HZ BOOKS
华章教育

2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书

线性代数

复习指导与典型例题分析

尤承业 编著

数学

机械工业出版社
China Machine Press

2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书

线性代数

复习指导与典型例题分析

尤承业　编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：复习指导与典型例题分析/尤承业编著. －北京：机械工业出版社，2002.4
(2003年全国研究生入学考试数学复习指导丛书)
ISBN 7-111-10172-3

Ⅰ.线… Ⅱ.尤… Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第020434号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码100037)
责任编辑：王 磊
北京忠信诚胶印厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002年4月第1版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·8.75印张

定 价：13.00元

出 版 前 言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共16本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓

思路,更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法,培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心,以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们,感谢他们付出的辛勤劳动。同时,欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002年3月

目录

基本概念 …… (1)
第一章　行列式 …… (6)
一、考试大纲要求 …… (6)
二、基本内容与重要结论 …… (6)
三、典型例题分析 …… (10)
四、练习题与参考答案 …… (20)
第二章　矩阵乘法和可逆矩阵 …… (24)
一、考试大纲要求 …… (24)
二、基本内容与重要结论 …… (24)
三、典型例题分析 …… (30)
四、练习题与参考答案 …… (42)
第三章　向量组的线性关系与秩 …… (47)
一、考试大纲要求 …… (47)
二、基本内容与重要结论 …… (47)
三、典型例题分析 …… (54)
四、练习题与参考答案 …… (67)
第四章　线性方程组 …… (72)
一、考试大纲要求 …… (72)
二、基本内容与重要结论 …… (72)
三、典型例题分析 …… (74)
四、练习题与参考答案 …… (91)
第五章　特征向量与特征值，对角化 …… (96)
一、考试大纲要求 …… (96)
二、基本内容与重要结论 …… (96)
三、典型例题分析 …… (99)
四、练习题与参考答案 …… (114)

第六章　二次型、正定 …………………………………………………… (119)
一、考试大纲要求 ……………………………………………………………… (119)
二、基本内容与重要结论 ……………………………………………………… (119)
三、典型例题分析 ……………………………………………………………… (122)
四、练习题与参考答案 ………………………………………………………… (130)

基 本 概 念

基础比较好的考生可不必看这部分内容，或者只用本部分的习题对自己进行一次测试.

(一) 矩阵

(1) 基本概念

矩阵是描写事物形态的数量形式的发展.

由 $m \times n$ 个数排列成的一个 m 行 n 列的表格，两边界以圆括号或方括号，就成为一个 $m \times n$ 型矩阵. 这些数称为它的元素，位于第 i 行第 j 列的数称为 (i, j) 位元素.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**，通常就记作 $\boldsymbol{O}$.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等(记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$)，是指它的行数相等，列数也相等(即它们的类型相同)，并且对应的元素都相等.

(2) 线性运算和转置

加(减)法：两个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以相加(减)，得到的和(差)仍是 $m \times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$，法则为对应元素相加(减).

数乘：一个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个数 c 可以相乘，乘积仍为 $m \times n$ 的矩阵，记作 $c\boldsymbol{A}$，法则为 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素乘 c.

这两种运算统称为线性运算，它们满足以下规律：

① 加法交换律：$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$.

② 加法结合律：$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$.

③ 加乘分配律：$c(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{B}, (c + d)\boldsymbol{A} = c\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A}$.

④ 数乘结合律：$c(d)\boldsymbol{A} = (cd)\boldsymbol{A}$.

⑤ $c\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \Leftrightarrow c = 0$ 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

转置：把一个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列互换，得到的 $n \times m$ 的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(或 $\boldsymbol{A}'$).

有以下规律：

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.

② $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

③ $(c\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = c(\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$.

(3) n 阶矩阵和几类特殊矩阵

行数和列数相等的矩阵称为方阵，行列数都为 n 的矩阵也常常叫做 **n 阶矩阵**.

n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$ 的相应的行列式记作 $|\boldsymbol{A}|$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

把 n 阶矩阵的从左上到右下的对角线称为它的主对角线，或简称对角线.（其上的元素行号和列号相等.）

下面列出几类常用的 n 阶矩阵，它们都是考试大纲中要求掌握的.

对角矩阵：主对角线外的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

单位矩阵：主对角线上的元素都为 1 的对角矩阵，记作 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{I}$).

