中学数理化读物

数学习题集

（代数部分）

北京出版社

中学数理化读物

数学习题集

（代数部分）

《数学习题集》编写组

北京出版社

中学数理化读物

数 学 习 题 集

（代数部分）

《数学习题集》编写组

•

北 京 出 版 社 出 版

北京市新华书店发行

北京印刷一厂印刷

•

787×1092 毫米　32开本　4.625印张　94,000字

1979 年 [illegible] 月 第 1 版　　1979 年 [illegible] 月 第 1 次印刷

书号：7071·546　　定价：0.33 元

编 辑 说 明

为了帮助广大青年和在校学生学习中学数理化基础知识，我们编辑了《中学数理化读物》。

这套读物包括供工农兵、青年和学生自学、复习的参考资料以及习题集等不同种类的数学、物理、化学等方面的书籍。

在编写时，注意从实际出发，参照了中学教学大纲，力求比较系统地叙述数理化的基础知识。我们希望通过这套读物，有助于广大青年进一步学好自然科学基础理论，为向工业、农业、科学和国防现代化进军打下一定的基础。

由于我们水平有限，又缺乏编辑这类读物的经验，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

目　录

一、实数和它的运算

例 1. 求$|a|$.（a是实数）

解：
$$|a|=\begin{cases} a & （如果 a>0）, \\ 0 & （如果 a=0）, \\ -a & （如果 a<0）. \end{cases}$$

例 2. 如果$-1\leqslant x<3$，$|x|>2$，$|x|\leqslant 5$，分别在数轴上表示出x的范围.

解：$-1\leqslant x<3$（图 1）.

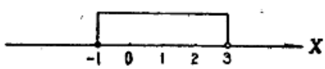

图 1

$|x|>2$（图2）.

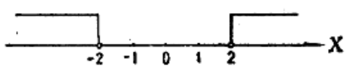

图 2

$|x|\leqslant 5$（图 3）.

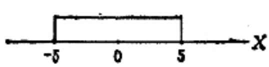

图 3

例 3. (1) 用圆规直尺，在数轴上作出表示$\sqrt{2}$的点.

解： 如图 4，以数轴上一个单位为直角边长作等腰直角三角形，则斜边的长为$\sqrt{2}$.

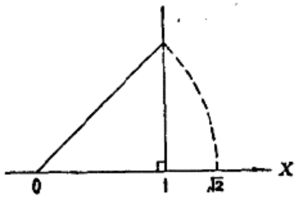

图 4

(2) 求证$\sqrt{2}$不是有理数.

证： 假设$\sqrt{2}$是有理数，那末一定有$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ $\left(\frac{m}{n}\text{是既约分数}\right)$，即$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$. 也就是

$$m^2=2n^2.$$

∴ m^2是偶数，m也一定是偶数*.

设 $m=2k$，则$(2k)^2=2n^2$，

即
$$n^2=2k^2.$$

∴ n 也是偶数，

∴ m 和 n 有公约数 2，这与假设相矛盾，

∴ $\sqrt{2}$不是有理数.

例 4. 计算$\left(-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{5}{12}\right)+(-7)\div1\frac{3}{4}$.

解： 原式$=\left(-\frac{1}{6}\right)\div\left(-\frac{5}{12}\right)+(-7)\div1\frac{3}{4}$

---

* 已知 m^2 是偶数，求证 m 一定是偶数.

证：假设 m 不是偶数，设 m 是奇数，即 $m=2n+1$. 则 $m^2=4n(n+1)+1$，m^2是奇数，这与已知条件相矛盾，所以，m 一定是偶数.

$$=\left(-\frac{1}{6}\right)\times\left(-\frac{12}{5}\right)+(-7)\times\frac{4}{7}$$

$$=\frac{2}{5}-4$$

$$=-3\frac{3}{5}.$$

例 5. 求(1) 25的平方根与$\sqrt{25}$的值；

(2) 8 与-8 的立方根；

(3) $\sqrt{-4}$.

解：(1) $\because$ $5^2=25$，$(-5)^2=25$，

$\therefore$ 25 的平方根是±5，

$\sqrt{25}=5$；

(2) $\because$ $2^3=8$，$\therefore$ 8 的立方根是 2，即$\sqrt[3]{8}=2$.

