 产 品	原 料			单位利润 (百元)
	A	B	C	
甲	1	1	0	3
乙	1	2	1	4
供应量	6	8	3	

问企业应如何安排生产计划, 使一天的总利润最大?

这样一个简单的生产计划安排问题, 就属于我们所讨论的线性规划范围。

为了准确地回答上述问题, 我们用数学语言来描述它, 这个过程称为建立其数学模型, 简称建模。建模过程如下:

①假设所求甲、乙产品每天生产的数量分别为 x_1 , x_2 , 称为决策变量, 简称变量。因为产量一般是一个非负数, 所以有 $x_1, x_2 \geq 0$, 称非负约束。

②假设该企业在生产 x_1, x_2 的甲、乙产品后所得总利润值为 Z , 显然 $Z = 3x_1 + 4x_2$ 。我们希望总利润值 Z 能达到最大, 这个关系可用下面的公式表达:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

③给出的规划问题往往讲明了一些限制条件。例如本例中讲到的 3 种原料每天的耗用量分别不能超过其每天的供应量 6, 8, 3, 这样就约束了产品的生产量 x_1, x_2 。生产 x_1, x_2 的甲、乙产品, 其原料约束如下:

耗用量 供应量

$$\text{A 原料:} \quad x_1 + x_2 \leq 6$$

$$\text{B 原料:} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$\text{C 原料:} \quad x_2 \leq 3$$

我们把上述所有数学公式归纳如下:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

(1-1) 式就是引例的线性规划模型。

1.2 线性规划模型一般形式

由 (1-1) 式可看出线性规划模型是由三部分组成的：

- ①一组决策变量；
- ②一个线性目标函数；
- ③一组线性约束方程。

上述三点又称为组成线性规划问题的三要素。

满足上述三要素的问题称为线性规划问题。

(1-1) 式中目标函数是求最大 (maximum)，而有些问题可能希望目标函数最小 (minimum)，例如若目标函数表示生产费用，则希望生产费用最小。无论最大还是最小，总之是希望目标函数达到最优 (optimum)。

(1-1) 式中约束条件的约束符号均为 “ $\leq$ ”，但实际问题中有许多约束条件的约束符号要求是 “ $\geq$ ” 或 “ $=$ ”。因此我们一般设有 n 个决策变量， m 个约束方程，则线性规划问题的一般表达形式如下：

$$\begin{aligned} \text{Opt } Z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n & \text{①} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq (\geq, =) b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq (\geq, =) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq (\geq, =) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{array} \right. & \text{②} \end{aligned} \quad (1-2)$$

在 (1-2) 式中，①称为目标函数，②称为约束条件， c_j 称为价值系数， b_i 称为右边常数， a_{ij} 称为约束方程系数，另外还有如下一些名词解释：

可行解：满足②的解。

可行解域：所有可行解的集合。

最优解：满足①的可行解。

1.3 线性规划问题的建模

建模是解决线性规划问题极为重要的环节。从实践的角度来讲，一个正

确的数模的建成，标志着问题的解决已接近完成，答案在计算机上由线性规划程序运行就会很快获得。一个正确数模的建立要求建模者熟悉规划问题的生产和管理内容，明确目标要求和错综复杂的约束条件，要通过大量的调查和统计资料获取原始可靠的数据。这些要求对建立一个较复杂的实际模型是要花费相当大的工作量的。对于初学者来说，怎样从问题的内容出发，分析和认识问题，善于从数学这个角度有条理地表述出来，是建模的基本要求。掌握建模过程是十分重要的技术。

线性规划适用解决的问题面很广，因此不可能有一个统一的建模标准，这就使建模成为一种带技巧性的工作。即使如此，建模过程还是有一定规律的，即通过对实际问题的分析、理解，要明确哪些是决策变量，目标要求是什么，有哪些资源限制条件，问题提供的数据是属于约束条件还是对应于目标要求，如何把变量、常数、约束条件、目标要求的相互关系联系起来列出相应的方程式。在列方程式过程中，要注意变量、系数、常数的计量单位。计量单位要首先统一于标准的常用单位，在这方面任何的混淆都会导致解题答案的严重错误。

本节通过几个例子来说明建模过程，同时介绍不同的类型问题，使我们对线性规划的应用领域和它的现实意义有进一步的认识。

1.3.1 资源合理利用问题

资源合理利用是企业编制生产计划时经常考虑的实际问题。其任务是企业（也可以是一个地区，甚至整个国家）如何规划和调配它的有限资源以达到生产的目的，并使企业获取最大的利润；或使资源、材料耗费最少，从而使生产成本为最小。现举简例说明。