数量矩阵：主对角线上的元素都等于一个常数 c 的对角矩阵，它就是 $c\boldsymbol{E}$.

上(下) 三角矩阵：主对角线下(上) 的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

对称矩阵：满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵. 也就是对任何 i,j，(i,j) 位的元素和(j,i) 位的元素总是相等的 n 阶矩阵.

反对称矩阵：满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵. 也就是对任何 i,j，(i,j) 位的元素和(j,i) 位的元素之和总等于 0 的 n 阶矩阵. 反对称矩阵对角线上的元素一定都是 0.

(4) 矩阵的初等变换和阶梯形矩阵

矩阵的**初等行变换**有以下三种：

① 交换两行的上下位置.

② 用一个非 0 的常数乘某一行的各元素.

③ 把某一行的倍数加到另一行上.

类似地，矩阵还有三种**初等列变换**，大家可以模仿着写出它们，这里省略了. 初等行变换与初等列变换统称**初等变换**.

阶梯形矩阵：一个矩阵称为阶梯形矩阵，如果满足：

① 如果它有零行，则都出现在下面.

② 每个非零行的第一个非 0 元素所在的列号自上而下严格单调递增.

每个矩阵都可以用初等行变换化为阶梯形矩阵. 这种运算是线性代数的各类计算题中频繁运用的基本运算，必须十分熟练.

(二) 向量

(1) 基本概念

向量是另一种描述事物形态的数量形式.

由 n 个数构成的有序数组称为一个 **n 维向量**，称这些数为它的**分量**.

书写中可用矩阵的形式来表示向量，例如分量依次是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的向量可表示成

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\text{ 或 }\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},$$

请注意，作为向量它们并没有区别，但是作为矩阵，它们不一样(左边是 $1\times n$ 矩阵，右边是 $n\times$

1 矩阵).

一个 $m \times n$ 的矩阵的每一行是一个 n 维向量,称为它的行向量;每一列是一个 m 维向量,称为它的列向量.常常用矩阵的列向量组来写出矩阵,例如当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 时(它们都是表示为列的形式!),记为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

矩阵的许多概念也可对向量规定,如向量的相等,零向量等等.这里从略.

(2) 线性运算和线性组合

向量也有加减法和数乘这两种线性运算,并且也有完全一样的运算规律,这里也不再复述了.

向量组的线性组合:设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组 n 维向量,$c_1,c_2,\cdots,c_s$ 是一组数,则称 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的(以 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 为系数的)**线性组合**.它也是 n 维向量.

(三) 线性方程组

(1) 基本概念

线性方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

其中未知数的个数 n 和方程的个数 m 不必相等.分别称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad 和 \quad (\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

为方程组的**系数矩阵**和**增广矩阵**.

如果 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$,则称为**齐次线性方程组**.把一个非齐次线性方程组的每个方程的常数项都换成 0,所得到的齐次线性方程组称为原方程组的**导出齐次线性方程组**,简称**导出组**.

线性方程组的解是一个 n 维向量 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$,它满足:当每个方程中的未知数 x_i 都用 k_i 替代时都成为等式.

线性方程组的解的情况有三种:无解,惟一解,无穷多解.

n 维零向量总是齐次线性方程组的解,因此齐次线性方程组的解的情况只有两种:惟一解(即只要零解)和无穷多解(即有非零解).

(2) 同解变换与矩阵消元法

线性方程组的同解变换有三种:

① 交换两个方程的上下位置.

② 用一个非 0 的常数乘某个方程.

③ 把某方程的倍数加到另一方程上.

以上变换反映在增广矩阵上就是三种初等行变换.

线性方程组的基本求解方法是消元法，用增广矩阵或系数矩阵来进行，称为**矩阵消元法**：写出方程组的增广矩阵（对齐次方程组用系数矩阵），用初等行变换把它化为阶梯形矩阵，再写出所代表的阶梯形方程组，用它求解.

（四）习题

1. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\3 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\-2 & 1 & 5\end{bmatrix},$$

求(1) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(2) $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & x\\y & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}s-1 & 4\\-2 & t+1\end{bmatrix},$$

已知 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=0$，求 x,y,s,t 的值.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足等式 $\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{X}$.

4. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}=(2,-1,0,1),\quad \boldsymbol{\beta}=(-1,4,2,3),\quad \boldsymbol{\gamma}=(1,0,1,0),$$

求 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{2}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$.