$\because$ $(-2)^3=-8$，$\therefore$ -8 的立方根是-2，即$\sqrt[3]{-8}=-2$；

(3) $\because$ 任何实数的平方都不是负数，

$\therefore$ $\sqrt{-4}$ 在实数范围内无意义.

例 6. 计算$(-3.7)^0+\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+(0.1)^{-2}-\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

解：原式$=1+\sqrt{\frac{25}{4}}+\frac{1}{(0.1)^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}}$

$$=1+\frac{5}{2}+100-\frac{4}{9}$$

$$=103\frac{1}{18}.$$

例 7. 证明任意两个奇数的平方差能够被 8 整除.

证：设 x 为任一个奇数，则另一个奇数可表示为 $x+2n$（n 为自然数），于是

$$(x+2n)^2-x^2=x^2+4nx+4n^2-x^2$$
$$=4n(x+n).$$

上式显然可被 4 整除. 又在 $n(x+n)$ 中，如果 n 为偶数，它又能被 2 整除；如果 n 为奇数，则 $x+n$ 就为偶数，它也能被 2 整除. 所以任意两个奇数的平方差能被 8 整除.

练 习 一

1. 将下列小数化成分数：

$$-0.83,\ 2.46,\ 0.075.$$

2. 将下列分数化成有限小数或无限循环小数：

$$\frac{13}{20},\ -4\frac{2}{3},\ 5\frac{5}{8},\ \frac{1}{7},\ -\frac{35}{12}.$$

3. 零是不是整数？零是不是正数？

   自然数中有没有最小的数？有没有最大的数？

4. 能被 2，3，4，5，9，11 整除的数，各有什么特征？

   以下各数能被上述哪些数整除？

$$57312,\ 459140,\ 4537665.$$

5. 将 48，693，120 分解质因数.

6. 用分解质因数法求 15，30，45 的最大公约数和最小公倍数.

7. 用不等式表示 x 的范围：

   (1) x 是正数，(2) x 是负数，(3) x 是非负数.

8．用数轴上的点表示下列各数：

$$-2.5，0，6.3，-\frac{17}{5}，\frac{2}{3}.$$

9．分别求$\frac{1}{3}$，1，-2，$-3\frac{1}{3}$的倒数、相反数和负倒数．

10．分别求$1+\left|\frac{2}{3}\right|$，$|0|$，$|-7|$的值．

11．$|a|=a$，对吗？

12．绝对值是5的数有几个？如果$|x|=5$，x等于几？

13．如果$|m|<4$，而且m是整数，求m的值．

14．如果$|x-2|<3$，求x．

15．在数轴上表示x的范围：

$$x\geqslant-2.5，x<1，-2.3<x\leqslant3.7.$$

16．将$|x|\geqslant1$和$|x|<7$写成不带绝对值符号的不等式，并分别用数轴表示x的范围．

17．设a是实数，比较a和$-a$的大小．

18．如果$a=-3$，$b=5$，求证$|ab|=|a|\times|b|$．

19．等式$|a+b|=|a|+|b|$在什么条件下成立？

20．比较下列每一组数的大小：

$$1\frac{5}{6}和1\frac{2}{3}，0和0.0001，0和-100，$$

$$|-2|和-30，-4和-5.$$

21．按以下几种情况，说明怎样比较实数的大小：
正数和正数，正数和零，正数和负数，零和负数，负数和负数．

22．比较以下各数的大小，并写成连续不等式：

$$0, -\frac{3}{5}, |-0.3|, \sqrt{3}, -\frac{2}{7}, \frac{2}{3}.$$

23. 什么是有理数？什么是无理数？下列各数中，哪些是有理数，哪些是无理数？

$$-\frac{11}{13}, \pi, \sqrt{9}, 3.14, \sin 17°, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lg 7.$$

24. 用圆规直尺在数轴上作出表示$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$的点.

25. 在正整数范围内可以进行哪些运算？

在整数范围内可以进行哪些运算？

在有理数范围内可以进行哪些运算？

在实数范围内可以进行哪些运算？

26. 以下各组内的算式之间，在运算上有什么区别？

2^3和3^2，$(-3)^2$和-3^2，$(2\times3)^2$和2×3^2.

27. 如果n是整数，求$(-1)^{2n}$，$(-1)^{2n+1}$，-1^n.

