数学概貌丛书

数理逻辑概貌

莫绍揆 著

科学技术文献出版社

数学概貌丛书

数 理 逻 辑 概 貌

莫绍揆 著

科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书向初学者扼要介绍数理逻辑的各部分内容。在逻辑演算中除介绍真值联结词与量词的公理系统外，还介绍了自然推理系统，以冀这个方便的工具可以早日普及。在集合论中介绍了集合论悖论的产生，当初解决悖论的各种尝试，以便读者可以理解现在的公理集合论的来龙去脉。递归论中除介绍各种重要的递归函数类外，着重指出各种推广的重要应用。证明论中介绍数学基础方面的各个派别以及不完全性定理，它指导着证明论的发展趋向。在模型论中除介绍一些重要的定理外，着重介绍非标准模型的出现，这是近代数理逻辑的一个新奇点。本书是一本科普读物，可供没有经过正规数学训练的初学者阅读和参考。

数学概貌丛书

数 理 逻 辑 概 貌

莫绍揆　著

*

科学技术文献出版社出版

（北京市复兴路 15 号）

上海市新华印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 850×1156　1/32　印张 2　字数 35,000

1989 年 3 月第 1 版　1989 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—4,000

定价：0.96 元

ISBN 7-5023-0661-7/O·51

目　　录

数理逻辑是用数学方法（主要是建立符号体系的方法）来研究推理过程的科学．在古代，亚里斯多得(Aristotles)已经比较详细而有系统地研究过推理过程（主要见于他所著的《工具论》），这便是古代的形式逻辑学．在亚里斯多得的工作中，已经有关于命题联结词以及有关量词的一些理论．随着近代数学的发展，不但提供了建立符号体系的方法，而且有关命题联结词与量词的使用也大大突破了古代的研究范围，于是，新逻辑学的发生不但有其必要，也有其可能了．

数理逻辑的创始人，一般当推莱布尼茨(G. W. Leibniz)，他强调逻辑学学习数学的必要，而且也零星地从事一些新逻辑的建立工作．其次是布尔(G. Boole)，他实质上已建立了命题演算．第三是弗雷格(G. Frege)，他不但正式建立了命题演算，且引入量词，实质上建立了谓词演算系统．更主要的是，他从集合论来推导自然数论．虽则他的集合论是素朴的，但开创了数理逻辑发展的主要方向．与他同时，以及稍后不久，皮尔斯(C. S. Peirce)、皮亚诺(G. Peano)以及罗素(B. A. W. Russell)，便把数理逻辑发展成熟了．可以说，到了罗素时，数理逻辑的基础部分——逻辑演算，已经告成．

二十世纪以后，经过数理逻辑学家的努力，数理逻辑在其基础之上，又发展了四大分支

其一是集合论（素朴）集合论本身有矛盾，如何克服其矛盾，是数理逻辑的一大问题.对此，大家议论纷纷，这也就促进了它的发展.此外，尽管集合论的诗论未能得到大家一致同意的解决办法，但各支数学都逐渐地大量地使用集合论的概念及其成果，使集合论事实上成为数学的基础，这也促进了它的发展.

其二是递归论.在解决诗论的讨论中，大家看到了能行性的重要.一条存在定理，其不提供寻找该根方法的证明，是与提供寻找方法的证明有着明显的差别的.对能行性的研究，便导致递归论的进展.

其三是证明论.这是直接证明数学的融贯性（不矛盾性），从而解决由集合论诗论所引起的危机.证明论的发展，后来在许多方面有其用处.

其四是模型论.为数学理论建立模型，从而研究数学理论的特性.这是最新的一个分支，其研究也最活跃.

一、逻辑演算

现在我们先介绍逻辑演算.演算分两个部分：命题演算与谓词演算.

