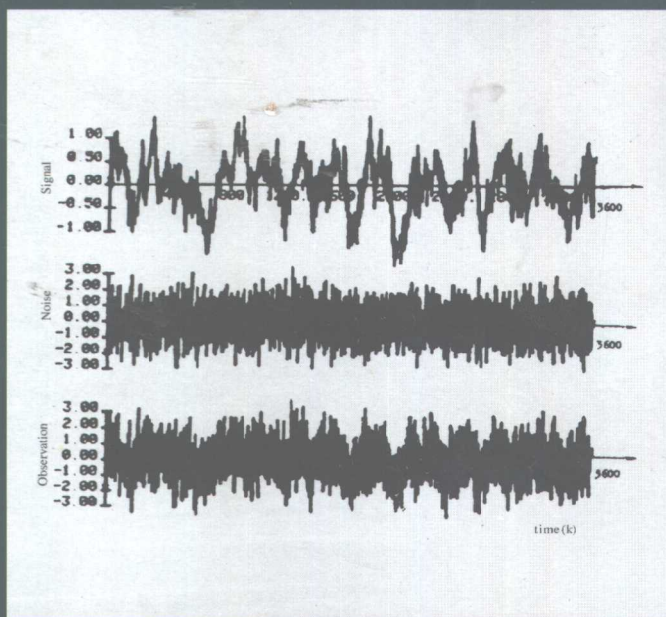


# 卡尔曼滤波与维纳滤波

——现代时间序列分析方法

邓自立 著



哈尔滨工业大学出版社

# 卡尔曼滤波与维纳滤波

——现代时间序列分析方法

邓自立 著

哈尔滨工业大学出版社

·哈尔滨·

## 内 容 简 介

本书系统地阐述由邓自立教授提出的最优滤波新的方法论——现代时间序列分析方法及其在 Kalman 滤波和 Wiener 滤波中的应用。书中分别介绍了基于 Kalman 滤波的统一的白噪声估计理论和基于 ARMA 新息模型的统一的白噪声估计理论及它们在状态和信号估计与反卷积中的应用。书中提出了 Kalman 滤波和 Wiener 滤波的一系列新方法和新算法,内容新颖,理论严谨,深入浅出,并含有大量算例和仿真例子。

本书可作为理工科院校控制理论与控制工程、信号处理、检测与估计等专业的研究生及本科高年级学生选修课教材,也适合在信号处理、控制、通信、制导、雷达跟踪、油田地震勘探、卫星测控、图像处理、故障诊断、机器人、经济、生物医学等领域的科技人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

卡尔曼滤波与维纳滤波:现代时间序列分析方法/邓自立著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001.7

ISBN 7-5603-1622-0

I.卡... II.邓... III.①卡尔曼滤波②维纳滤波  
IV.0211.64

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039123 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006

传 真 0451—6414749

印 刷 地矿部黑龙江测绘印制中心印刷厂

开 本 850×1168 1/32 印张 12.75 字数 336 千字

版 次 2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5603-1622-0/TP·161

印 数 1~1 000

定 价 19.00 元

# 前 言

最优滤波解决系统的状态和信号的最优估计问题,即由被噪声污染的观测信号求状态或信号的最优滤波器,也叫最优估值器。术语“滤波”或“过滤”有滤掉或过滤噪声还状态或信号本来面目之意。在有传感器或检测仪表的系统中,常常会遇到这类问题。这是因为一方面传感器或检测仪表带有一定量测噪声(即量测随机误差),另一方面在检测过程中还可能受到其他噪声干扰。从解决这类问题的目的看,有些问题是单纯最优估计问题,例如,石油地震勘探反射系数序列估计问题归结为系统的输入白噪声估计问题,它含有油层几何形状的重要信息,目的是为了寻找和发现新油田,确定油田范围。这类问题叫输入估计或反卷积问题。有些问题是与控制问题有关,例如,在海上石油勘探船舶动态定位系统中,检测和估计船舶的位置是为了控制船舶的位置,使船舶在风浪下保持稳定、平衡和平稳。又例如,在冷轧带钢控制系统中,检测和估计带钢厚度是为了高精度控制其厚度。因此,最优滤波广泛应用在信号处理、通信和控制领域。