28. 改错：

$-2-3=1$，$10\div2\times5=10\div10=1$，$2\times(5+6)=2\times5+6$，$3(ab)=3a\times3b$.

29. 计算下列各题：

(1) $\left(-2\frac{1}{2}\right)-\left[-6.2+6.5-\left(-6\frac{1}{5}\right)\right]$，

(2) $2-\left(-3\frac{7}{10}\right)\div\left[\left(-\frac{3}{4}\right)+(-1.1)\right]$，

(3) $(-3.57)-\left\{2\frac{3}{7}-\left[\left(-3\frac{3}{14}\right)-3\frac{5}{14}\right]\right\}$，

(4) $(-81)\div2\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}\div(-16)$，

(5) $\frac{-1}{3}+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2\div\left(1-\frac{1}{2}\right)$，

(6) $(-1)^3-\left[(-2)^2-\left(1-0.5\times\frac{1}{3}\right)\right]\times\left[-2-(-2)^3\right]$，

(7) $-3^2-(-3)^2+(-5)^2\times\left(-\frac{4}{5}\right)-(0.3)^2\div|-0.9|$，

(8) $\left(-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{7}{12}\right)+(-9)\div1\frac{4}{5}$，

(9) $\left(\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}\right)\div\left\{1-\left[\frac{3}{4}+\left(-2\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$.

30. 将下列各数写成 $a\times10^n$ 的形式（$1\leqslant a<10$）：

光速是每秒 30 万公里，

空气的比重是 0.001293 克/厘米^3，

地球与太阳的距离是 150,000,000 公里.

31. 电子的质量 $m_e=9.1085\times10^{-28}$克，质子的质量 $m_p=1.672\times10^{-24}$克，质子的质量是电子质量的多少倍？

32. 列出$\sqrt{2}$的不足与过剩近似值表.（精确到 0.1，0.01，0.001）

33. 不查表，计算$\sqrt{2\frac{2}{3}}$.（精确到 0.01）

34. 正数的奇次方根有什么性质？

正数的偶次方根有什么性质？

负数的奇次方根有什么性质？

负数的偶次方根有什么性质？

35. 比较$-\sqrt{59.51}$和$-7\frac{5}{7}$的大小.

36.(1) 已知 $5.8^2=33.64$，求 580^2，0.58^2；

(2) 已知 $\sqrt{3.7}=1.924$，$\sqrt{37}=6.083$，

求 $\sqrt{370}$，$\sqrt{3700}$，$\sqrt{0.037}$，$\sqrt{0.37}$ 的值。

37. 化简 $\sqrt{(-2.74)^2}$，$\sqrt{m^2-2mn+n^2}$ $(m<n)$，

$\sqrt{(2a-b)^2}$ $(2a>b)$。

38. 计算下列各题：

(1) $16^{0.5}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$，

(2) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$，

(3) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}-\left(6\frac{1}{2}\right)^{0}-(-6)^2$

$\div\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-6^2$，

(4) $(0.027)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0.75}-3^{-1}+5.5^{\lg 1}$，

(5) $(-2)^3+(-3)^2-\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}-27^{\frac{2}{3}}-\left(-3\frac{1}{5}\right)^{0}$，

(6) $\dfrac{4^{-1}-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^2+(-2)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$。

39. 已知 a,b 是正数，且 $a^b=b^a$，

求证 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$。

40. 求证四个连续的正整数的乘积加 1 是一个平方数。

二、代　数　式

例 8. 计算$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$.

解： $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$

$=[(x+y)+z][(x+y)-z][(x-y)+z][(x-y)-z]$

$=[(x+y)^2-z^2][(x-y)^2-z^2]$

$=[(x^2+y^2-z^2)+2xy][(x^2+y^2-z^2)-2xy]$

$=(x^2+y^2-z^2)^2-(2xy)^2$

$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$.

例 9. 分解因式：

(1) $4a^2+4ab+b^2+16a+8b+15$；

(2) $a^7+a^4b^3-a^3b^4-b^7$.

注：关于整式的因式分解，如果没有特别声明，都要求把一个整式分解成为有理系数的质因式的积。

解： (1) $4a^2+4ab+b^2+16a+8b+15$

$=(2a+b)^2+8(2a+b)+15$

$=(2a+b+3)(2a+b+5)$；

(2) $a^7+a^4b^3-a^3b^4-b^7$

$=(a^7+a^4b^3)-(a^3b^4+b^7)$

$=a^4(a^3+b^3)-b^4(a^3+b^3)$

$=(a^3+b^3)(a^4-b^4)$

$=(a+b)^2(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)(a-b)$.