什么叫做命题呢？可以说，表示一个个体具有什么

性质，或表示某些个体之间具有什么关系的，便是命题。这时，我们将把命题分成更基本的、更简单的成分，即个体与性质、关系(合称谓词)。但是，在命题演算中，人们经常对命题不再进行分析(而把它作为基本要素)，上面的回答便不合适了。这时只能作如下的回答，日常语言中的句子，如果它可以取得真或假值，便叫做**命题**。因此，大体说来，陈述句如

今天下雨，

3 大于 2 而小于 5

便是命题，而命令句或祈求句如

(你)快离开这里！(命令句)

但愿他能悬崖勒马！(祈求句)

便不是命题。有个别数理逻辑家认为，"命题"实质上就是真或假，是真值(假值)的各种不同的表示形式。这种说法把命题限于真、假值，而抹杀其内容含意，是不可取的，也很少得到别的数理逻辑家的赞同。

不过，在命题演算里，我们只注意命题的真、假值，对它们的内容含意故意暂时忽略，暂不考虑。

我们虽然对命题暂不分析成更简单的成分，但我们却往往把一些命题合并而组成更复杂的命题。这时我们要使用命题联结词。由于我们对命题只考虑其真、假值，对命题联结词我们也只考虑它们把怎样的真、假命题变成怎样的真、假命题。换句话说，我们把命题联结词看作以{真，假}为定义域而以{真，假}为值域的函数，也叫做**真值函数**。

我们经常使用的命题联结词有五个.

1. **非**,记为$\neg$. 它把命题 A 变成$\neg A$(非 A). 当 A“假”时 $\neg A$ “真”;而当 A “真”时 $\neg A$ “假”. $\neg$又叫做**否定词**.

2. **且**,记为$\wedge$. 它把命题 A、B 变成$A\wedge B$ (A 且 B). 当 A、B 均“真”时, $A\wedge B$“真”; 此外情况 (即 A、B 中至少有一为假时)便 $A\wedge B$“假”. $\wedge$又叫做**合取词**, 而 A、B 叫做合取式 $A\wedge B$ 的因子.

3. **或**,记为$\vee$. 它把命题 A、B 变成 $A\vee B$ (A 或 B). 当 A、B 有一为“真”时,$A\vee B$“真”,此外情况(即A、B 均假时)便 $A\vee B$“假”. $\vee$又叫做**析取词**, 而 A、B叫做析取式 $A\vee B$ 的项. 按这里的定义, 当 A、B 均真时, $A\vee B$ 为真,亦即$\vee$是可兼的‘或’,日常语言中亦经常使用不可兼的‘或’,即只当 A、B 一真一假时,‘A 或B’为真,而 A、B 均假或 A、B 均真时 ‘A 或 B’为假. 这样的‘或’不能表为$\vee$,而应表为‘ A、B 有一成立也只有一成立’.应用上文介绍过的符号,亦可表为

$$(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B).$$

4. **如果…则**,记为$\rightarrow$. 它把命题 A、B 变成 $A\rightarrow B$ (如果 A 则 B).当A“真”而 B“假”时,$A\rightarrow B$ 为假; 此外情况(即非 A 与 B有一为真时)便 $A\rightarrow B$为“真”. $\rightarrow$叫做**蕴涵词**,$A\rightarrow B$ 叫做**蕴涵式**,A 叫做该蕴涵式的**前件**, 而 B 叫做其**后件**.按这里的定义,非 A 真(即 A假)时, $A\rightarrow B$ 必真,B 真时 $A\rightarrow B$ 也真.从而下列的蕴涵式都是真的蕴涵式:

如果雪是黑的,则 3 大于 2 .(前件假,后件真)

如果雪是黑的,则 3 小于 2 .(前后件均假)

如果雪是白的,则 3 大于 2 .(前后件均真)

只有下列的蕴涵式才是假的:

如果雪是白的,则 3 小于 2.(前件真而后件假)

这样的规定似乎包括得太广了一些，与通常的蕴涵词(如果…则…)的用法不太符合，但根据它来作推理却是没有毛病的，而且根据经验，比用别的蕴涵词更为方便.

5. **恰当**,记为↔. 它把命题 A、B 变成 $A\leftrightarrow B$(A 恰当 B). ↔叫做**等价词**(或**等值词**), $A\leftrightarrow B$ 叫做**等价式**, A、B 叫做它的两边(或两端). 当 A、B 同为真或同为假时, $A\leftrightarrow B$ 为真，此外情形(即 A、B 一真一假时)便 $A\leftrightarrow B$ 为假. 由此可知,当 A、B 一真一假时, $\neg(A\leftrightarrow B)$为真,亦即“不可兼的 A 或 B”恰可表为 $\neg(A\leftrightarrow B)$. (这是又一个表示式)

