李代数及其表示理论导引

〔美〕J. E. 汉弗莱斯 著

上海科学技术出版社

李代数及其表示理论导引

〔美〕 J. E. 汉弗莱斯 著
陈志杰 译 曹锡华 校

上海科学技术出版社

内容提要

本书介绍了特征数 0 的代数闭域上的半单纯李代数理论，尤其着重于表示理论。作者利用最新的成果处理了李代数的经典理论（包括半单纯李代数的分类定理、同构定理与存在定理）；用初等的李代数方法证明 Cartan 子代数的共轭定理；用公理化方法处理根系及权的理论。着重介绍了半单纯李代数的表示理论。在最后一章介绍了 Chevalley 群的基本知识。本书为美国《研究生数学教材》丛书之一，写得简明扼要，深入浅出，便于阅读。读者只要对线性代数有足够的知识（如特征值、双线性型、欧氏空间及向量空间的张量积等），并对抽象代数的方法有所了解，即可阅读本书的前面几章。本书适合于大学高年级学生以及研究生参考或用作教材，也可供需要应用李代数的读者阅读。

INTRODUCTION TO
LIE ALGEBRAS AND
REPRESENTATION THEORY

J. E. Humphreys

Second Printing, Revised

Springer-Verlag,

New York. Heidelberg. Berlin-1972

李代数及其表示理论导引

〔美〕 J. E. 汉弗莱斯 著

陈志杰 译 曹锡华 校

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 7.25 字数 201,000

1981 年 8 月第 1 版 1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—6,500

书号：13119·815 定价：0.92 元

原　序

本书的意图是向读者介绍特征数为0的代数闭域上的半单纯李代数理论，尤其着重于表示理论。我们假定读者对线性代数(包括特征值，双线性型，欧氏空间以及向量空间的张量积)已有足够的知识，并对抽象代数的方法有所了解．本书的前四章大学优等生就能阅读，但阅读其余三章需有稍高的要求．

半单纯李代数的理论不仅在数学与物理的很多分支中有用，而且还有它内在的魅力，这是因为在它的基本结果中，把深度与完备性令人满意地结合起来了．自从 Jacobson 的书在十年前问世以来，即使在这一理论的经典部分里，也已有了不少改进。我力图把其中的某些改进吸收入本书，并试图使非专门家较易接触本书的主题．对于专家来说，还要特别指出以下几点：

(1) 强调了线性变换的 Jordan–Chevalley 分解，在半单纯的情形，用“环面”子代数代替传统的 Cartan 子代数．

(2) Jordan 子代数共轭定理的证明使用了初等的李代数方法(据 D. J. Winter 和 G. D. Mostow)，避免使用代数几何．

(3) 同构定理先用初等方法证明(定理 14.2)，以后它又作为 Serre 定理(18.3)的推论再次被得到，并且给出了用生成元与关系式的表示．

(4) 从一开始，就在正文与练习中着重突出了型 A, B, C, D 的单纯李代数．

(5) 用公理化方法处理根系(第三章)以及权 (weights) 理论的一部分．

(6) 在 § 23 与 § 24 里采用抽象方法引入 Weyl 特征标公式，它以 Harish–Chandra 的“特征标”理论为基础，且独立于 Freudenthal 的重数公式 (22.3)．这是受到了 D.–N. Verma 的论文以及

I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand 的近期工作的启发.

(7) 第七章内主要根据 R. Steinberg 的讲演记录给出了 Chevalley 群理论的基本梗概.

我不得不略去很多标准的论题（我感到其中极大部分最好作为第二阶段的课程），譬如说：上同调，Levi 和 Mal'cev 定理，Ado 和 Iwasawa 定理，在非代数闭域上的分类，素特征数的李代数等．我希望读者将会从参考文献内所列举的书与文章，尤其是从 Jacobson [1], Bourbaki [1], [2], Winter [1], Seligman [1] 中，继续钻研这些论题.

再说几句有关编排技巧的话：本书使用的术语绝大多数是传统的，而且把使用的符号减少到最低限度，以便利读者前后翻阅参看．在看完第一到第三章后，如果读者想要进一步参看什么内容，那么剩下的几章可按任意的次序被阅读（只有两个例外：第七章依赖于 § 20 与 § 21，第六章依赖于 § 17)．文中提到的定理 14.2 就是指 14.2 小节里的定理．在各章节后面的附注指明了文中某些内容的出处以及进一步阅读的材料，但我并不想给出每个定理的历史沿革（关于历史的评述，可参见 Bourbaki [2], Freudenthal-de Vries [1]）．参考文献表主要包含那些已被提及的文献，若要更进一步查看的话，可见 Jacobson [1], Seligman [1]．书中给出了难易程度不同的 240 个练习，其中一些较容易的是正文中要用到的。

