

SMP

英国中学数学教科书

X册

英国中学数学教科书

S M P

X 册

上海师范大学数学系翻译组译

上海教育出版社

The School Mathematics Project

Book X

Cambridge University Press

英国中学数学教科书

S M P

X 册

上海师范大学数学系翻译组译

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行 上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.5 字数 163,000

1978年9月第1版 1978年9月第1次印刷

统一书号: 7150·1890 定价: 0.59元

内部发行

序

这是 X、Y、Z 三册中的第一册。这三册书是为学完 A 到 H 册后，准备参加普通水平考试的学生编写的，内容和 G 册衔接，包括准备参加“SMP 数学”普通水平考试的最后一部分课程。这三册书也适用于正在进行一年普通水平复习课程的学生和已参加过 CSE 考试的学生。

从 A 到 G 册中所介绍的许多问题，在这里得到引伸和深化。此外也介绍了一些新的问题。Z 册还包括全套普通水平课程的总复习内容。

X 册中有好几章同时从运算和结构两方面的观点来讨论代数问题。“集合”的符号在第二章作了介绍，并且在以后几章中广泛使用。“函数”一章介绍函数的记号、复合函数和反函数。在“方程和不等式”一章中，暂时不用方程的流向图解法，而用一种更“直接”的方法，使学生有机会去选择最适合他们的需要和能力的方法。接下去是“公式”的一章，着重于代数运算的技能。“变换”的两章，对原来在 A 到 H 各册中讲过的有关内容进行复习，并从几何观点介绍变换的复合问题。在“矩阵和变换”一章中，用代数方法对这一问题作了补充。其他几章讨论三维空间、计算（包括标准指数形式）、向量和不规则图形的面积等。“统计”一章把普通水平课程所需的统计内容全部讲完。

有些章之间有插曲和统计设计，它们都是本课程的有机组成部分，并在应用数学思想进行实验方面，给学生提供更多的自由发挥的机会。

~~ABC 1/15~~ Art 1/12/03. i.

目 录

序	i
1. 在三维空间中考虑问题	1
“数学苍蝇”在三维空间中的历险, 1 ; 相交, 6 ; 三维空间中的角, 8 ; 三维空间中的轨迹, 12	
2. 变换的复合 I	14
模板和图案, 14 ; 缩写符号, 15 ; 缩写符号的扩充, 20	
3. 集合	26
全集, 26 ; 符号, 28 ; 并集和交集, 32 ; 文氏图, 36 ; 轨迹, 40	
4. 变换的复合 II	45
一般变换, 45 ; 逆变换, 52	
四边形	57
复习题	64
5. 计算	68
复习, 68 ; 有效数字和估计, 68 ; 近似值, 72 ; 精确度 的界限, 75 ; 数的指数形式, 79 ; 标准指数形式, 81	
6. 函数	84
复习, 84 ; 函数, 86 ; 定义域和值域, 89 ; 函数记 号, 91 ; 复合函数, 93 ; 再谈反函数, 96 ; 求反函 数, 100 ; 自反函数, 104	
数表的使用	107
引言, 107 ; 平方, 107 ; 平方根, 109 ; 倒数表, 113	

7. 方程和不等式	116
解简单方程, 116; 分配律, 118; 使用分配律, 121; 解另一些方程, 125; 不等式, 128	
8. 公式	135
公式的使用, 135; 公式的计算目标, 138; 改变公式的计 算目标, 141	
统计作业	146
复习题	152
9. 向量	156
复习, 156; 几何上的向量, 160; 向量的加法, 163; 向量 加法的性质, 166; 位置向量, 170; 物理上的向量, 172	
10. 统计	175
集中程度, 175; 分组区间, 182; 随机选择, 187	
11. 矩阵和变换	190
基向量, 190; 基向量和变换, 192; 复合变换, 197	
12. 不规则图形的面积	201
估计面积, 201; 梯形的面积, 203; 图象下的面积, 206; 曲线下的面积, 212	
计算机	218
和计算机通讯——输入和输出, 218; 计算机的应用, 222	
复习题	224