以上五个命题联结词,是最常用的联结词. 日常所用的别的联结词,只要是真值函数,都可用这五个联结词来表示. 例如,

既…又…	他既聪明又用功(可表为∧)
不是…就是…	不是前进就是后退(可表为∨)
除非…否则…	除非他来否则我不去(我去→他来)
要…必须…	要我去必须他来(我去→他来)

等等,其实,只使用下列三组之一亦就够了. 因为,极易验证(只须验证 A、B [illegible]为假,共四个情况即够):

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A).$$

故$\leftrightarrow$可用$\wedge$与$\to$表示，此外，

$$A \vee B = \neg A \to B = \neg(\neg A \wedge \neg B),$$

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \to \neg B),$$

$$A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B).$$

因此，靠$\neg$的帮助，可用$\vee$而表示$\wedge$及$\to$，用$\wedge$而表示$\vee$及$\to$，用$\to$而表示$\vee$及$\wedge$. 在讨论推导过程时，使用$\neg$与$\to$最方便；但在别的情况，则兼使用$\neg \vee \wedge$最方便，这时虽然使用了三个基本符号，但各表达式既简单又对称.

还可指出，$\vee$与电路上的并联相当，而$\wedge$与电路上的串联相当. 对电子技术而言，$\vee$相当于“或”门，而$\wedge$相当于“与”门（“或”门“与”门的名称，其实就是从逻辑中借用而得）. 因此，命题演算可以广泛地应用于电路、网络以及电子技术方面. 这时，同时使用$\neg \vee \wedge$三种联结词就显得其重要了.

凡不能再分解成由一些小命题利用命题联结词而组成的命题，就叫做**原子命题**. 在命题演算中，将用命题符号或命题变元而表示. 命题符号及其否定可以叫做**简单命题**. 简单命题的合取（析取）式叫做**简单合取（简单析取）式**. 由简单合取（析取）式再作析取（合取），所得便叫做**析合（合析）范式**. 命题符号可用大写拉丁字母 A、B、C 等表示.

例如，A 及 $\neg B$ 便是简单命题. $(A \wedge \neg B) \wedge C$ 便是简单合取式，$(A \vee B) \vee \neg C$是简单析取式. 而$((A \wedge \neg B) \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$是析合范式.

如果对一个复合命题中出现的不同命题符号任意地赋以“真”或“假”值(或叫做指派以真假值)，按其中的命题联结词的意义进行运算，整个复合命题便必然取得“真”或“假”以为值，这值叫做在相应的赋值(或指派)之下该复合命题所取得的值.视其值为“真”或“假”,该赋值(指派)便叫做该复合命题的**成真**或**成假赋值**(**指派**).

一般说来,一复合命题可以有多个成真指派,也可以有多个成假指派. 但是，简单合取式至多只有一个成真指派,简单析取式至多只有一个成假指派. 例如,

简单合取式 $A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D$ 的唯一成真指派为 (A, B, C, D) 取值(真,假,假,真). 别的指派均是成假的;

简单析取式 $A\vee\neg B\vee\neg C\vee D$ 的唯一成假指派为 (A, B, C, D)取值(假,真,真,假). 别的指派均是成真的.

极易设法使得成真指派与简单合取式一一对应，而成假指派与简单析取式一一对应.

明白这点以后，任意一个复合命题都可以表示成合析范式,亦可以表示成析合范式.其办法是:

找出该复合命题的一切成真指派，再写出每个成真指派相对应的简单合取式,将这些简单合取式再作析取,所得便是该复合命题的析合范式.

找出该复合命题的一切成假指派，再写出每个成假指派相对应的简单析取式,将这些简单析取式再作合取,所得便是该复合命题的合析范式.

还须注意，如果该复合命题没有成真指派，则取 $A \wedge \neg A$ 作为它的合析范式及析合范式，如果它没有成假指派，则取 $A \vee \neg A$ 作为它的析合范式及合析范式.

没有成假指派的复合命题又叫做重言式. 对其中的命题符号，不论指派以怎样的真、假值，它永取得真值. 这种复合命题便是逻辑规律.

没有成真指派的复合命题也叫做**矛盾式**，或**自相矛盾式**.

根据重言式(逻辑推理)而作的推理，亦即对其中的命题只根据命题联结词而考虑，不再深入到命题的更细致的结构，这便是最简单的推理. 这种推理在日常中也应用得很广，我们不应忽视.

根据数理逻辑的研究，重言式可归结为下列的公理系统，即整个重言式恰巧就是可由下公理系统所推得的一切公式.

