电磁场与电磁波解题指南

DianCiChang Yu DianCiBo JieTi ZhiNan

余恒清 编著

国防工业出版社

电磁场与电磁波
解题指南

余恒清　编著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波解题指南/余恒清编著.—北京:国防工业出版社,2001.11

ISBN 7-118-02633-6

Ⅰ.电... Ⅱ.余... Ⅲ.①电磁场-高等学校-解题②电磁波-高等学校-解题 Ⅳ.O441.4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 051845 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

三河市腾飞胶印厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 20 464 千字

2001 年 11 月第 1 版 2001 年 11 月北京第 1 次印刷

印数:1—5000 册 定价:28.00 元

序

《电磁场与电磁波》或《电磁场理论》，是高等学校工科电类专业的技术基础课，地位很重要。但因课程本身的特点，同学们学起来有一定的困难，特别是应用电磁基本理论解决实际问题，往往无从下手。所以，都希望有一本好的教学参考书，帮助同学们克服困难，提高学习质量和学习效率。《电磁场与电磁波解题指南》一书，正好可以解决这一问题，以满足同学们的迫切需要。

该书作者余恒清同志是我结识多年的学生和同事，长期以来一直担任电磁场类课程的教学。他的勤奋好学，对教学工作的认真负责，对学生的耐心细致和热忱，给我留下了深刻的印象。已出版的著作有《电磁场教学指导书》、《电磁场理论解题指导》、《电磁场理论解题指南》。校内讲义有:《电磁场与微波技术习题解》、《电磁场理论题解》、《电磁场与电磁波题解》等。还发表有数篇教学研究、教学改革的学术论文。曾获得四川省教学成果一等奖、电子科技大学教学质量优秀主讲教师称号等多项奖励。

该书内容十分丰富，层次分明，分章合理，选题有一定广度和深度，能照顾到国内多数学校电磁场教学的实际情况，能很好地满足他们的需要。各章的"基本内容与公式"，简明扼要，抓住要点(重点、难点)，把握基本概念和电磁基本规律，对学生的课后复习很有帮助。该书的"习题与解答"，深入浅出，解题思路清晰，分析正确，方法多种，语言精炼，推导严谨，技巧纯熟。本书可以很好地帮助学生正确处理审题、入题、分析、推导、计算、验证、讨论等解题的各个环节，提高解决实际问题的能力。

总之，相信广大读者会从这本书中获益匪浅，得到实惠。

电子科技大学　谢处方

2001 年 5 月

前　　言

本书是高等学校工科电类各专业电磁场与电磁波、电磁场理论等课程的辅助教材，也可作为理科院校电动力学课程的教学参考书。本书以大学本科生为主要对象，对有志报考研究生的读者、对从事电磁场与电磁波这方面工作的教师、科技工程人员，也具有相当的参考价值。

电磁场课程由于理论性强、概念抽象、所需的数学知识较多，给学生学习带来很大困难，特别是做习题，往往难于下手。针对这一问题，编写了这本解题指南，将作者长期从事电磁场教学的实践经验和大量解题的熟练技巧总结出来，融注此书，以飨读者，满足同学们的需要。

本书按大多数电磁场课程教材的体系分章，对各章的基本内容与公式作了简明扼要的概述和总结，便于同学们对基本概念和基本定律的理解与复习掌握。全书共选习题398道，这些题目，一部分来自教学实践，一部分选自国内外优秀教材，具有代表性和一定的广度、深度。本书通过这些题目的解题示例，帮助学生更好地理解电磁场的基本内容，掌握解题方法与技巧，提高分析问题、解决问题的能力，培养创新思维。

全书共分八章，内容包括：矢量分析，静电场，恒定电流与恒定磁场，静态场边值问题的解法，时变电磁场，平面电磁波，导行电磁波，电磁波的辐射、散射和衍射。

本书在编写过程中，得到了电子科技大学博士导师谢处方教授和全泽松教授的关怀与指导，得到饶克谨、赵家升、袁敬闳教授、黄尚锐副教授的支持与帮助，得到作者所在单位院系领导和电磁场教研室同仁的关怀与支持。成稿之后，又请赵家升教授对本书进行了审阅。电子科技大学教务处教材科、国防工业出版社为本书的出版给予了有力的支持，责任编辑王华女士为之付出了辛勤的劳动。在此作者一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，错误和不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

作　者

2001年5月于电子科技大学

内 容 简 介

本书选编了 398 道 题，并全部作了详细的解答，各章还给出了基本内容与公式。本书包括：矢量分析，静电场，恒定电流与恒定磁场，静态场边值问题的解法、时变电磁场，平面电磁波，导行电磁波，电磁波的辐射、散射和衍射等八章。

作者将长期从事电磁场教学的实践经验和解题技巧融注此书，以飨读者。本书是大学本科生学习《电磁场与电磁波》、《电磁场理论》、《电动力学》等课程的辅助教材，也可供报考硕士研究生的读者、教师以及科技人员参考。

目　录

第一章　矢量分析

一、基本内容与公式

1. 矢量的乘积

两个矢量相乘，可分为两种不同类型的乘积：标量积（点乘）和矢量积（叉乘）。

标量积定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}$$

结果为一标量。当 $\theta_{AB}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，反之亦然。

矢量积定义为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_n|AB\sin\theta_{AB}|$$

结果为一矢量。其大小等于由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 构成的平行四边形的面积，其方向 $\boldsymbol{a}_n$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 决定的平面，由右手螺旋确定。当 $\theta_{AB}=0$，即 $\boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$，反之亦然。

三个矢量相乘，可分为标量三重积和矢量三重积。

标量三重积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

结果为一标量，大小等于由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成的平行六面体的体积。它有如下循环互换规律：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

矢量三重积

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

结果为一矢量，可展为下述两矢量之差：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

2. 正交坐标系

如果在空间的任一点上，三个相交的坐标曲面相互正交（即各曲面在交点上的法线相互垂直），这样的坐标系称为正交坐标系。最常用的正交坐标系有下面三种。

(1)直角坐标系：坐标变量为 x,y,z，点 $P(x,y,z)$是 x,y,z 三坐标平面的交点，其位置矢量$\overline{OP}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$，单位矢量为 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$、$\boldsymbol{a}_z$，符合右手螺旋法则。

微分线元：$\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z$

微分面元：$\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}S_x+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}S_y+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S_y$，　$\mathrm{d}S_x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，　$\mathrm{d}S_y=\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，　$\mathrm{d}S_z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

微分体积元：$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(2)圆柱坐标系：坐标变量为 r,φ,z，点 $P(r,\varphi,z)$是以下三坐标面的交点：以 r 为半径的圆柱面，包含 z 轴与 xz 平面成 φ 角$(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$的半平面、$z$ 平面。其位置矢量$\overline{OP}=\boldsymbol{R}=$

$\boldsymbol{a}_r r+\boldsymbol{a}_z z$，单位矢量为 $\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_\varphi$、$\boldsymbol{a}_z$，三者右手螺旋。

微分线元：$\mathbf{d}\boldsymbol{l}=\mathbf{d}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{a}_\varphi r\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z$

微分面元：$\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}S_r+\boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}S_\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S_z$，　$\mathrm{d}S_r=r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$，　$\mathrm{d}S_\varphi=\mathrm{d}r\mathrm{d}z$，　$\mathrm{d}S_z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$。

微分体积元：$\mathrm{d}\tau=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$

圆柱坐标与直角坐标间的坐标关系，可由二维极坐标求得：

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

(3)球坐标系：坐标变量为 r、θ、φ，点 $P(r,\theta,\varphi)$ 是以下三坐标面的交点：球心在原点，半径为 r 的球面、顶点在原点，以 z 轴为轴线，半顶角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的正圆锥面、过 z 轴且与 xz 平面成 φ 角 $(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$ 的半平面。其位置矢量 $\overline{OP}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_r r$，单位矢量为 $\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_\theta$、$\boldsymbol{a}_\varphi$，符合右手螺旋法则。