如果用另一方法把原式分组，也可以得到相同的结果.

例 10. 分解因式：(1) x^4-14x^2+25；

(2) $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

解：(1) $x^4-14x^2+25=x^4-10x^2+25-4x^2$

$$=(x^2-5)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)；$$

(2) $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

$$=(a^2+2ab+b^2)-(2ac+2bc)+c^2$$

$$=(a+b)^2-2c(a+b)+c^2$$

$$=(a+b-c)^2.$$

例 11. 计算 $(x^3+4x^2-7)\div(x-2)$.

解：

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+6x+12 \\
\hline
x-2 & x^3+4x^2 \qquad\quad -7 \\
 & x^3-2x^2 \\
\hline
 & \quad 6x^2 \\
 & \quad 6x^2-12x \\
\hline
 & \qquad\quad 12x-7 \\
 & \qquad\quad 12x-24 \\
\hline
 & \qquad\qquad 17
\end{array}$$

$\therefore$ $(x^3+4x^2-7)\div(x-2)=x^2+6x+12+\dfrac{17}{x-2}$.

例 12. 求证 $(a-b)^2(a+b)^2(a^2+b^2)^2=a^8-2a^4b^4+b^8$.

证：左边 $=[(a-b)(a+b)(a^2+b^2)]^2$

$=(a^4-b^4)^2$,

右边 $=(a^4-b^4)^2$,

$\therefore$ 恒等式成立.

注：要证明恒等式 $A=B$，通常用以下几种方法：

(i) 计算 A、B，如能得到同一结果 C，则恒等式成立；

(ii) 变换 A(或 B)，如能得出 B(或 A)，则恒等式成立；

(iii) 计算 $A-B$，若结果得 0，则恒等式成立；

(iv) 设 A、B 都是关于 x 的 n 次多项式，用 $n+1$ 个数分别代入 A 和 B，如果每次计算结果，A、B 的值相等，则恒等式必成立。

例 13. 计算 $\dfrac{1}{3x+3} \div \left(\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x^2+3}{2x^2-2}\right)$.

解：
$$\frac{1}{3x+3} \div \left(\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}\right)$$
$$=\frac{1}{3x+3} \div \left[\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{x^2+3}{2(x-1)(x+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{3x+3} \div \frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{1}{3x+3} \div \frac{2(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{1}{3(x+1)} \times \frac{x+1}{1}=\frac{1}{3}.$$

例 14. 求$\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$的值。(精确到0.01)

解：
$$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2+2(3\sqrt{2})(2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{30+12\sqrt{6}}{18-12}=5+2\sqrt{6}\approx 9.90.$$

例 15. 计算 $\dfrac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}}$.

解：
$$\frac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}}=-\frac{1}{3}a^{-2-1-(-4)}b^{-3+1-(-2)}$$

$$=-\frac{1}{3}a^1b^0=-\frac{1}{3}a.$$

例 16. (1) 已知 $\lg 2=0.3010$，求 $\lg\sqrt{5}$.

解：$\lg\sqrt{5}=\frac{1}{2}\lg 5=\frac{1}{2}\lg\frac{10}{2}=\frac{1}{2}(\lg 10-\lg 2)$

$=\frac{1}{2}(1-0.3010)=0.3495.$

(2) 求证 $\frac{\log_a x}{\log_{am} x}=1+\log_a m.$

证： 根据对数换底公式，

$$左边=\frac{\log_a x}{\frac{\log_a x}{\log_a am}}=\log_a am$$

$$=\log_a a+\log_a m=1+\log_a m=右边,$$

所以等式成立.

(3) 设 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，以 a，b 表示 $\log_{42} 56$.

解：$\log_{42}56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{\log_3 7+3\log_3 2}{\log_3 7+\log_3 3+\log_3 2}$

$$=\frac{b+\frac{3}{a}}{b+1+\frac{1}{a}}=\frac{ab+3}{ab+a+1}.$$

练 习 二

41. 化简下式并将结果按降幂排列：

(1) $m^4-5m^2+2m-5+3m^3-2m^2-5m+6m^4-2m^2+1$,