5. 已知 $(2,0,a)$ 是线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2+\lambda x_3=4,\\3x_1+2x_2-5x_3=11,\\2x_1+x_2+x_3=\mu\end{cases}$$

的解，求 a,λ,μ.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则（　　）成立.

(A) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不对称，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也不对称；

(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是对称矩阵；

(C) 如果 $\boldsymbol{A}$ 对称，$\boldsymbol{B}$ 不对称，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不对称；

(D) 如果 $\boldsymbol{A}$ 对称，$\boldsymbol{B}$ 不对称，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可能对称，也可能不对称.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵,则(　　)正确.
(A) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵;
(B) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵;
(C) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$;
(D) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.
8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵,则(　　)正确.
(A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是对角矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 都是对角矩阵;
(B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是三角矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是三角矩阵;
(C) 如果 $c\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 也是数量矩阵;
(D) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不是对角矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也不是对角矩阵.
9. 下列断言中正确的是(　　).
(A) 两个阶梯形的 $m\times n$ 矩阵之和也是阶梯形矩阵;
(B) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的最下面的行向量是零向量;
(C) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶的阶梯形矩阵,记 a_{ii} 是它的主对角线上的第 i 个元素,则当 $a_{ii}=0$ 时,$\forall j>i, a_{jj}=0$;
(D) 阶梯形矩阵的等于0的元素个数多于不等于0的元素的个数.
10. 用初等行变换化下列矩阵的阶梯形矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}2&-1&0&1&1\\1&1&1&0&2\\2&5&4&-2&9\\3&3&3&-1&8\end{bmatrix}$;　　(2) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&1&6\\3&a&1&7\end{bmatrix}$.

(五) 习题参考答案

1. (1) $\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&1\end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix}5&-3&-7\\9&-2&-17\end{pmatrix}$.
2. $x=-2,\ y=1,\ s=-5,\ t=-5$.
3. $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$.
4. $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{2}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{\beta}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{2},3,5\right)$;　　$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}=(-1,7,3,7)$.
5. $a=-1,\ \lambda=-2,\ \mu=3$.
6. (C).
7. (A).
8. (A).
9. (C).
10. 答案很多,这里省略.

第一章　行　列　式

一、考试大纲要求

(一) 考试内容

行列式的概念和基本性质、行列式按行(列)展开定理

(二) 考试要求

1.了解 n 阶行列式的概念,掌握行列式的性质.

2.会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

二、基本内容与重要结论

1.1　形式和意义

形式：用 n^2 个数排列成的一个 n 行 n 列的表格,两边界以竖线,就成为一个 **n 阶行列式**.

如果行列式的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,则此行列式可表示为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|$.

意义：是一个算式,把 n^2 个元素按照一定的法则进行运算,得到的数值称为这个行列式的**值**.

注意行列式和矩阵在形式和意义上的区别.当两个行列式的值相等时,就可以在它们之间写等号!(不必形式一样,甚至阶数可不同.)

1.2　定义(完全展开式)

2 阶和 3 阶行列式的计算公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

一般地,一个 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值是许多项的代数和,每一项都是取自不同行,不同列的 n 个元素的乘积,其一般形式为:

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里把相乘的 n 个元素按照行标的大小顺序排列,它们的列标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 构成 $1, 2, \cdots, n$ 的一个全排列(称为一个 n 元排列),一共有 $n!$ 个 n 元排列,因此共有 $n!$ 个项.

所谓代数和是在求总和时每项先要乘 $+1$ 或 -1. 规定 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 为全排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数(即小数排列在大数后面的现象出现的个数,例如 6 元排列 231645 有 4 个逆序:21,31,64,65,因此 $\tau(231645) = 4$),则所乘的是 $(-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)}$. 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1, j_2, \cdots, j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和. 称上式为 n 阶行列式的**完全展开式**.

1.3　性　　质

行列式有以下性质:

① 把行列式转置则值不变.

② 某一行(列)的公因子可提出.

③ 对一行或一列可分解,即如果某个行(列)向量 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$,则原行列式等于两个行列式之和,这两个行列式分别是把原行列式的该行(列)向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 换为 $\boldsymbol{\beta}$ 或 $\boldsymbol{\gamma}$ 所得到的行列式.

④ 把两个行(列)向量交换,行列式的值变号.

⑤ 如果一个行(列)向量是另一个行(列)向量的倍数,则行列式的值为 0.