微分线元：$\mathbf{d}\boldsymbol{l}=\mathbf{d}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{a}_\theta r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{a}_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$

微分面元：$\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}S_r+\boldsymbol{a}_\theta\mathrm{d}S_\theta+\boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}S_\varphi$，

$\mathrm{d}S_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，　$\mathrm{d}S_\theta=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$，　$\mathrm{d}S_\varphi=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

微分体积元：$\mathrm{d}\tau=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

球坐标（其 r 用 R 表示）与圆柱坐标的坐标关系可由 $\varphi=0$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$ 平面求得：

$$\begin{cases} r = R\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} R = \sqrt{r^2+z^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{r}{z} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

通过圆柱坐标与直角坐标的坐标关系，可得球坐标与直角坐标间的坐标关系：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

3. 矢量的散度

为考察矢量场在空间的分布和变化规律，引入矢量线、通量和散度的概念。

矢量线满足 $\boldsymbol{A}\times\mathbf{d}\boldsymbol{l}=0$，其微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{Ax}=\frac{\mathrm{d}y}{Ay}=\frac{\mathrm{d}z}{Az}$$

矢量场的通量　　$\psi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$

定义矢量场的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta\tau}$$

引入▽算符，可得直角坐标、圆柱坐标、球坐标的散度表达式：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

由散度的定义可知，散度就是通量密度，由此可导出场论中的重要定理——散度定理：

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}\tau = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

4. 矢量场的旋度

一个具有通量源的矢量场，可以采用通量与散度来描述场与源的关系，而对于具有另一种源——旋涡源的场，就必须引入环量和旋度的概念。旋度也是矢量场在空间的另一变化规律。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的环量为 $$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_c A\cos\theta \mathrm{d}l$$

过 M 点作面元 ΔS_u，方向为 $\boldsymbol{a}_u$，其环量强度定义为

$$\lim_{\Delta S_u \to 0} \frac{\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S_u}$$

显然过 M 点，可作不同方向的面元，得不同大小的环量旋度，定义旋度为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S \to 0}\left[\boldsymbol{a}_n \frac{\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}\right]_{\max}$$

可见旋度为一矢量，大小为最大的环量强度，方向为最大环量强度时面元 ΔS 的方向 $\boldsymbol{a}_n$。

引入▽算符，在直角坐标、圆柱坐标、球坐标中旋度表达式为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{a}_r}{r} & \boldsymbol{a}_\varphi & \frac{\boldsymbol{a}_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{a}_r}{r^2\sin\theta} & \frac{\boldsymbol{a}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\boldsymbol{a}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

由旋度的定义可以证明，对于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 所在空间，任意一个以 C 为周界的曲面 S，存在如下关系：

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

这就是场论中又一重要定理——斯托克斯定理。

5. 标量场的梯度

为了考察标量场在空间的分布和变化规律，引入等值面、方向导数和梯度的概念。

标量场中，函数 u 的等值面方程为

$$u(x,y,z) = \text{const}$$

对于二维标量场，等值线方程为

$$u(x,y) = \text{const}$$

标量函数 u 由定点 M_0 沿 Δl方向，对距离的变化率定义为方向导数：

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$$

显然，过 M_0 点沿不同方向有不同大小的方向导数，则定义标量函数最大空间增长率的大小和方向的矢量，就是该标量场的梯度。记为

$$\text{grad } u = \boldsymbol{a}_n \left(\frac{\partial u}{\partial l_n}\right)_{\max}$$

引入∇算符，在直角坐标、圆柱坐标、球坐标中梯度表达式为

$$\nabla u = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla u = \boldsymbol{a}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla u = \boldsymbol{a}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

