点击悟性火花　唤醒无穷智慧
同步现行教材　着眼素质能力

初二数学

课堂新思维

点击悟性……　希扬　主编

点

（修订版）

恍然大悟即彻头彻尾的理解……
有悟性的头脑远比聪明的脑袋更重要

悟

首都师范大学出版社

课堂新思维点悟

初二数学

修订版

主编　屠新民　陈　星

编者　陈　星　李世斌　项昭义　王满凤

刘富森　郭　红　张小林　王明建

石同生　刘　臻　李　为　杨志敏

车兔平　薛　凌

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

课堂新思维点悟·初二年级/希扬编.—北京:首都师范大学出版社,2001.7
ISBN 7－81064－268－5

Ⅰ.课… Ⅱ.希… Ⅲ.课程-初中-习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 26042 号

《课堂新思维点悟》编委会

丛书主编 希扬

丛书副主编 屠新民 张秋生

编委 卢浩然 张锐 孙红葆 蔡泽敏 杨冬莲

KETANGXINSIWEIDIANWU·CHUER SHUXUE

课堂新思维点悟·初二数学（修订版）

主编 希扬

首都师范大学出版社出版发行
北京市西三环北路 105 号
邮政编码 100037
电传 68907725(总编室)
68418514(发行部)
68903162(出版部)
E-mail cnup@mail.cnu.edu.cn
北京嘉实印刷有限公司印刷
全国新华书店经销
版次 2002年7月2版
印次 2002年7月2次印刷
开本 890×1240 1/32
字数 303千 印张 7.875
印数 94,001~99,000 册
定价 10.20 元
书号 ISBN 7-81064-268-5/G·167

点燃悟性火花 唤醒无穷智慧

——《课堂新思维点悟》

序　　言

新世纪，新奉献。这套《课堂新思维点悟》，是我们奉献给初一至高二中学生的一套与教学同步的素质教育丛书。

何谓“点悟”?认识论告诉我们，人们的认识是一个由已知到未知的发展过程。人的认识，只有沟通新旧知识之间的联系，引发知识的碰撞，才能产生新知。这个新旧知识之间的联系点，或引发知识碰撞的爆发点，就是认识的悟点，即悟性。我们通常所说的悟性，是指觉悟、领悟、领会和理解力。

在教学中运用点悟，就是沟通新旧知识之间的联系，使认识由此及彼、由表及里、由浅入深；就是强调学习中分析、判断、联系、发展的综合认识，培养综合运用能力；就是使知识升华，使思维与灵魂对话。点悟，可使学生“恍然大悟”、“豁然开朗”，达到大彻大悟的境界。这样就可收到举一反三、融会贯通、学以致用之效。“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”，学习方法万千条，只有悟出才是根本。

目前，我们提出的素质教育，对教学提出了更高的要求，如何通过课堂教学，培养和造就无数有慧心、有灵气、会学习、会沟通、能创新的人才，是亟待解决的重大课题。我们认为，把点悟引入课堂教学，是通过课堂教学实践素质教育的最佳途径。这是一种创新，是一个尝试。我们深信，它将取得意想不到的理想效果。

本书特点是：

一、栏目新、实用性强

它紧贴教材，栏目设计新颖实用。除一般的栏目外，根据各科特点分别设有“知识要点点悟”、“状元名题赏析”、“默读·联想·记忆”和“在悟中升华”等栏目。它信息新、信息量大，符合学生实际需要。

二、导学导练

它难度适中并有跨度，适合不同程度学生的需要；它讲解翔实透彻，又把学与练结合起来，把练与升学考试结合起来，用平时的练瞄准升学考试，又用升学考试指导平时的练习。

三、以点悟贯穿全书

它重在点击悟性、打开思路、启迪智慧、授之以法。让学生学会学习、学会思考、学会沟通、学会运用，实实在在地提高学生素质，培养他们的创新能力。

今日放飞希望，明日收获精彩。

我们放飞的是一个希望，希望此书能给中学生读者插上智慧的双翅，在知识的王国里翱翔，成为新世纪的有用之才。我们是探索者，难免有这样那样的缺点、错误，欢迎批评指正。我们希望在读者和有识之士的帮助下，来日共同回收精彩。