⑥ 如果把一个行(列)向量的倍数加到另一个行(列)向量上,则行列式的值不变.

把 n 阶行列式的第i行和第j列划去后所得到的$n-1$阶行列式称为(i,j)位元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij}.称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为a_{ij}的**代数余子式**.

⑦ 行列式可对某一行(列)展开,即行列式的值等于该行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和,即

$$\begin{aligned}\text{行列式的值}&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}(\text{对 } i \text{ 列的展开式})\\&=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}(\text{对 } j \text{ 列的展开式}).\end{aligned}$$

⑧ 某一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和 $=0$.

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{kj}=0\quad(i\neq k\text{ 时}),$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{il}=0\quad(j\neq l\text{ 时}).$$

⑨ 如果 $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$ 都是方阵(不必同阶),则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&*\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ *&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$$

范德蒙行列式:形如

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-i}&a_2^{n-i}&a_3^{n-i}&\cdots&a_n^{n-i}\end{vmatrix}$$

的行列式(或其转置).它由 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 所决定,它的值等于

$$\prod_{i<j}(a_j-a_i).$$

因此范德蒙行列式不等于 $0\Leftrightarrow a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 两两不同.

1.4 计　　算

行列式的核心问题是值的计算.

(1) 用完全展开式求行列式的值一般来说工作量很大.只有在大量元素为 0,使得只有少

数项不为 0 时,才可能用它作行列式的计算.例如对角行列式,上(下)三角行列式的值就等于主对角线上的元素的乘积,因为其他项都为 0.

(2) **化零降阶法**:取定一行(列),先用性质 ⑥ 把这行(列)的元素消到只有一个或很少几个不为 0,再用 ⑦,对这行(列)展开.例如设 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-2&x&3&1\\2&2&x&4\\3&3&4&x\end{vmatrix},$$

选第 1 行进行化零,把第 2,3,4 列各减去第一列,再对第 1 行展开:

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-2&x+2&5&3\\2&0&x-2&2\\3&0&1&x-3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}x+2&5&3\\0&x-2&2\\0&1&x-3\end{vmatrix}\\&=(x+2)\begin{vmatrix}x-2&2\\1&x-3\end{vmatrix}\quad(\text{对第 1 列展开})\\&=(x+2)[(x-2)(x-3)-2]\\&=(x+2)(x-1)(x-4).\end{aligned}$$

(3) 利用性质简化计算,主要应用于元素有规律的行列式,包括 n 阶行列式(见例题).

1.5 克莱姆法则

克莱姆法则 当线性方程组的方程个数等于未知数个数 n(即系数矩阵为 n 阶矩阵)时,如果它的系数行列式不等于 0,则方程组有惟一解,这个解为$(D_1/D, D_2/D, \cdots, D_n/D)$,这里 D 是系数行列式的值,D_i 是把系数行列式的第 i 个列向量换成常数列向量所得到的行列式的值.

两点说明:

① 按法则给的形式来求解计算量太大,没有实用价值.因此法则的主要意义在理论上.(实际求解方法:对增广矩阵$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$作初等行变换,使得 $\boldsymbol{A}$ 变为单位矩阵,此时 $\boldsymbol{\beta}$ 变为解.)

② 法则的改进,事实上系数行列式不等于 0 是惟一解的充分必要条件.

三、典型例题分析

行列式是线性代数学中的一个常用的重要工具.虽然直接作为考题的情况不多见,但常常在其他考题中用到数字型行列式值的计算,化零降阶法是最常用的方法.常见的情形是判别行列式的值是否为0.更多的情形是元素中出现参数,判断参数在满足什么条件时行列式的值为0.含一个参数 x 的行列式是 x 的一个多项式,上述问题就是多项式求根的问题,如特征值的计算就是这类问题.

行列式的直接考题常常是元素有规律的行列式(有限阶的或 n 阶的).下面的例2 ~ 13 是这方面的题.有的行列式题还会涉及到别的概念,见例9的解法二和例15.

例1 计算行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 本题可用对行(列)展开的性质做,也可用列交换化为上三角行列式.但最简单的方法是用定义(完全展开式)做.

由于此行列式副对角线下方的元素全是0,不难看出,除了副对角线上元素的乘积这一项外,其他项都是0,于是

$$\boldsymbol{D}=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例2 计算5阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 各行上都是1到5这5个数.把各列都加到第1列上,第1列各元素都成15,提出公因子: