比例计算

BI LI JI SUAN

上海人民出版社

比 例 计 算

刘 春 舫 编

上 海 人 民 出 版 社

比 例 计 算

刘春舫 编

上海人民出版社出版
（上 海 绍 兴 路 5 号）
新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 1.75 字数 37,000
1976 年 1 月第 1 版 1976 年 1 月第 1 次印刷

统一书号：7171·724 定价：0.13 元

比例计算

目　录

一、比和比例

1. 比的意义

“有比较才能鉴别。”在三大革命实践中，经常要用到比较的方法. **“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”**①，为了从数量关系上反映三大革命中各种事物的比较结果，人们使用着不同的数学比较方法.

例1 红星农场“五·七”连队1974年种植双季稻面积为542亩，1975年计划种植700亩，1975年与1974年相比，这个连队双季稻种植面积增加了多少亩？

解 使用减法来比较，

$$700-542=158(\text{亩}).$$

例2 双曲拱桥的拱肋曲线，通常都呈二次曲线的形式. 但有的桥较坦，有的桥较陡. 工程上用矢跨比来比较桥型的坦、陡. 所谓矢跨比，就是

$$\text{矢跨比}=\frac{\text{矢高}}{\text{跨径}}.$$

矢跨比越大，桥越陡；矢跨比越小，桥越坦(图1). 当矢高是4米，跨径是38米时，矢跨比是

$$\frac{4}{38}=\frac{1}{9.5}.$$

---

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页.

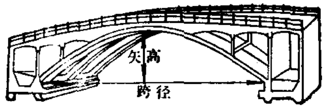

图 1

在工程技术中，矢跨比$\frac{1}{9.5}$也常常写成

$$1:9.5.$$

这个式子表示"两数相比"，简称为比．其中":"称为比号，1是前项，9.5是后项．比是一个算式，它的意义是前项除以后项；或者说，它相当于一个前项作分子，后项作分母的分数．例如，

$$1:9.5=1\div9.5=\frac{1}{9.5}.$$

一般地说，如果a、b是正数，那就可以把

$$a\div b=k \quad 或 \quad \frac{a}{b}=k$$

写成

$$a:b=k.$$

实际经验告诉我们，一座桥跨度越大，矢高越小，桥就越坦，反之，桥就越陡．可见，把一座桥本身的跨度与矢高数值相比较，来看一座桥的坦陡，是有道理的．问题是怎样比较．**"马克思主义的最本质的东西、马克思主义的活的灵魂：具体地分析具体的情况。"**①例2和例1的情况不同，用跨度减去矢高的方法，就不能比较桥的坦陡了．例如，对于矢高是7米，跨径是42米的拱桥来说，跨度与矢高之差为

$$42-7=35,$$

① 列宁：《〈共产主义〉》·《列宁选集》第4卷，人民出版社1972年版，第290页．

和例 2 的跨度与矢高之差

$$38-4=34$$

相差不多，但坦、陡却显然不同：它的矢跨比为

$$7:42=\frac{7}{42}=\frac{1}{6},$$

较之 $\frac{1}{9.5}$ 要大. 可见，用矢高“比”跨径的方法比较桥的坦陡就很有效. 在这本小册子里，我们要谈谈“比”这个数学方法及其应用.

我国古代很早就有了比、比例的概念和算法.《九章算术》是总结古代劳动人民数学成就的一部古算书，其中大量记载了农副业生产、水土工程、贸易交换中提出的比例问题. 汉武帝时，实行著名法家桑弘羊提出的“均输法”——以道路远近为反比，以户数多少为正比来征收赋税，《九章算术》中就详述了“均输”的数学方法. 从《九章算术》及其注解来看，虽然比例不外是除法的应用，但由于比例突出了“成比例”和“归一”的思想，使得一大类实际问题的解法趋于简单. 比例的算法在《九章算术》中已高度成熟，并占有重要的地位，以至后世一直沿用不衰.

今天，在工农业生产中，“成正比”、“成反比”是我们常用的语言，“按比例分配”，“按比例求……”是常遇到的计算问题. 因此，在学了整数四则和分数四则的基础上，学习、熟悉比例的内容，是有必要的；对于分析、解决许多实际问题，也是有帮助的.