1. 在三维空间中考虑问题

本章是讨论三维空间几何学的。要想象三维空间中的物体是不容易的，但下列东西会对你有所帮助：

一只硬板纸盒；

用麦秆和烟斗通条做的一只盒子框架模型；

一个立方体的框架模型；

一个底为正方形的棱锥的框架模型。

1. “数学苍蝇”在三维空间中的历险

讨论 1

图 1 表示一个房间。一只“数学苍蝇”停在顶角 F 上。一只蜘蛛停在一个底角 S 上。

蜘蛛想要沿墙壁的边线去偷袭苍蝇。

(a) 沿墙壁边线从 S 到 F 最短的距离是多少？有几条这样的最短路线？

(b) 还有其它较长的路线。求出其中最短路线的长度。这样长的路线共有多少条？

(c) 考虑一下所有其它可能路线的长度，每种长度的路线各有多少条？（注意：蜘蛛每次袭击苍蝇时都不在同一顶点上经过两次。）

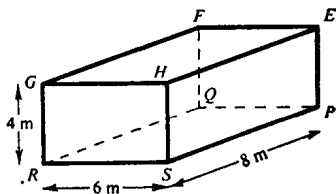


图 1

讨论 2

仍旧是蜘蛛对苍蝇, 但是用不同的规则。

这次, 蜘蛛沿对角线穿过地板, 然后沿墙壁往上爬, 见图 2 (a)。

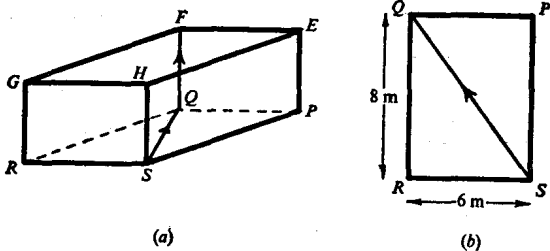


图 2

为了求它走过的总路程, 我们来看图 2 (b), 它表示苍蝇看到的地板。用毕达哥拉斯法则求出对角线的距离。

(a) 蜘蛛这次袭击共走了多少路?

(b) 沿一条对角线和一条边线进行袭击, 还有另外两种路线, 长度跟刚才走过的路线的长度不同。求出它们的长度。

讨论 3

苍蝇有时也进行报复。当蜘蛛睡着时, 苍蝇对着它嗡嗡地叫。苍蝇飞到蜘蛛那儿有多远? 用纸剪个象图 3 中那样的三角形, 它将有助你解决问题。

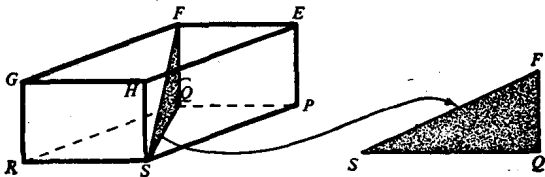


图 3

这个三角形的底边的长，正好是地板的对角线的长——这是你在讨论 2 中已计算过的。三角形的高即房间的高，是 4 米。应用毕达哥拉斯法则，求出苍蝇要飞行的距离。

讨论 4

蜘蛛想沿一条最短的路线到达苍蝇所在的顶角，必要的话可以经过墙壁、地板或天花板。

问题是求出这个最短路线的长度。

你在读下文之前，先算算看。

假使你把盒子象图 4 那样展开，将有助于求出最短路线。

三个标有 F 的点，当硬板纸拼起来时，就表示苍蝇所在的那个顶角。

蜘蛛所要经过的最短路线必然是一条直线。现在要判定图 4 的三条直线中哪一条最短。你一定能用毕达哥拉斯法则解决这个问题。

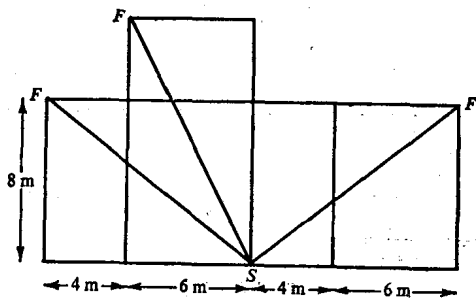


图 4

三维空间中的毕达哥拉斯法则

回过头来看讨论 3。你的解法大概是这样的：从图 5，

$$\begin{aligned}
 SQ^2 &= SP^2 + PQ^2 \\
 &= 8^2 + 6^2 \\
 &= 100 \text{ 米}^2, \\
 SQ &= 10 \text{ 米}.
 \end{aligned}$$

从图 6,

$$\begin{aligned}
 SF^2 &= SQ^2 + QF^2 \\
 &= 10^2 + 4^2 \\
 &= 116 \text{ 米}^2, \\
 SF &= 10.8 \text{ 米 (精确到三位有效数字)}.
 \end{aligned}$$

这个解法可以简写成:

$$\begin{aligned}
 SF^2 &= SQ^2 + QF^2 \\
 &= (SP^2 + PQ^2) + QF^2 \\
 &= 8^2 + 6^2 + 4^2 \\
 &= 116 \text{ 米}^2, \\
 SF &= 10.8 \text{ 米 (精确到三位有效数字)}.
 \end{aligned}$$

这里你可看到, SF^2 是三个平方数的和, 即 $8^2 + 6^2 + 4^2$ (图 7). 这就是推广到三维空间的毕达哥拉斯法则.