6. 两个零恒等式

在电磁理论中，特别是引入辅助位时，有关∇算符的重复运算的两个零恒等式是相当重要的。

零恒等式 Ⅰ　　$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$

任何标量场的梯度的旋度恒等于零。其逆定理也成立，即如果一个矢量场的旋度为零，则该矢量可以表示为一个标量场的梯度。如静电场中$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，可引入 Φ，令 $\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi$。

零恒等式 Ⅱ　　$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \equiv 0$

任何矢量场的旋度的散度恒等于零。其逆定理为：如果一个矢量的散度为零，则它可表示为另一个矢量的旋度。如恒定磁场，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，可引入 $\boldsymbol{A}$，令 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$。

7. 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理表述为：在空间有限区域 τ 内，任何一个矢量场 $\boldsymbol{F}$，由它的散度、旋度和边界条件(即限定体积 τ 的闭合面 S 上的矢量场分布)唯一地确定。

该定理可从下述两个方面去理解：一个是散度及旋度给出了矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的各分量沿空间所有坐标的变化率；另一个是散度和旋度给定了矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的通量源和旋涡源的分布。

加上边界条件，场分布自然唯一确定。

该定理的意义非常重要，它是研究电磁场理论的一条主线。

二、习题与解答

1.1　试证明两个矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x3+\boldsymbol{a}_y\dfrac{1}{3}-\boldsymbol{a}_z2$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y6+\boldsymbol{a}_z5$ 是互相垂直的。

证：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_x3+\boldsymbol{a}_y\frac{1}{3}-\boldsymbol{a}_z2)\cdot(\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y6+\boldsymbol{a}_z5)=12-2-10=0$$

由 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}=0$ 可知 $\theta_{AB}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$。　　证毕

1.2　试证明两个矢量　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x4+\boldsymbol{a}_y10+\boldsymbol{a}_z6$ 和　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x8+\boldsymbol{a}_y20+\boldsymbol{a}_z12$ 是相互平行的。

证：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 4 & 10 & 6\\ 8 & 20 & 12\end{vmatrix}=$$

$$\boldsymbol{a}_x(10\times12-6\times20)+\boldsymbol{a}_y(6\times8-12\times4)+$$

$$\boldsymbol{a}_z(4\times20-8\times10)=0$$

由 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_n|AB\sin\theta_{AB}|=0$ 可知，$\theta_{AB}=0$，即　$\boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}$。　　证毕

1.3　试证明下列三个矢量

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x11+\boldsymbol{a}_y9+\boldsymbol{a}_z18$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x17+\boldsymbol{a}_y9+\boldsymbol{a}_z27$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y6+\boldsymbol{a}_z5$$

在同一平面上。

证：

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 17 & 9 & 27\\ 4 & -6 & 5\end{vmatrix}=$$

$$\boldsymbol{a}_x(9\times5+27\times6)+\boldsymbol{a}_y(27\times4-17\times5)+$$

$$\boldsymbol{a}_z(-17\times6-9\times4)=$$

$$\boldsymbol{a}_x207+\boldsymbol{a}_y23-\boldsymbol{a}_z138$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{a}_x11+\boldsymbol{a}_y9+\boldsymbol{a}_z18)\cdot(\boldsymbol{a}_x207+\boldsymbol{a}_y23-\boldsymbol{a}_z138)=$$

$$11\times207+9\times23-18\times138=0$$

因矢量($\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$)垂直于由矢量 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 决定的平面，而矢量 $\boldsymbol{A}$ 与该矢量($\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$)的点乘为零，说明 $\boldsymbol{A}$ 与($\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$)垂直，必位于由 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 决定的平面内，故 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面。　　证毕

1.4　给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y2-\boldsymbol{a}_z3$$

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{a}_y4+\boldsymbol{a}_z$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_x5-\boldsymbol{a}_y2$$

求：(1)$\boldsymbol{a}_A$；(2)$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(3)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(4)$\theta_{AB}$；(5)$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量；(6)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；(7)$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$和$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(8)$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解：(1)$\boldsymbol{a}_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_{y2}-\boldsymbol{a}_{y3}}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\boldsymbol{a}_x0.27+\boldsymbol{a}_y0.54-\boldsymbol{a}_z0.80$

(2)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y2-\boldsymbol{a}_z3-(-\boldsymbol{a}_y4+\boldsymbol{a}_z)=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y6-\boldsymbol{a}_z4$

$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\sqrt{1^2+6^2+4^2}=7.28$

(3)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y2-\boldsymbol{a}_z3)\cdot(-\boldsymbol{a}_y4+\boldsymbol{a}_z)=1\times0-2\times4-3\times1=-11$

(4)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|\cos\theta_{\mathrm{AB}}$

$$\cos\theta_{\mathrm{AB}}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|}=\frac{-11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}}=-\frac{11}{\sqrt{238}}$$

$$\theta_{AB}=\arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}}\right)=135.5^\circ$$

(5)令 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量为 A_B

$$A_B=|\boldsymbol{A}|\cos\theta_{\mathrm{AB}}=|\boldsymbol{A}|\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=(\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y2-\boldsymbol{a}_z3)\cdot\left(-\boldsymbol{a}_y\frac{4}{\sqrt{17}}+\boldsymbol{a}_z\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-2.67$$

$|A_B|=2.67$

(6) $$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y13-\boldsymbol{a}_z10$$

(7) $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_x8+\boldsymbol{a}_y5+\boldsymbol{a}_z20$

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y2-\boldsymbol{a}_z3)\cdot(\boldsymbol{a}_x3+\boldsymbol{a}_y5+\boldsymbol{a}_z20)=8+10-60=-42$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{a}_x10-\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z4)\cdot(\boldsymbol{a}_x5-\boldsymbol{a}_z2)=-42$

(8) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{a}_x10-\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z4)\times(\boldsymbol{a}_x5+\boldsymbol{a}_z2)=\boldsymbol{a}_x2-\boldsymbol{a}_y40+\boldsymbol{a}_z5$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{a}_x8+\boldsymbol{a}_y5+\boldsymbol{a}_z20)=\boldsymbol{a}_x55-\boldsymbol{a}_y44-\boldsymbol{a}_z11$$

1.5 三角形的三个顶点为 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$。

(1)判断$\triangle P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形；

(2)求三角形的面积。

解：(1)设 $\boldsymbol{r}_1$ 为原点到点 P_1 的矢量，$\boldsymbol{r}_2$ 为原点到 P_2 的矢量，$\boldsymbol{r}_3$ 为原点到 P_3 的矢量，故有

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z2,\qquad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{a}_x4+\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z3,\qquad \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{a}_x6+\boldsymbol{a}_y2+\boldsymbol{a}_z5$$

$$\boldsymbol{R}_{12}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=-\boldsymbol{a}_x4+\boldsymbol{a}_z,\ \boldsymbol{R}_{23}=-\boldsymbol{a}_x2-\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z8$$

而 $$\boldsymbol{R}_{12}\cdot\boldsymbol{R}_{23}=(-\boldsymbol{a}_x4+\boldsymbol{a}_z)\cdot(-\boldsymbol{a}_x2-\boldsymbol{a}_y-\boldsymbol{a}_z8)=0$$

由此可知 $\boldsymbol{R}_{12}\perp\boldsymbol{R}_{23}$，也就是说 P_2 角为直角，$\triangle P_1P_2P_3$ 为直角三角形。

(2)三角形面积

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12}\times\boldsymbol{R}_{23}|=\frac{1}{2}|R_{12}||R_{23}|\sin\theta=\frac{1}{2}|R_{12}||R_{23}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{4^2+1^2}\times\sqrt{2^2+1^2+8^2}=17.13$$

1.6 求 $P'(-3,1,4)$ 点到 $P(2,-2,3)$ 点的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向。

解：$\boldsymbol{R}_{P'}=-\boldsymbol{a}_x3+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z4$，　　$\boldsymbol{R}_P=\boldsymbol{a}_x2-\boldsymbol{a}_y2+\boldsymbol{a}_z3$