〔例 1-2〕 某厂生产 A、B 两种产品，都需用煤、金属材料、电力等资源。已知制造 A 产品 1 吨需用煤 6 吨，金属材料 80 公斤，电力 50 千瓦；制造 B 产品 1 吨需用煤 8 吨，金属材料 50 公斤，电力 10 千瓦。现该厂仅有煤 540 吨，电力 2000 千瓦，金属材料 4 吨可供利用，其他资源可以充分供应。又如：A、B 产品能得到利润分别为 6000 元/吨和 5000 元/吨。问：在现有这些资源限制条件下，应生产多少吨 A 和 B 产品，使企业获得利润最大？

分析：

(1) 确定变量。问题要求回答的是 A、B 产品的生产量，设用 x_1 和 x_2 （单位是吨）分别表示 A、B 产品的生产量。

(2) 目标函数。企业是要求利润为最大，设 Z 表示企业利润，则有：

$$Z = 6x_1 + 5x_2 \quad (\text{千元})$$

(3) 约束条件。该问题有煤、金属材料和电力三种资源的限制，据此可

建立这三种资源的限制约束条件如下：

$$\begin{aligned} \text{煤:} & \quad 6x_1 + 8x_2 \leq 540 \text{ (吨)} \\ \text{金属材料:} & \quad 80x_1 + 50x_2 \leq 4000 \text{ (公斤)} \\ \text{电力:} & \quad 50x_1 + 10x_2 \leq 2000 \text{ (千瓦)} \end{aligned}$$

归纳上述三种情况，可得该问题线性规划数模如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t} \quad & \begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \leq 540 \\ 80x_1 + 50x_2 \leq 4000 \\ 50x_1 + 10x_2 \leq 2000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

资源合理利用问题的一般数模如下：

假设某个企业有 m 种资源，已知每种资源的数量为 b_i ($i = 1, 2, \dots, m$)。该企业能生产 n 种产品 (x_j 为第 j 种产生的产量， $j = 1, 2, \dots, n$)，已知生产每一种产品单位产量所消耗的各种资源数量，我们用 a_{ij} 表示第 j 种产品对第 i 种资源单耗。设各种产品的价格为已知，用 c_j 表示第 j 种产品的单价。在现有资源条件下如何规划生产，使得产值最大。其数模如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

1.3.2 合理下料问题的数模

合理下料是许多工业部门中经常遇到的问题。例如，机械加工时，常常在一定的条形金属原材料或板料上切割成若干段或块，加工成所需的毛坯。在一般情况下，材料不可能被完全利用，就有边角余料要处理，造成大材小用，优材劣用，甚至当成废物收集，搬运回炉。这样产品单耗高，成本也高。因此，如何最大限度地减少边角余料，提高原材料利用率，就是提高经济效益的规划问题。现举一例说明。

〔例 1-3〕 有一批长度为 180 公分的钢管，需截成 70、52 和 35 公分 3 种管料。它们的需求量应分别不少于 100、150 和 100 根。问应如何下料才能使钢管的消耗量为最少？

分析：我们知道，下料方案是在满足尺寸条件下可能的各种下料方式中去选择。因此，应首先求出材料的全部下料方式，据此将下料问题构成数学模型。

(1) 确定变量。设在 180 公分长的钢管上能够下出 u 个 70 公分管料， v

个 52 公分管料和 w 个 35 公分管料，则必须符合下述条件：

$$70u + 52v + 35w \leq 180 \text{ (公分)}$$

其中管料个数 u, v, w 只能是正整数。我们从最大尺寸管料下起，按照字典规则形式，根据上述约束条件，有如下下料方式：

	u	v	w	余料 < 35
①	2	0	1	5
②	1	2	0	6
③	1	1	1	23
④	1	0	3	5
⑤	0	3	0	24
⑥	0	2	2	6
⑦	0	1	3	23
⑧	0	0	5	5

因此，为使钢管耗用最少，就是在上述 8 种下料方式中如何选择，使其满足三种管料的根数，又使钢管耗用最少。为此，设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 分别表示上述 8 种下料方式切割钢管的根数。

(2) 目标函数：此问题的目标即可使钢管数耗用最少，又可使其切割后的余料最少。设 Z 表示钢管的耗用的根数， Z_1 表示切割后的余料数（公分）则有：

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \text{ (根)}$$

$$Z_1 = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8 \text{ (公分)}$$

(3) 约束条件。必须使各种下料方式提供的管料个数不少于需求量，即：

$$u \text{ 约束: } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 100 \text{ (个)}$$

$$v \text{ 约束: } 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 150 \text{ (个)}$$

$$w \text{ 约束: } x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geq 100 \text{ (个)}$$

归纳上述三种情况，该问题的线性规划数模如下：

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{或者 } \min Z_1 = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 & \geq 150 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 & \geq 100 \\ x_j \geq 0 \text{ 且为整数, } j=1, 2, \dots, 8 \end{cases}$$

合理下料问题的一般数学模型如下：