2. 比的性质

两数相比相当于两数相除. 因为两数相除的结果，可用

分数表示，所以，两数之比和分数可以互化．也就是说，有

$$a:b=\frac{a}{b} \quad 和 \quad \frac{a}{b}=a:b.$$

除法、分数、比三者的内在联系，可以列成图 2.

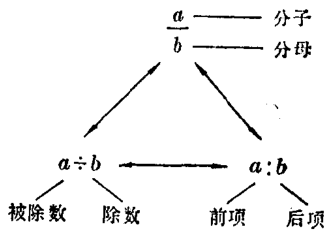

图 2

既然比和分数都是两数相除的不同表示形式，因此从分数的基本性质可以得到比的基本性质：比的前项和后项同乘或同除以一个不等于零的数，比的值不变．用算式表示，就是

$$a:b=am:bm,$$

$$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m},$$

其中 m 不等于零．应用比的基本性质，可以化简已知比．

例 3 车床是用电动机通过一套变速装置来带动车头转动的(图 3)．电动机每分钟 1440 转，C620-1 车床加工某螺纹时要使车头转速为每分钟 120 转，试求出电动机转速与车头转速之比．

解 电动机与车头转速之比为

$$1440:120.$$

把前项和后项都除以 120，就有

$$1440:120=\frac{1440}{120}:\frac{120}{120}=12:1.$$

即电动机与车头转速之比为 12:1.

应用比的基本性质，还可以把比化成前项是 1 的形式.

例 4 某双曲拱桥的矢高为 4.2 米，跨径为 40 米，求矢跨比.

解 矢跨比＝矢高:跨径

$$=4.2:40$$

$$=\frac{4.2}{4.2}:\frac{40}{4.2}$$

$$\approx 1:9.5.$$

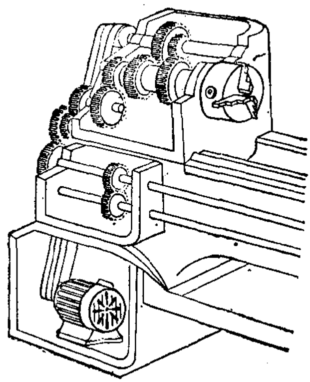

图 3

3. 比　例

比的基本性质，是用下面的式子来表达的：

$$a:b=am:bm,$$

$$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}. \qquad (m\neq 0)$$

这里，可看成两个比被等号联结起来，这种等式称为比例式，简称为比例. 在数学上，比是代数式的一种，而比例则是一个等式. 因此，比和比例是两个不同的数学概念. 但是，在实际工作中，比和比例是密切联系的，比经常是通过比例式来定义的，因此在实际应用时比和比例并不严格区分.

在比例

$$a:b=c:d$$

中，我们称 b 和 c 为内项，a 和 d 为外项，即

$$\underbrace{a:\underbrace{b=c}_{\text{内项}}:d}_{\text{外项}}$$

在比例 $4.2:10.50=1:2.5$ 中，把内项相乘，得

$$10.50\times 1=10.50,$$

把外项相乘，得

$$4.2\times 2.5=10.50,$$

即这个比例的两个内项乘积等于两个外项的乘积. 事实上，任何比例都具有这样的性质，下面就来证明这一点.

如果在等式的两边加上(或减去)，乘上(或除以)同一个数(除数不能为零)，这个等式仍然成立. 这是人们从长期的实践中逐步认识的一条重要的规律，可称为式的恒等变换规律. 我们就用这条规律来证明上述性质.

如果比例

$$a:b=c:d$$

是成立的，那么，在等号两边各乘上 bd 后，两边的式子仍然应该相等. 即

$$bd\cdot(a:b)=bd\cdot(c:d),$$

也就是

$$bd\cdot\frac{a}{b}=bd\cdot\frac{c}{d},$$

化简即得

$$ad=bc.$$

这就证明了比例的性质 1：对于任何比例式，它的两个外项乘积等于两个内项乘积.

反过来说，如果某两个数的乘积与另两个数的乘积相等，那么这四个数总可以写成一个比例式. 例如，

$$2\times 6=3\times 4.$$

用左边的两个数作内项，用右边两个数作外项，有

$$3:2=6:4,$$

容易验证,这里的等号确是成立的.

值得注意的是,从 $2\times6=3\times4$ 一式中,还可以再写出下列几个比例式:

$$2:3=4:6,$$
$$2:4=3:6,$$
$$4:2=6:3.$$

容易验证,这几个比例式也都是成立的.仔细观察这几个比例式的结构,可以启发我们得出下列两条性质.