(a) 设房间的大小是 5 米 \times 7 米 \times 3 米, 那末蜘蛛到苍蝇的直达距离可从下式得出:

$$SF^2 = 5^2 + 7^2 + 3^2.$$

求出距离 SF .

(b) 设一只盒子的大小是 6 厘米 \times 8 厘米 \times 5 厘米, 两个相对的顶点间的直达距离是多少?

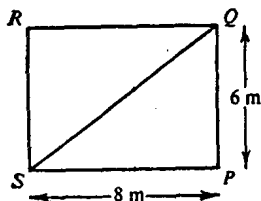


图 5

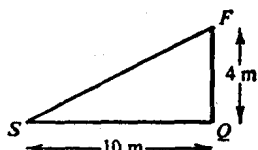


图 6

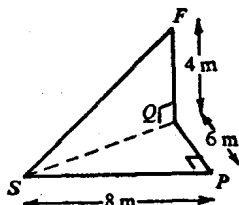


图 7

练习 A

1. 一只盒子的大小是 8 厘米×12 厘米×5 厘米, 见图 8.

(a) 计算(i) AC , (ii) BG , (iii)

BE 的长.

(b) 计算对角线距离 BH .

2. 量出你的纸盒或麦秆模型的边长, 计算从蜘蛛所在的顶角到苍蝇所在的顶角之间的直达距离. 再量一量来核对一下.

3. 测量教室或家里房间的长、宽、高. 计算从蜘蛛到苍蝇的直达距离.

4. 汽车间长 5 米, 宽 3 米, 高 3 米. 一根 7 米长的棒放得进吗? 说明你是怎样得出结果的.

5. 在讨论 4 中, 假使蜘蛛停在地板上 6 米的那条边(图 1, 2, 3 中跟你“最靠近”的那条)的中点, 计算

(a) 蜘蛛到苍蝇的空间直达距离;

(b) 经过墙壁、地板或天花板的最短距离.

6. 苍蝇在劈锥的一个角上, 蜘蛛在另一角上, 见图 9.

(a) 计算从 S 沿边线到 F 的所有可能路线的距离, 每个顶角至多只能经过一次;

(b) 计算经过斜面的直达距离.

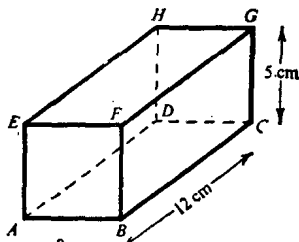


图 8

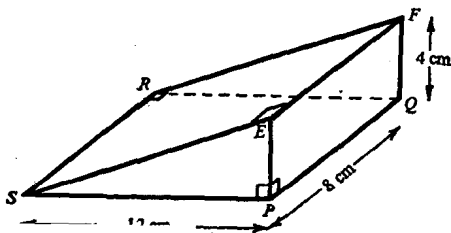


图 9

7. 苍蝇在一只酱豆罐头的顶边上, 蜘蛛在他的正下方的底边上. 见图 10. 蜘蛛为了出其不意地一下子逮住苍蝇, 狡猾地沿着一条对角线路线走. 蜘蛛走了多少路? (提示: 想象把罐头外边贴的纸摊开成一长方形. 先用计算尺求出这个长方形的长.)

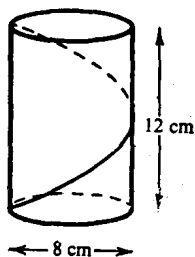


图 10

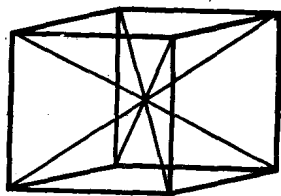


图 11

8. (a) 一个立方体的尺寸是 5 厘米 \times 5 厘米 \times 5 厘米. 求从一个顶角到相对底角的对角线的长.

(b) 图 11 表示一个立方体可以分成六个以正方形为底的棱锥. (你可能曾做过这样的模型.) 运用(a)的答案求出棱锥一条斜边的长.

画出其中一个棱锥展开面的草图, 并标上尺寸.