重言式的公理系统

组成部分：命题符号，用 A, B, C …(或附下标) 表示。

公式：(1) 命题符号为公式.

(2) 如果 α 为公式，则 $\neg\alpha$ 为公式.

(3) 如果 α、β 为公式，则 $\alpha \vee \beta$、$\alpha \wedge \beta$、$\alpha \rightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta$ 亦为公式.

(4) 所谓公式，仅限于由(1)～(3)而得的.

推理部分：公理. 具有下列十一种类型的公式叫做公理.

(1) $\alpha\to(\beta\to\alpha)$,

(2) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$,

(3) $(\neg\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\neg\beta)\to\alpha)$,

(4) $(\alpha\wedge\beta)\to\alpha$,

(5) $(\alpha\wedge\beta)\to\beta$,

(6) $\alpha\to(\beta\to(\alpha\wedge\beta))$,

(7) $\alpha\to(\alpha\vee\beta)$,

(8) $\beta\to(\alpha\vee\beta)$,

(9) $(\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\vee\beta)\to\gamma)$,

(10) $(\alpha\leftrightarrow\beta)\to((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha))$,

(11) $((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha))\to(\alpha\leftrightarrow\beta)$.

推理规则：只有一条，即分离规则：

$$\alpha\to\beta,\ \alpha\vdash\beta$$

（即：由 $\alpha\to\beta$ 与 α 可以推得 β）.

注意：这里不使用代入规则，因为公理中的 α、β 不是命题符号或命题变元，而可以是复杂的公式．亦即我们已对公理作了代入，把代入结果所得的公式都叫做公理了．

根据数理逻辑的研究，这种推理还可表述成下列的形式，叫做自然推理系统（的命题演算部分）．

自然推理系统

甲 1. 在任何一步均可引入一个假设，引入之后到消去假设前，所推得的结果都依赖于所引入的假设．

注意：理论上说，可随意引入假设，但实际上，所引入假设可只限于

(1) 待证公式中出现的蕴涵式的前件．例如，如想

证$((A\to B)\to A)\to A$，可引入假设 $A, A\to B, (A\to B)\to A$ 中的任意一个，因为它们都是待证公式中蕴涵式的前件（当然，引入哪一个，在哪一步引入，须看具体情况决定）。这样的假设叫做当然假设。

(2) 待证公式中出现的蕴涵式的后件的反面（即，当后件为B时，引入假设 $\neg B$；当后件为 $\neg B$ 时，引入假设 B）。这样的假设叫做反证假设。我们希望引入这样的反证假设后，可引起矛盾，从而把引入的假设否定之。

(3) 如果推出 $A\vee B$，则可先引入假设 A，推到一定地步后消去假设 A，再引入假设 B，推到一定地步后再消去假设 B。这两个假设叫做穷举假设。它相当于，我们已经知道或A或B时，可假设A而看其后果如何，再假设B而看其后果如何（假设A与假设B不能联合使用）。

除却上面三种假设外，我们不引入别的假设。

引入假设后，由甲 2 及戊 1 告诉我们如何消去假设。一般说来，当然假设及穷举假设用甲 2 方式消去，而反证假设用戊 1 方式消去。

甲 2. 如果在假设A之下推得一公式 B，则 $A\to B$ 不依赖于假设 A。我们说已得依赖于A的B后，可消去假设A而得 $A\to B$。

乙 1. 由 $A\wedge B$ 可推得 A，亦可推得 B。

乙 2. 由 A, B 可推得 $A\wedge B$。

丙 1. 由A可推得 $A\vee B$，亦可推得 $B\vee A$。

丙 2. 由 $A\vee B$, $A\to C$, $B\to C$ 可推得 C。

丁 1. 由 $A\leftrightarrow B$ 可推得 $A\to B$，亦可推得 $B\to A$。

丁 2. 由 $A\to B$, $B\to A$ 可推得 $A\leftrightarrow B$。

注意： 比较乙与丁，可见 $A\leftrightarrow B$ 实际上和 $(A\to B)$

$\wedge(B\to A)$无殊．如果采用定义：$A\leftrightarrow B$指$(A\to B)\wedge(B\to A)$，那末由这定义及乙1，乙2便可推得丁1，丁2了．