比例的性质 2: 如果 $a:b=c:d$,那么

$$b:a=d:c.$$

即把等号两边的比的前后项各自交换,比例式仍然成立.

比例的性质 3: 如果 $a:b=c:d$,那么

$$a:c=b:d,$$
$$d:b=c:a.$$

即交换内项或交换外项,比例式仍然成立.

这两个性质并不难证明,请读者自己举例验证.

含有未知数的等式叫方程.比例式也是一个等式.如果构成比例式的四个量依赖于一个未知数,这个比例式就是一个方程.适当利用上述性质,可以解算这类方程.

例 5 在一种单因素优选法中,要在长度为 1 单位的线段 AB 上,寻找一个分点 C (图 4),使得

$$AC:CB=CB:AB,$$

怎样确定 C 点?

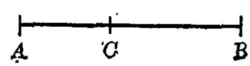

图 4

解 设 $CB=x$,则 $AC=1-x$.已知 $AB=1$,则有

$$(1-x):x=x:1.$$
$$x^2=1-x,$$
$$x^2+x-1=0.$$

这是一个一元二次方程，由求根公式，可以得到下列两个根：

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

x_2 是负数，不合题意，舍去．于是

$$CB=x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618.$$

即分点 C 要选在距离 B 点为 AB 的 0.618 倍处．

4. 比与比例的应用

“马克思主义的哲学认为十分重要的问题，不在于懂得了客观世界的规律性，因而能够解释世界，而在于拿了这种对于客观规律性的认识去能动地改造世界。”比例式及其概念不仅描述了许多数量关系，而且能用来分析解决不少问题．怎样列比例式解算问题呢？下面通过几类实际问题来进行分析．

4.1 坡　比

河道、渠道的岸和底，桥梁的护坡等，都有一定的倾斜程度．这个倾斜度，一般用坡比 i 表示．在图 5 的斜坡中，

$$i=AB:BC.$$

比值 i 本身通常写成比的形式．例如，如果 $AB=3, BC=4.5$，那么

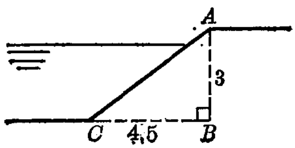

图　5

$$\begin{aligned}i&=3:4.5\\&=\frac{3}{3}:\frac{4.5}{3}\\&=1:1.5.\end{aligned}$$

如果把坡比写成

$$i=1:m,$$

m 就称作坡比系数. 图 5 中的坡比系数就是 1.5.

坡比系数是规划设计河渠时要着重考虑的一个因素. m 的值太小,河岸太陡,容易坍坡; m 太大, 河岸太坦,容易导致河底过窄或河面过宽. 不同规模的河、渠采用的边坡坡比系数通常可取表 1 中的数据.

表 1 不同河、渠的边坡坡比系数

规模	大	中	小
坡比系数	2	1.5	1

例 6 某河道的一个断面,设计如图 6, 试求边桩 B 到中心导线 A 的距离.

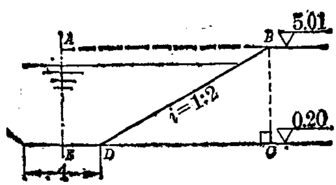

图 6

解 显然,

$$AB=EC=ED+DC.$$

其中 $ED=\frac{1}{2}\times4=2$(米). 余下的问题是要列方程求出 DC.

根据坡比的定义,应有

$$BC:DC=i=1:2.$$

其中高程差

$$BC=5.01-0.20$$
$$=4.90.$$

设 DC 为 x 米,根据坡比的定义则有方程

$$4.90:x=1:2,$$
$$\therefore\quad x=2\times4.90$$
$$=9.80(米).$$

进一步求出

$$AB=2+9.80$$
$$=11.80(米).$$

4.2 秧田比例

例 7 根据去年种植早稻的经验, 12 亩田的秧大约可栽插 72 亩大田. 今年要种 132 亩大田早稻,需秧田多少亩?

解 可以有两种考虑方法.