2. 相交

这一节里你将发现: 你所在房间里的墙壁和边线, 都是有用的直观教具.

(a) 在一个平面上 (即在两维空间中), 两条直线不是相交, 就是平行, 见图 12. 在三维空间中, 两条直线相交和不相交的可能性又怎样呢?

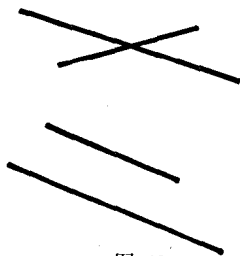


图 12

画一个你所在房间的草图, 并在其上标出:

- (i) 两条相交的直线;
- (ii) 两条平行的直线;
- (iii) 两条既不相交又不平行的直线. 这样两条直线

称为异面直线或相错直线.

(b) 利用这间房间, 再举出下列例子:

- (i) 两个相交的平面;
- (ii) 两个平行的平面.

是否可能有两个既不相交又不平行的平面? 两平面相交时, 它们的相交部分是什么?

(c) 讨论一下三个平面相交的情况. 例如, 三个平面能够相交于一点、一条直线或两条直线吗? 这时仍然可以利用这间房间, 但还需要想象某些通过对角线的平面.

(d) 经过两个已知点的直线只能有一条. 经过两个已知点的平面有多少?

经过三个已知点的平面有多少?

包含一条已知直线和不在这条直线上的一个已知点的平面有多少?

是否总有一个平面通过三维空间中的两条已知直线?

练习 B

这个练习要用一个麦秆做的立方体模型. 设它标着字母如图 13.

1. 利用图 13 举出:

- (a) 两条相交的直线;
- (b) 两条平行的直线;
- (c) 两条成直角的异面直线;
- (d) 两条不成直角的异面直

线;

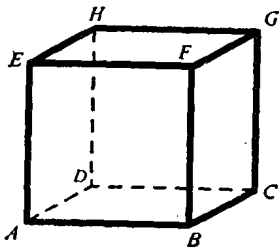


图 13

- (e) 两个相交的平面;
- (f) 两个不相交的平面;
- (g) 三个相交于一点的平面;
- (h) 三个相交于两条平行直线的平面.

2. 下面哪几对直线能确定一个平面?

- (a) AB 和 CD ;
- (b) AB 和 HG ;
- (c) AB 和 GC ;
- (d) EB 和 HC ;
- (e) GF 和 DC ;
- (f) GB 和 ED .

3. 下面这些四点组成的集合中, 哪几个能确定一个平面?

- (a) A, B, C, D ;
- (b) A, B, G, H ;
- (c) A, B, G, C ;
- (d) D, E, F, G ;
- (e) B, D, F, H ;
- (f) C, D, F, H .

4. 用橡皮泥做一个立方体. 假使在图 13 的立方体上切去一个角, 就得到一个三角形截面, 见图 14. 要想得到一个矩形截面应该怎样切? 要得出下列三种截面应该怎样切?

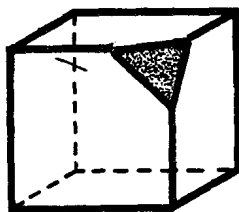


图 14

- (a) 梯形;
- (b) 六边形;
- (c) 五边形.

3. 三维空间中的角

(a) 直线和平面之间的夹角

图 15 的每一个图都表示一根插在地上的细棒.

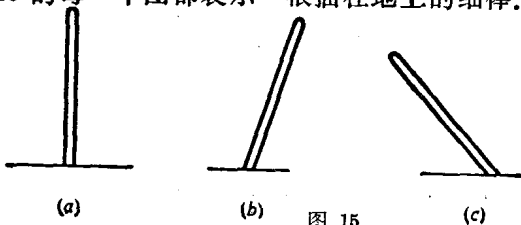


图 15

巴塞尔·布莱恩说：图 15(a) 表示一根竖直的棒，图 15(b) 表示一根与地面夹角大约为 72° 的棒，图 15(c) 表示一根与地面夹角大约为 50° 的棒。他说得对吗？