“点悟”将改变你的学习，你的学习将因此而精彩！

希扬

2002.6

前　言

2001 年全国在初中阶段普遍使用了《九年义务教育三年制初级中学教科书(数学)》新教材，为了帮助初中学生学好新教材，我们从指导学生掌握学习数学的方法，培养读者创新能力，独立解决数学问题的能力入手，编撰了这套与新教材同步的辅导用书。本丛书应用了全新的学习理念，在每节中设置了学习基本目标、考纲重点要求，知识要点点悟等栏目，分初、中、高三个层次介绍了知识点、考点和对考点的理解方法，每节还设置有中考模型题例、中考误区警示、状元名题赏析三个专栏，分类介绍中考所考题型的解题方法、技巧和解题思想方法，也点明了本节内容在中考中易出现错误的问题，以警示读者不再重蹈覆辙。同时，给出了本节的重点题型(即中考“热点”题型)，加以分析点评，指导读者成为中考“状元”。每节后还有“默读・联想・记忆”，画龙点睛地给出全节的总结，并给出“在悟中升华”训练题一套，使读者能通过练习达到巩固所学知识的目的。

由以上叙述不难看出，本丛书的内容与教材贴近，但稍高于教材，旨在指导读者明确所学知识的要点，掌握审题、解题、答题规范，总结所学知识，避免产生答题错误。使读者的学习能力有较大升华，成为学生中的“拔尖”人物。

本丛书每章前给出“教材导学”，点明了中考考点和全章的知识网络，使读者掌握全章知识的脉络。

更为重要的是作者在写作中，对大量例题进行了点评，从点拨学习、解题、深化、理解的角度，启迪读者的“悟性”，使读者的思维能力更上一层楼。

ketangxinsiweidianwu ketangxinsiweidianwu ketangxinsiweidianwu ketangxinsiweidianwu

本书的另一亮点是，在写作中将中考的“热点”题型，即数学建模、数学阅读题、探索性问题突出编写，形成本丛书的一个新的特点。

参加本丛书编写的还有：刘富森、康午生、王慧杰、王献甫、陈星、侯学奎、王新房、肖昭联、李丽琴、兰社云、柴红森、孟邻、张孝升、刘甲洋、周太红、于希顺、丁改凤、满新民、杜渝、司海举、李玉安、马书敖、薛玲香、刘歌、石同生、向荣、岳如山、晓谕、夏建国、刘依民、张秋生、何一治、梁雪映、赵言楠、老皮、宋田和、任冬生、李国标、王雪等。

我们此次推出《课堂新思维点悟》丛书，其主旨是帮您考上如愿的中华名校。

ketangxinsiweidianwu ketangxinsiweidianwu

目录

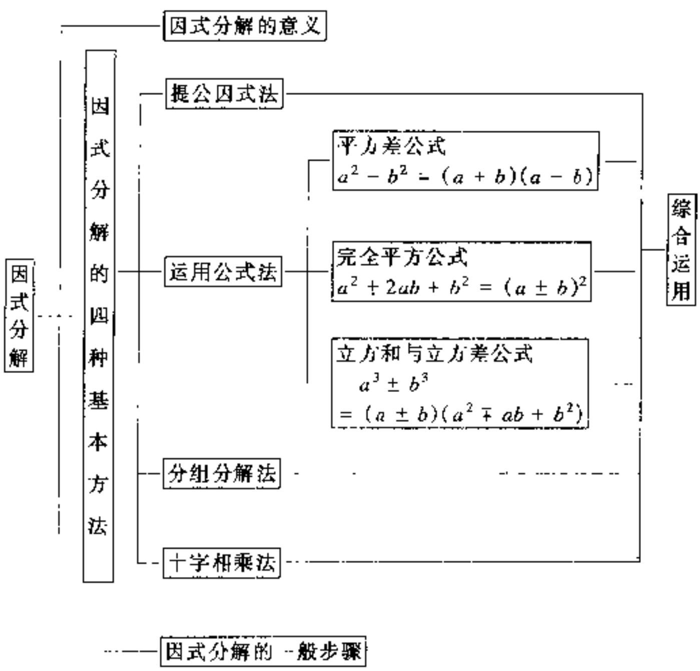
代数部分

几何部分

代数部分

第八章　因式分解

知识结构



内容导学

本章主要内容是因式分解的意义及因式分解的四种基本方法.

1. 因式分解是整式乘法的逆变形.

2. 因式分解的结果应满足的三个条件

(1)结果是积的形式;

(2)结果的每一个因式均为整式;

(3)在有理数范围内必须分解到底,即分解到每一个因式不能再分解为止.

3. 因式分解的三种方法

(1)提取公因式法.这是最基本最常用的方法.关键是如何想办法找出公因式.