一种方法：种植 72 亩大田需安排 12 亩秧田，那么 1 亩秧田的秧就可以插 6 亩大田；或者说，种植一亩大田需安排 $\frac{1}{6}$亩秧田. 这个思考过程和计算结果，可以由下面的比例式及化简中反映出来,

$$12:72=\frac{12}{12}:\frac{72}{12}$$
$$=1:6$$
$$=\frac{1}{6}.$$

既然种植 1 亩大田需秧田$\frac{1}{6}$亩,那么种植132亩大田就要

$$\frac{1}{6}\times132=22(亩).$$

式子

$$\frac{1}{6}=12:72$$

包含着"求种1亩大田需秧田多少"这种"归一"的思想. 利用这一思想,可以直接列比例式.

因为72亩大田需12亩秧田,一亩大田需秧田数应为

$$12:72.$$

设132亩大田需x亩秧田,这时,一亩大田需秧田数应为

$$x:132.$$

显然,一亩大田需秧田数只能是同一个数,所以

$$12:72=x:132,$$

$$x=22(\text{亩}).$$

另一种考虑方法: 1亩秧田的秧可插6亩大田, 2亩秧田的秧就应可插12亩大田. 秧田亩数增加几倍,可插大田的亩数也应增加相同倍. 这样,秧田与秧田亩数相比,应该与大田与大田亩数相比的比值相等. 即

$$x:12=132:72.$$

于是

$$72x=12\times132,$$

$$x=22(\text{亩}).$$

这种方法包含着一种"成正比例"的思想: 一个量增加多少倍,另一个量也增加多少倍. 这一点,我们在以后还要详细研究.

这两种方法对于一般的比例问题都可以应用.

许多作物的栽培,要经过育秧阶段,秧田与大田的面积要有适当的比, 才能保证有足够数量的壮苗. 几种主要作物秧田亩数与大田亩数的比,如表2所示.

表 2　主要作物秧田与大田亩数的比例

作　　物	秧田:大田	作　　物	秧田:大田
早稻（三熟茬）	1:5～1:6	单季晚稻	1:5～1:6
早稻（绿肥茬）	1:5～1:6	油　　菜	1:5～1:7
后季稻	1:4～1:5.5	棉花(方格育苗)	1:15

4.3 机械制图的比例

绘制机械图纸时，由于有些零件太大或太小，要把零件的尺寸适当缩小或放大，才能画在一般的图纸上，零件图上某部分尺寸的长度与实物上相应部分尺寸实长的比，称为绘图比例．举例来说，如果一个零件直径为 400 mm，用 100 mm 长度画在纸上，绘图比例就是

$$100:400=1:4.$$

根据机械制图国家标准，应使用下列比例绘制图样(表 3)：

表　3

与实物相同	1:1
缩小的比例	1:2　1:2.5　1:3　1:4　1:5 $1:2\times10^n$　$1:2.5\times10^n$　$1:5\times10^n$
放大的比例	2:1　2.5:1　4:1　5:1 10:1　$(10\times n):1$

例 8　图 7 是一张垫铁的零件图，用 1:2 的比例画成．在绘制时，垫块上的各个尺寸应绘成多长?

解　根据前面的叙述，

图上的尺寸：零件上相应部分的实长＝1:2.

化简一下，得

图上的尺寸$=\frac{1}{2}\times$零件上相应的实长.

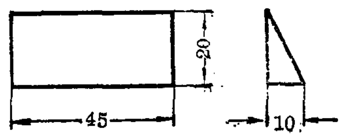

图 7

所以 45 mm，20 mm，10 mm 分别应画成

$$\frac{1}{2}\times 45=22.5(\mathrm{mm}),$$

$$\frac{1}{2}\times 20=10(\mathrm{mm}),$$

$$\frac{1}{2}\times 10=5(\mathrm{mm}).$$

生产队地形平面图绘制的比例，和机械制图的绘制比例意义一样.

例 8 在 1:5000 的生产队平面图上，画上一条 2.2 公里的干渠，应画成多长？（1 公里$=10^5$厘米）

解 设应画成 x 厘米. 因为

$$\text{图距：实距}=1:5000,$$

所以

$$x:2.2\times 10^5=1:5000,$$

$$x=44(\text{厘米}).$$

计算这类问题时，不要忘记应把单位统一.

4.4 锥度、斜度

工业生产中，常遇到圆锥形或部分呈圆锥形的零件. 如圆锥销、锥销孔、车床顶针的锥部等（如图 8）.

锥形零件斜面的倾斜度，通常可用锥度 K 或斜度 M 来表示，可见图 9：