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_P-\boldsymbol{R}_{P'}=\boldsymbol{a}_x5-\boldsymbol{a}_y3-\boldsymbol{a}_z$

方向余弦为

$$\cos\theta_x=\frac{R_x}{|R|}=\frac{5}{\sqrt{35}}\qquad \theta_x=32.31^\circ$$

$$\cos\theta_y=\frac{R_y}{|R|}=-\frac{3}{\sqrt{35}}\qquad \theta_y=120.47^\circ$$

$$\cos\theta_z=-\frac{R_z}{|R|}=-\frac{1}{\sqrt{35}}\qquad \theta_z=99.73^\circ$$

1.7 在球坐标系中，试求点 $M(6,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ 和点 $N(4,\frac{\pi}{3},0)$ 之间的距离。

解：在直角坐标系中，M、N 两点的坐标为

$$\begin{cases}x_1=r_1\sin\theta_1\cos\varphi_1=6\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\ y_1=r_1\sin\theta_1\sin\varphi_1=6\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{3}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9}{2}\\ z_1=r_1\cos\theta_1=6\cos\dfrac{\pi}{3}=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=4\sin\dfrac{\pi}{3}\cos0=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\\ y_2=4\sin\dfrac{\pi}{3}\sin0=0\\ z_2=4\cos\dfrac{\pi}{3}=2\end{cases}$$

于是

$$R=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=$$
$$\sqrt{(2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+(0-\frac{9}{2})^2+(2-3)^2}=\sqrt{22}$$

1.8 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y2+\boldsymbol{a}_z3$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x4-\boldsymbol{a}_y5+\boldsymbol{a}_z6$，求它们间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量。

解：设 θ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 间的夹角，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\frac{12}{\sqrt{1078}}\qquad\theta=68.56^\circ$$

$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量

$$A_B=|\boldsymbol{A}|\cos\theta=\sqrt{14}\times\frac{12}{\sqrt{1078}}=1.37$$

1.9 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x2+\boldsymbol{a}_y3+\boldsymbol{a}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{a}_x6-\boldsymbol{a}_y4+\boldsymbol{a}_z$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_x-\boldsymbol{a}_y+$

$\boldsymbol{a}_z$ 上的分量。

解：$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{a}_x13+\boldsymbol{a}_y22+\boldsymbol{a}_z10$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上的分量为

$$|P_c|=\left|\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}|(-13-22+10)|=14.43$$

1.10　证明：如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

证：已知 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，　则 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$

由矢量公式　$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

有　$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$

又因　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$　　则 $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$

故　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$　得证

1.11　如果给定一未知矢量与一已知矢量的标量和矢量积，那么便可以确定该未知矢量。设 $\boldsymbol{A}$ 为一已知矢量，$P=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ 而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，$P$ 和 $\boldsymbol{P}$ 已知，试求 $\boldsymbol{X}$。

解：因 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，　则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$

又因 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=P,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$

故　$$\boldsymbol{X}=\frac{P\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}}{A^2}$$

1.12　试判断下列矢量场 $\boldsymbol{F}$ 是否为均匀矢量场：

(1)圆柱坐标系中 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}_rF_1\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi F_1\cos\varphi+\boldsymbol{a}_zF_2$，其中 F_1、F_2 都是常数；

(2)球坐标系中，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}_rF_0$，其中 F_0 为常数。

解：(1)圆柱坐标与直角坐标单位矢量关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_x\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\varphi\\ \boldsymbol{a}_\varphi=-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi\\ \boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_z\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{a}_x\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\varphi)F_1\sin\varphi+(-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi)F_1\cos\varphi+\boldsymbol{a}_zF_2=\boldsymbol{a}_yF_1+\boldsymbol{a}_zF_2$

$\boldsymbol{F}$ 的模 $|\boldsymbol{F}|=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$=常数，$\boldsymbol{F}$ 与 y 轴的夹角

$$\alpha=\arctan\frac{F_2}{F_1}=\mathrm{const}$$

即 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向均不随空间坐标的变化而变化，故为均匀场。

(2)球坐标系中，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}_rF$。

尽管 $\boldsymbol{F}$ 的大小不变，但方向为 $\boldsymbol{a}_r$，不同点 $\boldsymbol{a}_r$ 方向不同，故不是均匀场。事实上，由单位矢量的变换关系

$$\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_x\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_z\cos\theta$$

可知 $\boldsymbol{a}_r$ 是 θ、φ 的函数，不同的点 (r,θ,φ)，$\boldsymbol{F}$ 有不同的方向。

1.13　在圆柱坐标中，一点的位置由 $(4,2\pi/3,3)$ 定出，求：

(1)该点在直角坐标中的坐标；

(2)该点在球坐标中的坐标。

解：设点 $(4,\frac{2\pi}{3},3)$ 到原点的圆柱坐标中的矢量为 $\boldsymbol{R}$，则在直角坐标中的分量为

$R_x = r\cos\varphi = 4 \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} = -4 \times \dfrac{1}{2} = -2$

$R_y = r\sin\varphi = 4 \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3} = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

则在直角坐标中的位置为$(-2, 2\sqrt{3}, 3)$。在球坐标中 $R = \sqrt{r^2+z^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$，$\cos\theta = \dfrac{z}{R} = \dfrac{3}{5}$，则 $\theta = 53.13°$，$\varphi = \dfrac{2\pi}{3} = 120°$

故在球坐标中该点的位置为$(5, 53.13°, 120°)$。

1.14　用球坐标表示的场 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_r(25/r^2)$，求：

(1)在点$(-3, 4, -5)$处的$|\boldsymbol{E}|$和 E_x；

(2)$\boldsymbol{E}$ 与矢量 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x 2 - \boldsymbol{a}_y 2 + \boldsymbol{a}_z$ 构成的夹角。

解：在点$(-3, 4, -5)$处，$r = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$

$|\boldsymbol{E}| = \dfrac{25}{r^2} = \dfrac{25}{(5\sqrt{2})^2} = 0.5$

$E_x = |\boldsymbol{E}|\cos\theta_{rx} = |\boldsymbol{E}| \times (-\dfrac{x}{r}) = 0.5 \times (\dfrac{-3}{5\sqrt{2}}) = -0.212$

$$\boldsymbol{E} = |\boldsymbol{E}|(\boldsymbol{a}_x \frac{-3}{5\sqrt{2}} + \boldsymbol{a}_y \frac{5}{5\sqrt{2}} - \boldsymbol{a}_z \frac{5}{5\sqrt{2}}) =$$
$$0.5 \times (\boldsymbol{a}_x \frac{-3}{5\sqrt{2}} + \boldsymbol{a}_y \frac{4}{5\sqrt{2}} - \boldsymbol{a}_z \frac{5}{5\sqrt{2}}) =$$
$$-\boldsymbol{a}_x 0.212 + \boldsymbol{a}_y 0.283 - \boldsymbol{a}_z 0.354$$

$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角 θ_{EB} 为

$\cos\theta_{EB} = \dfrac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|} = -\dfrac{1.344}{1.5}$　$\theta_{EB} = 153.6°$

1.15　球坐标中两个点$(r_1, \theta_1, \varphi_1)$和$(r_2, \theta_2, \varphi_2)$定出两个位置矢量 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$。证明 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 间夹角的余弦为

$\cos\gamma = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\cos\theta_1\cos\theta_2$

证：$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{a}_x r_1\sin\theta_1\cos\varphi_1 + \boldsymbol{a}_y r_1\sin\theta_1\sin\varphi_1 + \boldsymbol{a}_z r_1\cos\varphi_1 =$
$r_1(\boldsymbol{a}_x\sin\theta_1\cos\varphi_1 + \boldsymbol{a}_y\sin\theta_1\sin\varphi_1 + \boldsymbol{a}_z\cos\varphi_1)$

$\boldsymbol{R}_2 = r_2(\boldsymbol{a}_x\sin\theta_2\cos\varphi_2 + \boldsymbol{a}_y\sin\theta_2\sin\varphi_2 + \boldsymbol{a}_z\cos\varphi_2)$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2}{|\boldsymbol{R}_1|\ |\boldsymbol{R}_2|} = \frac{r_1 r_2}{r_1 r_2}(\sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2 + \sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2) =$$
$$\sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 =$$
$$\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2$$

证毕

1.16　一球面 S 的半径为 5，球心在原点上，计算

$$\oint_S (\boldsymbol{a}_r 3\sin\theta) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

的值。

解：$\oint_S (\boldsymbol{a}_r 3\sin\theta) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$

$\oint_S (\boldsymbol{a}_r 3\sin\theta) \cdot (\boldsymbol{a}_r \mathrm{d}S_r + \boldsymbol{a}_\theta \mathrm{d}S_\theta + \boldsymbol{a}_\varphi \mathrm{d}S_\varphi) =$

$$\oint_S 3\sin\theta \mathrm{d}S_r = \oint_3 3r^2\sin^2\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3 \times 5^2\sin^2\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 75\pi(\theta - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \Big|_0^{\pi}) = 75\pi^2$$

1.17 求$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$在给定点的值：

(1)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^3+\boldsymbol{a}_y y^3+\boldsymbol{a}_z z^3$ 在点 $M(1,0,-1)$；

(2)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x 4x-\boldsymbol{a}_y 2xy+\boldsymbol{a}_z z^2$ 在点 $M(1,1,3)$；

(3)$\boldsymbol{A}=xyz\boldsymbol{r}$，在点 $M(1,3,2)$，式中 $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z)$。

解：(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}=\frac{\partial x^3}{\partial x}+\frac{\partial y^3}{\partial y}+\frac{\partial z^3}{\partial z}=(3x^2+3y^2+3z^2)|_M=$

$3\times 1^2+0+3\times(-1)^2=6$

(2) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}=\frac{\partial(4x)}{\partial x}-\frac{\partial 2xy}{\partial y}+\frac{\partial z^2}{\partial z}=(4-2x+2z)|_M=$

$4-2\times 1+2\times 3=8$

(3) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}=\frac{\partial x^2yz}{\partial x}+\frac{\partial xy^2z}{\partial y}+\frac{\partial xyz^2}{\partial z}=$

$2xyz+2xyz+2xyz=6xyz|_M=$

$6\times 1\times 3\times 2=36$

1.18 在由 $r=5$，$z=0$ 和 $z=4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_r r^2+\boldsymbol{a}_z 2z$ 验证散度定理。

解：$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S (\boldsymbol{a}_r r^2 + \boldsymbol{a}_z \cdot 2z) \cdot (\boldsymbol{a}_r r\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}z + \boldsymbol{a}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi) =$

$$\int_0^4\int_0^{2\pi} 5^3\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z + 2\int_0^5\int_0^{2\pi} 4r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 1200\pi$$

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau = \int_\tau [\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z)]\mathrm{d}\tau =$$

$$\int_\tau (3r + 2)\mathrm{d}\tau = \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^5 (3r + 2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z =$$

$$4 \times 2\pi \times (5^3 + 5^2) = 1200\pi$$

由上面的结果可知$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，验证完毕。

1.19 (1)求矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y (xy)^2+\boldsymbol{a}_z 24x^2y^2z^3$ 的散度；(2)求$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$对中心在原点的一个单位立方体的积分；(3)求 $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的积分，验证散度定理。

解：(1) 在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

得 $$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=2x+2x^2y+72x^2y^2z^2$$

(2)中心在原点的单位立方体的$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$的体积分为

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2x + 2x^2y + 72x^2y^2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{24}$$

(3)$\boldsymbol{A}$ 对该立方体表面积分为

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 24x^2y^2(\frac{1}{2})^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 24x^2y^2(-\frac{1}{2})^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$