(2)运用公式法.关键是要熟悉 n 个公式的结构特征,再根据原题的项数、次数,尽量使多项式化成相应的公式原型

(3)分组分解法.关键是把多项式各项适当地分组.什么叫"适当地分组"?——即分组后能提出公因式来.

4. 重点、难点

重点是因式分解的三种基本方法,难点是灵活运用三种基本方法分解因式

5. 中考知识点

灵活地利用以上三种基本方法进行因式分解是中考考查的重点.

8.1　提公因式法

【学习基本目标】

1. 了解因式分解的意义及要求;
2. 理解公因式的概念;
3. 灵活运用提公因式法分解因式.

【考纲重点要求】

本节内容是基本知识和基本方法,考纲中要求较灵活地掌握提公因式法,是中考考查的重点.

【知识要点点悟】

1. 因式分解的意义

(1)因式分解是整式乘法运算的逆过程.例如:

$$(m+n)(m-n) \underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{乘法运算}}{\rightleftharpoons}} m^2-n^2$$

(2)因式分解是一种恒等变形.

2. 因式分解的要求

(1)因式分解的最后结果,必须是几个整式的乘积.例如:

$l+mp+np=l+p(m+n)$,不是因式分解;

$y+3=\frac{1}{y}(y^2+3y)$,$(y\neq0)$不是因式分解.

(2)因式分解应该分解到每个因式在有理数范围内不能再分解为止.例如:分解因式:m^4-n^4.

解：$m^4-n^4=(m^2+n^2)(m^2-n^2)$ 没有分解到最简

$=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$ 分解到最简

3．提公因式法

(1)公因式：多项式中每一项都含有的因式，叫公因式．例如：

多项式 $6m^2n^2-2m^2np$，第一项、第二项都含有因式 $2m^2\cdot n$，我们就把 $2m^2\cdot n$ 叫做这个多项式的公因式．

(2)构成公因式的三要素：

系数——各项系数的最大公约数；

字母——各项都含有的相同字母；

指数——相同字母的最低次幂．

(3)提公因式法：在分解因式时，把多项式中各项含有的公因式提到括号外面，并把多项式写成因式乘积的形式．这种方法叫做提公因式法．例如：

$$15m^4n^2p-3m^2np=3m^2np(5m^2n-1)$$

【中考模型题例】

例 1 分解因式：$2x^3y+8x^2y^2+8xy^3$．

分析：仔细观察构成本题公因式的三要素：三项系数的最大公约数是 2；三项中都含有的相同字母是 x,y；三项中相同字母的指数最低次幂：x^1,y^1．便可迅速获得解答．

解：$2x^3y+8x^2y^2+8xy^3$

$=2xy(x^2+4xy+4y^2)$ 提公因式 $2xy$

$=2xy[x^2+2\cdot x\cdot(2y)+(2y)^2]$

$=2xy(x+2y)^2$． 公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 的应用

评注：(1)运用提公因式法时的两个步骤是：第一步：找出公因式；第二步：提取公因式．

(2)只要按照构成公因式三要素来分析思路，解答恰似行云流水，十分自然流畅．

例 2 分解因式：$-3m^3-6m^2+12m$．

分析：观察到第一项的系数是负数，我们先把“－”号提出来，便于继续分解因式．

解：$-3m^3-6m^2+12m$

$=-(3m^3+6m^2-12m)$ 注意先把负号提出来

$=-3m(m^2+2m-4)$ 提出负号后，括号中的各项都要改变符号

例 3 分解因式：$-6(x-y)^3+18(y-x)^2-24(y-x)^3$.

分析：观察题目结构特征：第一项系数是负数，且有因式$(x-y)$，第二、三项有因式$(y-x)$，这就启发我们只要把$(y-x)$前面添上负号，就变成$-(x-y)$，这样三项中均有公因式了.

解：$-6(x-y)^3+18(y-x)^2-24(y-x)^3$

$=-6(x-y)^3+18(x-y)^2+24(x-y)^3$ 　　公因式 $-6(x-y)^2$

$=-6(x-y)^2[(x-y)-3-4(x-y)]$

$=-6(x-y)^2(-3x+3y-3)$ 　　别忘再提 -3

$=18(x-y)^2(x-y+1)$. 　　不要少 1

评注：对于$(x-y)$与$(y-x)$的符号有下面的关系：

$$\begin{cases} x-y=-(y-x), \\ (x-y)^2=(y-x)^2, \\ (x-y)^3=-(y-x)^3. \end{cases}$$

能否类似推出 $(x-y)^n=?$

例 4 不解方程组 $\begin{cases} 2m-n=3, \\ 4m+3n=1. \end{cases}$

求：$5n(2m-n)^2-2(n-2m)^3$ 的值.

分析：把所求的式子利用因式分解法转化为关于$(2m-n)$与$(4m+3n)$的因式，再代入求解.

解：$5n(2m-n)^2-2(n-2m)^3$

$=5n(2m-n)^2+2(2m-n)^3$

$=(2m-n)^2\cdot[5n+2(2m-n)]$

$=(2m-n)^2\cdot(4m+3n)$. 　　$(2m-n)^2$ 是公因式

$\because \begin{cases} 2m-n=3, \\ 4m+3n=1, \end{cases}$ 　　代入已知求代数式值

$\therefore$ 原式 $=3^2\cdot 1=9$.

评注：在解题过程中，巧妙地运用了转化思想，用提公因式法分解因式作为桥梁，把题给方程组和所求多项式结合起来，体现了思维的广阔性.

例 5 解方程：

$$(12x+6)(23x-18)+6(1+2x)(13-23x)=0.$$

分析：方程左边的第一项有因式$(12x+6)=6(2x+1)$，第二项有因式$(1+2x)$. 所以我们应先提取公因式，再化简求解.

解：原方程依次变形为：

$6(2x+1)(23x-18)+6(2x+1)(13-23x)=0$,

$6(2x+1)[(23x-18)+(13-23x)]=0$,

$6(2x+1)\cdot(-5)=0$, 提公因式 $2x+1$ 后再化简

$2x+1=0$,

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{2}$.

【中考误区警示】

题目 分解因式：$x^3+3x^2-4x-12$.

分析：粗看本题，觉得四项中没有公因式可提，细察，把前两项看作一个整体：$x^2(x+3)$，再把后两项看作一个整体：$-4(x+3)$. 于是可提出公因式 $(x+3)$.

解：$x^3+3x^2-4x-12$ 注意整体原则

$=x^2(x+3)-4(x+3)$

$=(x+3)(x^2-4)$ (A) 运用公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$=(x+3)(x-2)(x+2)$. (B)

评注：有同学只做到步骤(A)，误认为已经分解到底了. 其实在有理数范围里应该分解到步骤(B).

【状元名题赏析】

题目 分解因式：$ax-ay+x^2-y^2$.

分析：仔细观察题目结构特点：前两项可提取公因式 a，后两项可用平方差公式. 于是可以再提公因式 $(x-y)$.

解：$ax-ay+x^2-y^2$

$=a(x-y)+(x+y)(x-y)$ 实际上是应用分组分解法，后面评述

$=(x-y)(a+x+y)$.

评注：(1)本题题目精巧，富于思考. 粗看，四项之间没有联系；细察，题目结构蕴涵着内在联系，给做题者留下思考空间.

(2)本题解法运用了整体思想：把 $ax-ay$ 看作整体，提出 a；把 x^2-y^2 看作整体，用公式分解因式，再把它们统一地看作整体. 本题结构佳妙，解法自然，是一道中招好题.

【默读·联想·记忆】

1. 熟练掌握提公因式法把多项式进行分解. 关键是要根据多项式的结构特点找出各项的公因式.

2. 如果多项式的第一项的系数是负的，要提出“-”号，使括号内的第一项的系数是正的，并注意多项式各项都要变号.

3. 注意提出公因式后，括号里的项数与原多项式的项数保持一致，不要丢了

某一项

【在悟中升华】

1. 下列由左边到右边的变形，哪些是因式分解？哪些不是？为什么？

(1) $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$；

(2) $x^2+x-4=(x-2)(x+3)+2$；

(3) $x^2-4x=x(x-4)$；

(4) $x^2-6x+9=(x-3)^2$；

(5) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$；

(6) $(x+2)(x+1)-6=(x+4)(x-1)$.

2. 分解因式

(7) 分解因式：$-2x(z-y)^3+4x^2(y-z)^2$.

(8) 分解因式：$(x-3)(x+2)(x^2-7)+(2+x)(3-x)\cdot(x+3)$.

3. 解答题：

(9) 不解方程组 $\begin{cases}2x-y=2,\\6x+5y=6.\end{cases}$

求：$8y(2x-y)^2-3(y-2x)^3$ 的值.

(10) 解方程 $(x-5)^2-(5-x)(7-x)=14$.

(11) 已知：$m=2$，$n=-\frac{1}{2}$，

求：$m^2+mn-8m-8n$ 的值.

8.2 运用公式法

【学习基本目标】

1. 在理解基础上记住五个因式分解公式；

2. 灵活运用公式法分解因式

【考纲重点要求】

本节内容是基本知识和基本方法，考纲要求较灵活地掌握运用公式法.是中考考查的重点.

【知识要点点悟】

1. 五个因式分解公式

平方差公式　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

完全平方公式　$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

立方和公式　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

立方差公式　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

2. 如何运用公式

公式中的字母 a、b 的意义是：(1)可以表示数；(2)可以表示单项式；(3)可以

表示多项式.所以运用公式时要具体情况具体分析,看一看在一个具体题目中 a、b 到底表示什么.例如:

$$36m^2-9n^2=(6m)^2-(3n)^2$$
$$=(6m+3n)(6m-3n).$$

即运用了平方差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.此时,$6m$ 相当于 a,$3n$ 相当于 b.

又如: $(m+n)^2-10(m+n)+25$

$$=(m+n)^2-2\cdot(m+n)\cdot5+5^2$$
$$=(m+n-5)^2.$$

即运用了完全平方公式 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.此时,$m+n$ 相当于 a,5 相当于 b.

3. 运用公式时的三个注意点

(1)一题在手,先观察分析题目结构特点,如果能直接运用公式时可直接运用公式分解因式.

(2)一题在手,如果不能直接运用公式时,可以想办法进行组合、变形,化成公式的原型形式再用公式.并注意,如果有公因式宜先提出公因式后再用公式.例如:

$$25m^3n-64mn^3$$
$$=mn[(5m)^2-(8n)^2]$$
$$=mn(5m+8n)(5m-8n).$$

(3)要注意多层连续运用公式.例如:

$$m^6-n^6=(m^3)^2-(n^3)^2$$
$$=(m^3+n^3)(m^3-n^3)$$

运用平方差公式

$$=(m+n)(m^2-mn+n^2)(m-n)(m^2+mn+n^2).$$

再运用立方和(差)公式

【中考模型题例】

例 1 分解因式:$16a^2-9b^2$.

分析:把 $16a^2$ 写成 $(4a)^2$,把 $9b^2$ 写成 $(3b)^2$,即可运用平方差公式.

解: $16a^2-9b^2$

$$=(4a)^2-(3b)^2$$

把多项式适当变形,联想公式即可获解

$$=(4a+3b)(4a-3b).$$

例 2 分解因式:x^2-y^2-2y-1.

分析:粗看本题,四项中不能提公因式,也不能直接运用公式,细察,后三项只要加上括号便得 $-(y^2+2y+1)$,恰可运用公式分解.

解： x^2-y^2-2y-1

$=x^2-(y^2+2y+1)$ 这步是关键

$=x^2-(y+1)^2$

$=(x+y+1)(x-y-1).$

例 3 分解因式：x^4-xy^3.

分析：解答本题的关键是先提出公因式 x，再运用立方差公式.

解： x^4-xy^3

$=x(x^3-y^3)$ 联想思维的体现

$=x(x-y)(x^2+xy+y^2).$

例 4 分解因式：$49(m-n)^2-9(m+n)^2$.

分析：本题要运用平方差公式，我们的着眼点要想办法把原题化为$(\quad)^2-(\quad)^2$的公式原型. 解题的关键

解： $49(m-n)^2-9(m+n)^2$

$=[7(m-n)]^2-[3(m+n)]^2$ 整体思想的体现宜掌握

$=[7(m-n)+3(m+n)][7(m-n)-3(m+n)]$

$=(10m-4n)(4m-10n).$

评注：请同学们展开想像的翅膀，自编类似例 4 的题目.

例 5 分解因式：

(1)$1-6x+9x^2$.

(2)$-m^2-4n^2+4mn$.

(3)$(m-n)^2-12(m-n)+36$.

(4)$(m^2+2m)^2+2(m^2+2m)+1$.

分析：上面 4 个多项式都不能直接套公式，我们可以根据题目结构特点，把每一个多项式整理成 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 公式原型的形式，再分析 a、b 分别相当于题中的哪些量，从而可顺利套入公式.

解：(1) $1-6x+9x^2$

$=1^2-2\times1\times3x+(3x)^2$

$=(1-3x)^2$.

(2) $-m^2-4n^2+4mn$

$=-(m^2-4mn+4n^2)$ 先提取负号

$=-[m^2-2\cdot m\cdot(2n)+(2n)^2]$ 完全平方式