戊1． 由矛盾（即由A及$\neg A$）可消去前面任一个假设．当消去假设B时可得$\neg B$，当消去假设$\neg B$时可得B．

换句话说，如果由B而推得矛盾，则可得$\neg B$；如果由$\neg B$而推得矛盾，则可推得B．

自然推理系统显然与我们日常使用的推理过程非常相似．这也表明了命题演算的确是我们日常的推理过程的总结．

每个公理系统都需受到三个方面的检查．

第一、**融贯性（不矛盾性）**．即由该公理系统不致于推出两个互相矛盾的命题来，即没有A使得A与$\neg A$同可推出．我们公理系统所推出的全是重言式．而A与$\neg A$不可能同是重言式，当然不能两者都推出．

第二、**完备性**．即我们所希望推出的全部都能推出．在这里，我们希望推出全部重言式，这已经证明是满足的．而我们还有更强的完备性．即任意取一个我们公理系统所不能推出的公式，如果把同类型的一切公式加入，作为公理，则将可以推出一切公式，从而整个系统变成毫无意义的了．这便表明本公理系统已经尽可能地推出尽可能多的公式了．这是又一种完备性，叫做**绝对完备性**．

第三、**独立性**．即在我们公理系统中如删去任何一条公理，都将不能推出全部原来所能推出的公式．这种独立性是可取的，但不是必须的．有时为了种种原因，我们

多列几条公理以便于推导，这时便只好牺牲独立性了. 在我们的系统中，独立性亦是有的，今不详细论证.

现在再说逻辑演算的第二部分：谓词演算.

这里，我们首先要对以前的简单命题加以分析.

固定逻辑的论域，论域中的元素叫做个体，另外有两种函数，它们都以论域为定义域，其中以真、假为值域的叫做**谓词**，仍以论域为值域的叫做**函数**（或强调地，叫做**项值函词**）. 谓词作用于个体时，所得的叫做**公式**，函词作用于个体时，所得叫做**项**. 一般，函词又叫做函数.

为确定起见，我们暂时以自然数域作为论域，从而其个体便是各个自然数. 这时，

“为素数”，“大于”，“整除”便是谓词，

“3为素数”，“4大于 y”，“a 整除 b”便是公式.

当公式中的变元代入以具体的自然数时便得命题（或真或假）. 例如“3为素数”为真，而“4 大于 5”为假，等等.

“的平方”，“的最大公约数”，“的 3 倍”便是函数，

“x 的平方”，“x 与 y 的最大公约数”，“m的 3 倍”便是项. 项中的变元代以具体的自然数时，便得出一个自然数以为值. 例如，“3 的平方”便是 9，“6与 8 的最大公约数”便是2，等等.

注意，谓词与前面的命题联结词不同，虽则两者同以真、假为值，但谓词以论域作为定义域，而命题联结词则以{真，假}作为定义域，两者截然不同.

在谓词中，二元谓词“等于”，非常重要. 它是纯逻辑谓词（别的谓词都不是纯逻辑谓词）. $x=y$ 真当且仅当 x

与 y 是同一个体.

除对命题进一步分析为谓词与个体以外，谓词演算还有另一个新内容，而且是更重要的新内容，那就是我们还引入量词与摹状词. 有了这两者以后，可以说，日常用语以及一切数学推理都可以表达了.

量词共有两个，一是**全称量词**，记为 $\forall$，读作"所有的"、或"每个"、或"一切"；另一个是**存在量词**，记为 $\exists$，读作"有一个"、"有些"、"至少有一个"，等等.

在某一方面看来，量词很似个体，当谓词作用于它时便得出一命题. 例如，试以 $P(x)$ 表示谓词"x 为奇数"，则

3 为奇数	可记为	$P(3)$，(真)
一切数为奇数	可记为	$P(\forall)$，(假)
有些数为奇数	可记为	$P(\exists)$，(真)

它们都是命题. 从这一点看来，量词和个体本质相同，都被谓词作用而得一命题(亦即填到谓词的空位处去后，便得一个命题).

但是，细究起来，不但意义上量词绝非个体，而且谓词作用于量词时，所服从的规律也与谓词作用于个体时截然不同。

第一　谓词作用于量词时不能深入，而谓词作用于个体时一定可以深入. 例如，设 $P(x)$ 表示 x 为奇数，就个体而言，

(1) $\neg(P(3))$　并非 3 为奇数　(假)

(2) $(\neg P)(3)$　3 为非奇数　(假)