在读下去以前，先想一想。

巴塞尔·布莱恩错了！这三张图表示的是同一根棒。夹角取决于你从哪儿去看它。你可以用钢笔的一头放在纸上试试看。

有时需要讲到一条直线和一个平面之间的夹角。为了确定要度量的那只角，我们这样做：

在图 16 中， AB 是一根棒，设想有一条铅垂线从它的顶端挂下来。如果这条铅垂线正好碰到地面上的 C 点，那末角 ABC 就是棒和地面之间的夹角。

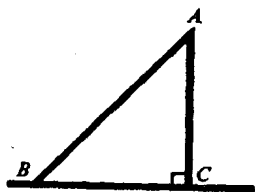


图 16

也可以这么想：当太阳就在棒的正上方时， BC 就是这根棒的影子。

(a) 设棒长 2 米， A 离地面 0.7 米，利用三角表求出这根棒和地面的夹角的大小。

(b) 在麦秆模型或你所在的房间里，找出连结相对顶角的直线和地板之间的夹角。

(b) 两个平面之间的夹角

(a) 把一张没有横线的纸剪去两只角，如图 17(a)。再象图 17(b) 那样折出两个相交的平面。这两个平面之间的夹角是什么？是角 BAF 还是角 CDE ，还是别的什么角？这些角都相等吗？

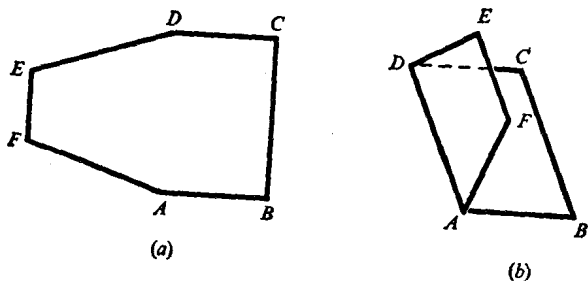


图 17

(b) 再把一张划有横线的纸折一下，使折痕跟横线成直角。折好以后，放成图 18 的位置。这张纸上任一条横直线的两部分所夹的角，就称为两平面之间的夹角，或简称两平面的夹角。因此，图 17(b) 中的角 BAF 和 CDE 都不是两平面之间的夹角。

要求出两个平面的夹角，必须在这两个平面上各有一条彼此相交的直线，并且与这两平面的交线在交点处成直角(图 18 中的两条虚线)。这样，两平面之间的夹角就是 PQR 。

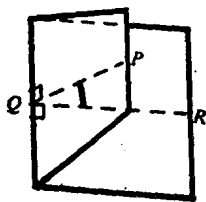


图 18

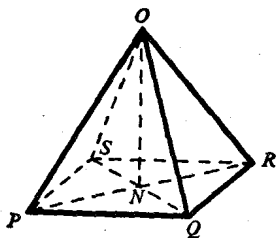


图 19

(c) 用一只以正方形为底的棱锥的麦秆模型，见图 19(底面的对角线已画出， O 在 N 的正上方)。指出直线 OP 和平面

$PQRS$ 的夹角. 在模型上系上细线, 来表示两平面 OPQ 和 $PQRS$ 间的夹角.

练习 C

第 1 题到第 6 题都要用到图 20 的立方体, 已标字母如图. 一个麦秆模型将对你有所帮助.

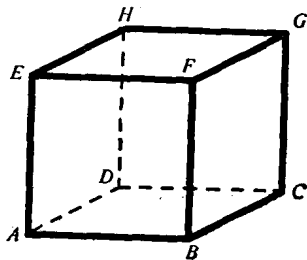


图 20

1. 指出下列各对平面的交线:
 - (a) $ABCD$ 和 $BCGF$;
 - (b) $ABCD$ 和 $BCHE$;
 - (c) $ABCD$ 和 $BDHF$;
 - (d) $ADHE$ 和 $EFGH$.
2. 说出上题中各对平面间夹角的大小.
3. 下面这些说法中哪些是正确的?
 - (a) $ADGF$ 和 $EFGH$ 的夹角是 AFE ;
 - (b) $ABGH$ 和 $ABCD$ 的夹角是 GBD ;
 - (c) $CDEF$ 和 $ABGH$ 的夹角是 90° ;
 - (d) $ABCD$ 和 $ACGE$ 的夹角是 45° .
4. 指出下列各对平面之间的夹角:
 - (a) $ABCD$ 和 $ABGH$;
 - (b) $ABGH$ 和 $CDHG$;
 - (c) $BDHF$ 和 $ADHE$;
 - (d) $ADGF$ 和 $EFGH$;
 - (e) $ADGF$ 和 $BCGF$.
5. 指出下列各直线与平面之间的夹角:
 - (a) BG 和 $ABCD$;
 - (b) DF 和 $ABCD$;
 - (c) FG 和 $ABGH$;
 - (d) AG 和 $CDHG$;
 - (e) BH 和 $ABFE$.