解决最优滤波问题有三种方法论:Wiener 滤波方法,Kalman 滤波方法和现代时间序列分析方法。经典 Wiener 滤波方法是由控制论创始人 N. Wiener 在第二次世界大战期间于 20 世纪 40 年代初,由于研究火炮控制系统的需要,从平稳时间序列预报问题出发提出的。经典 Wiener 滤波方法是一种频域方法。设计物理上可实现的 Wiener 滤波器要求谱分解和传递函数的部分分式展开。其缺点和局限性是要求信号是平稳随机过程,要求存贮全部历史数据,滤波器是非递推的,计算量和存贮量大,不便于实时应用。虽然经典 Wiener 滤波方法有上述缺点,但它仍是改进滤波器设计的重要途径。现代频域 Wiener 滤波方法

即多项式方法是经典 Wiener 滤波方法的新发展,形成于 20 世纪 80 年代。它通过求解 Diophantine 方程可直接得到物理上可实现的 Wiener 滤波器,避免了传递函数的部分分式展开,且可处理多维信号和非平稳随机信号。

随着电子计算机、军事和空间技术的发展,经典 Wiener 滤波方法已不能满足实际应用的需要。因此 R. E. Kalman 在 20 世纪 60 年代初提出了 Kalman 滤波方法。Kalman 滤波方法是一种时域方法,它基于状态空间模型来解决最优滤波问题,且最终将问题归结为计算或求解 Riccati 方程。同经典 Wiener 滤波方法相比,它具有的优点是, Kalman 滤波器具有递推形式,便于在计算机上实现和实时应用,可处理时变系统、非平稳信号和多维信号。其缺点是要求精确已知系统模型和噪声统计。

现代时间序列分析方法是由邓自立等人于 1989 年在专著《现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制》(北京:知识出版社,1989 年版)中提出的。该方法是一种不同于 Kalman 滤波方法的一种新的时域方法。它以 ARMA 新息模型作为基本工具,避免了求解 Riccati 方程。它也完全不同于现代频域 Wiener 滤波方法(多项式方法),避免了求解 Diophantine 方程。该方法的原理和机理是:(1)ARMA 新息模型提供了最优估计(最优滤波)所需的全部信息;(2)将状态或信号估计问题归结为白噪声估计问题。用该方法可以得到用 Kalman 滤波方法和 Wiener 滤波方法不容易得到的许多新理论、新方法、新算法和新结果,例如白噪声估计理论,统一的稳态 Kalman 滤波理论,统一的时域 Wiener 滤波理论、广义系统状态估计理论、最优反卷积理论、Kalman 滤波和 Wiener 滤波新方法和新算法等。特别应指出,由于广义系统在机器人、经济、电网等领域有广泛的应用背景,近年来尤为人们所关注。用 Kalman 滤波方法和多项式方法处理广义系统状态估计问题收效甚微,成为一个难点问题。但用现代时间序列分析方法却可有效地用多种新方法和新算法解决广义系统 Kalman 滤波和 Wiener 滤波问题。这些结果被总结在本人的另一本专著《最优滤波理论及其应

用——现代时间序列分析方法》(哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2000年版)中。它们构成了独具特色的新的最优滤波理论。现代时间序列分析方法成为继 Wiener 滤波方法和 Kalman 滤波方法之后的最优滤波的一种新的方法论。基于 ARMA 新息模型的递推辨识,它还可处理含未知模型参数和噪声统计系统的自校正滤波问题。

本书系统地阐述最优滤波新的方法论——现代时间序列分析方法及其在 Kalman 滤波和 Wiener 滤波中的应用。首次用统一的时域方法论重建 Kalman 滤波和 Wiener 滤波新理论和新方法。

全书分为四章。第一章介绍了常用的 ARMA 模型、状态空间模型、传递函数模型及它们的相互转化。特别详细介绍了构造 ARMA 新息模型的 Gevers - Wouters 算法。不仅给出了该算法的 MATLAB 程序清单,而且用若干仿真例子说明其有效性。第二章介绍经典 Kalman 滤波理论的基本结果,着重介绍带相关噪声系统 Kalman 滤波,其中介绍了正交射影方法和新息方法,并用射影理论推导 Kalman 滤波器,使本书理论严谨,自成体系。第三章首次提出了基于 Kalman 滤波的统一的白噪声估计理论及其在状态和信号最优估计中的应用。这种白噪声估计理论的特点是要求求解 Riccati 方程。该章是目前现代时间序列分析方法的最新进展。第四章介绍基于 ARMA 新息模型的统一的白噪声估计理论及其在状态和信号最优估计中的应用。特别介绍了极点配置稳态 Kalman 滤波器,介绍了关于传递函数中的零极对消问题及广义系统降阶 Kalman 滤波器和 Wiener 滤波器等,这些内容发展和更新了作者在《最优滤波理论及其应用》一书中的内容。上述基于 Kalman 滤波的白噪声估计理论与基于 ARMA 新息模型的白噪声估计理论相比,前者的优点是它可处理时变系统白噪声最优估计问题;且可用于解决时变系统状态或信号最优估计问题。后者的优点是它可处理广义系统白噪声最优估计问题,且可用于解决广义系统状态估计问题。

本书系国家自然科学基金资助项目研究成果。作者先后负责两项国家自然科学基金资助项目:一项为“油田地震勘探信号自校正去卷滤波新方法研究”(项目批准号:69172007),1992年1月起至1994年12月

止,已高水平、高质量结题,1996年被国家自然科学基金委信息科学部评为优等。另一项为“最优滤波和反卷积新理论和新方法”(项目批准号:69774019),1998年1月起至2000年12月止,已结题。到目前为止两项目在国际权威刊物和国家一级刊物上发表学术论文总计50余篇,所提出的白噪声估计理论《Optimal and Self-tuning White Noise Estimators with Applications to Deconvolution and Filtering Problems》发表在自动控制理论国际权威刊物《Automatica》(1996,32(2):199~216)上。书中主要内容取自后一个项目的新近已发表、或即将发表、或尚未公开发表的最新研究成果。书中绝大部分内容是新的,具有独创性、新颖性和可应用性的特点。大量计算机数值仿真例子和算例说明了由本书提出的新理论、新方法和新算法的有效性、正确性和可应用性。每章末附有最新参考文献,可供感兴趣读者作深入研究参考。

作者深深地感激已故中国科学院院士张钟俊教授生前对本人的鼓励和帮助。他对现代时间序列分析所给予的高度评价(张钟俊.一门新兴边缘学科——现代时间序列分析.信息与控制,1988,17(4):62~63)一直激励作者在这一新兴边缘领域努力探索。本书的研究成果表明,现代时间序列分析方法具有强大的生命力,继Wiener滤波方法和Kalman滤波方法之后,为最优滤波提供了新的方法论。

作者感谢中国科学院院士张嗣瀛教授多年来对本人的鼓励和帮助。

作者还要感谢由作者指导的历届40多名研究生,他们对书中提出的新理论和新方法做了大量仿真研究工作。

最后,感谢国家自然科学基金委的资助。

由于水平所限,缺点甚至错误之处在所难免,望读者批评指正。

著 者

2001年元旦于哈尔滨

# 目 录

第一章 线性离散随机系统模型	(1)
1.1 向量 ARMA 模型	(1)
1.2 传递函数模型	(8)
1.3 状态空间模型	(9)
1.4 状态空间模型与 ARMA 模型的转化	(15)
1.5 化状态空间模型为块伴随形	(23)
1.6 构造纯量 ARMA 新息模型的解析法	(26)
1.7 求 MA 参数的 Gevers - Wouters 算法及 MATLAB 程序	(30)
1.8 用 Gevers - Wouters 算法构造 ARMA 新息模型	(37)
1.9 用解 Riccati 方程构造 ARMA 新息模型	(48)
参考文献	(54)
第二章 经典 Kalman 滤波	(56)
2.1 射影方法和新息方法	(57)
2.2 Kalman 滤波器和预报器	(63)
2.3 Kalman 平滑器	(69)
2.4 稳态 Kalman 滤波	(75)
2.5 带相关噪声系统 Kalman 滤波	(98)
2.6 带相关噪声系统稳态 Kalman 滤波	(107)
2.7 平稳和非平稳 ARMA 过程的 Åström 预报器	(116)
2.8 非平稳 ARMA 过程预报的稳态 Kalman 预报方法	(127)
2.9 平稳和非平稳向量 ARMA 过程的 Box - Jenkins	



递推预报器 .....	(132)
参考文献 .....	(137)
<b>第三章 基于 Kalman 滤波的白噪声估计理论</b>	
及其在最优滤波中的应用 .....	(139)
3.1 输入白噪声估值器和观测白噪声估值器 .....	(141)
3.2 固定区间白噪声平滑器 .....	(157)
3.3 稳态白噪声估值器 .....	(161)
3.4 白噪声新息滤波器与白噪声 Wiener 滤波器 .....	(166)
3.5 带相关噪声系统白噪声估值器 .....	(175)
3.6 带相关噪声系统固定区间白噪声平滑器 .....	(184)
3.7 带相关噪声系统稳态白噪声估值器 .....	(188)
3.8 带相关噪声系统白噪声新息滤波器与 白噪声 Wiener 滤波器 .....	(191)
3.9 基于白噪声估值器的 Kalman 平滑器 .....	(193)
3.10 用白噪声估值器设计多通道 ARMA 信号的 Wiener 滤波器 .....	(197)
3.11 用白噪声估值器设计 Wiener 状态滤波器 .....	(201)
3.12 用白噪声估值器设计 Wiener 反卷积滤波器 .....	(208)
3.13 带相关噪声系统的极点配置稳态 Kalman 平滑器 ..	(217)
3.14 用白噪声估值器设计 ARMA 新息滤波器 .....	(228)
3.15 带相关噪声系统稳态最优反卷积的 ARMA 新 息滤波器 .....	(233)
参考文献 .....	(235)
<b>第四章 基于 ARMA 新息模型的白噪声估计理论</b>	
及其在最优滤波中的应用 .....	(239)
4.1 稳定和不稳定系统的白噪声估值器 .....	(240)
4.2 白噪声估值器与新息滤波器、Kalman 滤波器和 Wiener 滤波器的关系 .....	(254)

4.3	拟白噪声估值器 .....	(258)
4.4	统一的稳态 Kalman 估值器 .....	(262)
4.5	极点配置稳态 Kalman 估值器 .....	(274)
4.6	固定区间稳态 Kalman 平滑器 .....	(278)
4.7	关于传递函数中零极点对消问题 .....	(283)
4.8	Wiener 状态估值器 .....	(301)
4.9	多通道 ARMA 信号 Wiener 滤波器 .....	(304)
4.10	多通道 Wiener 滤波器 .....	(311)
4.11	多通道最优滤波的 ARMA 新息滤波器 .....	(319)
4.12	单通道 Wiener 反卷积滤波器及其在跟踪问题 中的应用 .....	(325)
4.13	多通道 Wiener 反卷积滤波器 .....	(333)
4.14	带 ARMA 有色观测噪声系统 Wiener 状态滤波器 ..	(341)
4.15	分离随机偏差两段解耦 Wiener 滤波器 .....	(350)
4.16	广义系统极点配置稳态 Kalman 估值器 .....	(356)
4.17	广义系统 Wiener 状态估值器 .....	(367)
4.18	广义系统降阶 Wiener 滤波器 .....	(375)
4.19	非方广义系统 Wiener 状态滤波器和平滑器 .....	(383)
	参考文献 .....	(390)

# 第一章 线性离散随机系统模型

本书以线性离散时不变随机系统为研究对象。所谓时不变(定常)系统是指该系统的模型参数和噪声统计是常量,不随时间变化。本章介绍三类模型:向量 ARMA 模型、传递函数模型和状态空间模型。利用状态空间模型与 ARMA 模型的转化,特别是利用状态空间模型和传递函数模型到 ARMA 新息模型的换接来解决状态和信号估计问题,是现代时间序列分析方法<sup>[1]</sup>的核心思想和关键技术之一。

## 1.1 向量 ARMA 模型

设系统输入  $e(t) \in R^m$  为  $m$  维白噪声,

$$Ee(t) = \mathbf{0}, \quad E[e(t)e^T(j)] = Q\delta_{ij} \quad (1.1.1)$$

其中  $E$  为数学期望号,上角标  $T$  为转置号,  $\delta_{ij} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ , 且输出  $y(t) \in R^m$  与输入  $e(t)$  有关系

$$y(t) + A_1 y(t-1) + \cdots + A_{n_a} y(t-n_a) = C_0 e(t) + C_1 e(t-1) + \cdots + C_{n_c} e(t-n_c) \quad (1.1.2)$$

则称(1.1.2)为向量自回归滑动平均(Autoregressive Moving Average)模型,简称向量 ARMA 模型。其中  $A_i, C_i$  为  $m \times m$  系数阵,即  $A_i, C_i \in R^{m \times m}$ ,  $n_a, n_c$  为阶次,简记(1.1.2)为 ARMA( $n_a, n_c$ )。若  $C_0 = I_m, I_m$  为  $m \times m$  单位阵,  $C_i = \mathbf{0}$ , 则(1.1.2)化为

$$y(t) + A_1 y(t-1) + \cdots + A_{n_a} y(t-n_a) = e(t) \quad (1.1.3)$$

称其为自回归(AR)模型,记为 AR( $n_a$ )。若  $A_i = \mathbf{0}$ , 则(1.1.2)化为

$$y(t) = C_0 e(t) + C_1 e(t-1) + \cdots + C_{n_c} e(t-n_c) \quad (1.1.4)$$

称其为滑动平均(MA)模型,记为 MA( $n_c$ )。



$$\sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} < \infty \quad (1.1.12)$$

显然(1.1.12)成立的充要条件为  $|a| < 1$ 。此时我们有  $A(x) = 1 - ax$  的零点  $x = 1/a$  的绝对值大于1,即  $A(x)$  的零点在单位圆外,且  $y(t)$  为一个平稳随机过程,它的相关函数为

$$R(\tau) = E[y(t)y(t-\tau)] = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} a^{\tau+j} a^j \quad (1.1.13)$$

推广例 1.1.1 的结果,经典时间序列分析<sup>[2]</sup>证明了一般结果:由标量 AR 模型(1.1.3)决定的  $y(t)$  为平稳随机过程的充要条件为以  $q^{-1}$  为自变量的多项式  $A(q^{-1})$  的零点全位于单位圆外。

**【定理 1.1.1】** 若以  $q^{-1}$  为自变元的多项式  $\det A(q^{-1})$  的所有零点在单位圆外,则由向量 AR 模型(1.1.3)决定的  $y(t)$  是平稳时间序列,且可表为均方收敛的级数

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j e(t-j) \quad (1.1.14)$$

其中  $m \times m$  系数阵  $G_j$  可递推计算为

$$G_j = -A_1 G_{j-1} - \cdots - A_n G_{j-n}, \quad j = 1, 2, \cdots \quad (1.1.15)$$

带  $G_0 = I_m$ , 且规定  $G_j = 0 (j < 0)$ 。

**证明** 由(1.1.6),  $y(t)$  可表为

$$y(t) = A^{-1}(q^{-1})e(t) = \frac{\text{adj}A(q^{-1})}{\det A(q^{-1})}e(t) \quad (1.1.16)$$

记  $y(t) = [y_1(t), \cdots, y_m(t)]^T$ ,  $e(t) = [e_1(t), \cdots, e_m(t)]^T$ , 并且记  $\text{adj}A(q^{-1}) = (\bar{a}_{ij}(q^{-1}))$ , 则分量  $y_i(t)$  可表为

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\bar{a}_{ij}(q^{-1})}{\det A(q^{-1})} e_j(t) \quad (1.1.17)$$

注意<sup>[3]</sup>,  $y(t)$  可展为均方收敛的级数(1.1.14)等价于每个分量  $y_i(t)$  可展为均方收敛的级数。由(1.1.17), 这等价于假设  $\det A(q^{-1})$  的所有零点在单位圆外。比较(1.1.14)和(1.1.16)的第一个等式可得关系

$$A(q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} G_j q^{-j} = I_m \quad (1.1.18)$$

用比较上式两边  $q^{-j}$  的系数阵方法可得(1.1.15)。  $\square$

【注】  $\det A(q^{-1})$  的零点在单位圆外叫 AR 模型的平稳性条件, 此时称多项式矩阵  $A(q^{-1})$  是稳定的。特别对纯量 AR 模型 ( $m = 1$ ), 平稳性条件简化为多项式  $A(q^{-1})$  的零点在单位圆外, 即多项式  $A(q^{-1})$  是稳定的。

### 1.1.2 向量 MA 模型的可逆性

在什么条件下向量 MA 模型(1.1.4) 中的白噪声  $e(t)$  可通过  $y(t)$  的均方收敛的级数表示? 这是可逆性问题。为了寻求可逆性条件, 考虑如下启发性例子。

【例 1.1.2】 考虑纯量 ( $m = 1$ ) MA(1) 模型

$$y(t) = (1 - cq^{-1})e(t) \quad (1.1.19)$$

其中  $e(t)$  是零均值、方差为  $\sigma_e^2$  的白噪声,  $c$  为参数。显然  $y(t)$  为平稳随机过程, 它有相关函数

$$R(\tau) = E[y(t)y(t-\tau)] = \begin{cases} \sigma_e^2(1+c^2), & \tau = 0 \\ c\sigma_e^2 & , \tau = \pm 1 \\ 0 & , \text{其他 } \tau \end{cases} \quad (1.1.20)$$

由(1.1.19),  $e(t)$  可形式地表为

$$e(t) = \frac{1}{1 - cq^{-1}}y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c^j q^{-j} y(t) \quad (1.1.21)$$

即

$$e(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c^j y(t-j) \quad (1.1.22)$$

此级数均方收敛的充要条件是当  $k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{j=k}^n c^j y(t-j)\right]^2 &= \sum_{j,s=k}^n c^j c^s R(s-j) \leq R(0) \sum_{j,s=k}^n |c^j| |c^s| = \\ &R(0) \left(\sum_{j=k}^n |c^j|\right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

而(1.1.23)成立的充要条件为  $|c| < 1$ , 此时  $C(q^{-1}) = 1 - cq^{-1}$  的零点  $q^{-1} = 1/c$  的绝对值大于1, 位于单位圆外。因此, MA(1) 可逆性条件为  $C(q^{-1})$  的零点在单位圆外。将它推广到一般情形有如下定理。

**【定理 1.1.2】** 若以  $q^{-1}$  为自变元的多项式  $\det C(q^{-1})$  的所有零点在单位圆外, 则 MA 模型(1.1.4) 是可逆的, 即  $e(t)$  可表为均方收敛的级数

$$e(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j y(t-j) \quad (1.1.24)$$

其中  $m \times m$  系数阵  $\Pi_j$  可递推计算为

$$\Pi_j = -C_1 \Pi_{j-1} - \dots - C_n \Pi_{j-n} \quad (1.1.25)$$

式中  $\Pi_0 = I_m$ , 规定  $\Pi_j = \mathbf{0} (j < 0)$ 。

证明 类似于定理 1.1.1 的证明, 从略。 □

**【注】** 对纯量 ( $m = 1$ ) MA 模型(1.1.4), 平稳性条件为多项式  $C(q^{-1})$  的零点全在单位圆外。

### 1.1.3 向量 ARMA 模型的平稳性和可逆性

在什么条件下 ARMA 模型(1.1.2) 中的  $y(t)$  可通过  $e(t)$  的均方收敛的级数表示? 因而  $y(t)$  是平稳随机过程, 在什么条件下  $e(t)$  可通过  $y(t)$  的均方收敛的级数表示? 这就是平稳性和可逆性问题。为了引出平稳性和可逆性条件, 考虑如下简单例子。

**【例 1.1.3】** 考虑纯量 ( $m = 1$ ) ARMA(1,1) 模型

$$(1 - aq^{-1})y(t) = (1 - cq^{-1})e(t) \quad (1.1.26)$$

其中  $e(t)$  为零均值、方差为  $\sigma_e^2$  的白噪声,  $a, c$  为参数,  $y(t)$  可形式地表为

$$y(t) = \frac{1 - cq^{-1}}{1 - aq^{-1}} e(t) \quad (1.1.27)$$

进而可形式地表为

$$y(t) = \frac{1}{1 - aq^{-1}} e(t) - \frac{cq^{-1}}{1 - aq^{-1}} e(t) =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{-j} e(t) - c \sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{-(j+1)} e(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (a^j - ca^{j-1}) e(t-j) \quad (1.1.28)$$

其中规定  $a^i = 0 (i < 0)$ 。上式均方收敛, 当且仅当  $|a| < 1$ , 即  $A(q^{-1}) = 1 - aq^{-1}$  的零点  $q^{-1} = 1/a$  在单位圆外。类似地, 当  $|c| < 1$  时,  $e(t)$  可表为均方收敛级数

$$e(t) = \frac{1 - aq^{-1}}{1 - cq^{-1}} y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (c^j - ac^{j-1}) y(t-j) \quad (1.1.29)$$

其中规定  $c^i = 0 (i < 0)$ , 当且仅当  $C(q^{-1}) = 1 - cq^{-1}$  的零点  $q^{-1} = 1/c$  在单位圆外。

推广上述结果到一般情形有如下定理。

**【定理 1.1.3】** 向量 ARMA 模型 (1.1.2) 的平稳性条件为  $\det A(q^{-1})$  的所有零点在单位圆外, 可逆性条件为  $\det C(q^{-1})$  的所有零点在单位圆外。此时  $y(t)$  可表为均方收敛的级数

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j e(t-j) \quad (1.1.30)$$

因而  $y(t)$  是平稳随机过程, 且  $e(t)$  可表为均方收敛的级数

$$e(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j y(t-j) \quad (1.1.31)$$

其中  $m \times m$  系数阵  $G_j$  和  $\Pi_j$  可递推计算为

$$\begin{aligned} G_j &= -A_1 G_{j-1} - \cdots - A_{n_a} G_{j-n_a} + C_j, \\ \Pi_j &= -C_1 \Pi_{j-1} - \cdots - C_{n_c} \Pi_{j-n_c} + A_j \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

其中  $G_0 = C_0, \Pi_0 = I_m$ ; 规定  $G_j = \mathbf{0} (j < 0), \Pi_j = \mathbf{0} (j < 0), C_j = \mathbf{0} (j > n_c), A_j = \mathbf{0} (j > n_a)$ 。

**证明** 平稳性和可逆性条件可用类似于定理 1.1.1 和例 1.1.3 的方法推导。由 (1.1.6) 有

$$\begin{aligned} y(t) &= A^{-1}(q^{-1}) C(q^{-1}) e(t), \\ e(t) &= C^{-1}(q^{-1}) A(q^{-1}) y(t) \end{aligned} \quad (1.1.33)$$



比较(1.1.30)和(1.1.33),比较(1.1.31)和(1.1.33),有恒等式

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} G_j q^{-j}, A(q^{-1}) = C(q^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j q^{-j} \quad (1.1.34)$$

用比较上式每个等式两边  $q^{-j}$  的系数阵方法得(1.1.32)。□

**【注1】** 对纯量( $m = 1$ )ARMA模型(1.1.2),平稳性条件为以  $q^{-1}$  为自变元的多项式  $A(q^{-1})$  的零点全位于单位圆外,可逆性条件为多项式  $C(q^{-1})$  的零点全位于单位圆外。

**【注2】** 满足向量ARMA模型(1.1.2)的随机过程  $y(t)$  称为向量ARMA过程。若  $A(q^{-1})$  是稳定的,则称其为平稳的,若  $C(q^{-1})$  是稳定的,则称其为可逆的。

**【例1.1.4】** 考虑  $m$  维向量AR(1)模型

$$y(t) = \Phi y(t-1) + e(t) \quad (1.1.35)$$

其中  $e(t)$  为零均值、方差阵为  $Q_e$  的白噪声,  $\Phi$  为  $m \times m$  阵。平稳性条件为关于  $q^{-1}$  的方程  $\det(I_m - q^{-1}\Phi) = 0$  的所有根位于单位圆外。这等价于关于  $\lambda$  的特征方程  $\det(\lambda I_m - \Phi) = 0$  的所有根在单位圆内,即  $\Phi$  的特征值的绝对值小于1,且为稳定的矩阵,此时  $y(t)$  可表为

$$y(t) = (I_m - q^{-1}\Phi)^{-1} e(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j q^{-j} e(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j e(t-j) \quad (1.1.36)$$

其中利用(1.1.32)可得  $G_j = \Phi^j$ 。

**【例1.1.5】** 考虑纯量非平稳AR(1)模型

$$y(t) = y(t-1) + e(t) \quad (1.1.37)$$

其中  $e(t)$  是零均值、方差为  $\sigma_e^2$  的白噪声。设初始时刻为  $t_0$ ,  $Ey(t_0) = 0$ ,  $Ey^2(t_0) = P_0$ , 且  $y(t_0)$  独立于  $e(t)$  ( $t > t_0$ )。(1.1.37)是周知的随机游动模型。由于  $A(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$  有在单位圆上的零点  $q^{-1} = 1$ , 故  $y(t)$  为非平稳随机过程。对于  $t > t_0$ , 由(1.1.37)迭代有

$$y(t) = y(t_0) + \sum_{i=1}^{t-t_0} e(t_0+i) \quad (1.1.38)$$