本书来源于我 1968 年在 Bowdoin 学院举行的国家科学基金会关于代数群的高级科学讨论班上的讲演，当时我的意图是想扩充 J.-P. Serre 的精彩但又未完成的讲演记录 [2]．本书写作时参照过的其它材料有：N. Bourbaki, N. Jacobson, R. Steinberg, D. J. Winter 以及其他人的书籍及讲演记录．作者在此对自己的老师 George Seligman 和 Nathan Jacobson 谨表示感谢，是他们激发了我对李代数的兴趣．我还要感谢 David J. Winter，他让我看了他即将出版的书；感谢 Robert L. Wilson，他对原稿提出不少有益的批评意见；感谢 Connie Engel，她帮助我准备了定稿；

以及感谢 Michael J. DeRise 在精神上对我的支持. 还有柯朗(Courant) 数学科学研究所及国家科学基金会的财务上的支持也是值得感谢的。

J. E. 汉弗莱斯

1972 年 4 月 4 日于纽约

第二次印刷的前言

除了改正一些小错和改进某些论证外，我还借此机会在 § 24 后加了一个附录，在这个附录里用更简便的方法导出 Weyl 公式(避免使用 § 23). 对那些曾指出过错误以及提出过有用建议的人，我在此表示感谢，尤其是: J. Carr, J. Dorfmeister, M. Eichler, M. Elmer, K. W. Gruenberg, J. H. Lindsey, B. Weisfeiler, R. L. Wilson.

记 号 与 约 定

$\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$　分别表示整数，非负整数，有理数，实数和复数的集合

$\amalg$　表示向量空间的直和

$A\rtimes B$　表示群 A 与 B 的半直积，B 正规

Card　=　(集合的)基数

char　=　特征数

det　=　行列式

dim　=　维数

Ker　=　核

Im　=　像集

Tr　=　迹

目　　录

第一章 基本概念

在本章内 F 表示一个任意(交换)域.

1. 定义及初步的例子

1.1. 李代数的概念

李代数起源于由线性变换构成的向量空间，并且这个空间被赋予一个通常既不交换又不结合的新运算：$[x, y]=xy-yx$ (右边的运算是通常的线性变换乘法). 也可以用一些公理抽象地描述这一类代数系.

定义 在域 F 上的一个向量空间 L 里，有一个运算 $L\times L\to L$，记为 $(x, y)\mapsto[xy]$，如果以下公理 $(L1)\sim(L3)$ 被满足，则这个运算称为 x 和 y 的**方括号**或**换位子**(亦称李乘运算)，且称 L 为 F 上 **Lie代数**：

$(L1)$ 方括号运算是双线性的.

$(L2)$ $[xx]=0$ 对 L 内所有的 x.

$(L3)$ $[x[yz]]+[y[zx]]+[z[xy]]=0 \quad (x, y, z\in L)$.

公理 $(L3)$ 称为 **Jacobi 等式**. 如果把 $(L1)$ 和 $(L2)$ 应用于 $[x+y, x+y]$，即可得到反交换性：$(L2')$ $[xy]=-[yx]$. (反之，若 $\operatorname{char} F\neq 2$，则显然 $(L2')$ 意味着 $(L2)$.)

如果存在向量空间的同构 $\phi: L\to L'$，它对 L 内所有 x, y 都满足 $\phi([xy])=[\phi(x)\phi(y)]$，则称 F 上两个李代数 L 和 L' 是**同构的**(且称 ϕ 为李代数的**同构**). 显然，可类似地定义 L 的(李)子代数：若 K 是 L 的子空间，并且只要 $x, y\in K$，即有 $[xy]\in K$，则称 K 为 L 的子代数. 特别，K 关于它的内在运算本身就是一个李代数. 请注意，任一个非零元素 $x\in L$ 可定义一个一维子代数

Fx, 这是因为由 ($L2$), 乘法是平凡的.

本书中所涉及的李代数 L 的底向量空间几乎全是在 F 上有限维的. 因此如果不特别指出, 就总是认为有上述的假设. 当然, 也要指出, F 上的某些无限维向量空间与结合代数将在表示论的研究中起重要的作用(第五~第七章). 在观察某些具体例子之前, 也要提一下, 如果 L 仅仅被假设为一个交换环上的模, 上述李代数的公理也是完全有意义的, 不过我们不打算按照这一观点展开讨论.

1.2. 线性李代数

如果 V 是 F 上有限维向量空间, 用 $\mathrm{End}\, V$ 表示 $V\to V$ 线性变换的集合. 作为 F 上的向量空间, $\mathrm{End}\, V$ 具有维数 $n^2 (n=\dim V)$, 且 $\mathrm{End}\, V$ 关于通常的乘积运算是一个环. 我们定义一个新运算 $[x, y]=xy-yx$, 称为 x 和 y 的方括号. 带着这一运算, $\mathrm{End}\, V$ 成为 F 上李代数: 公理 ($L1$) 和 ($L2$) 立即可知, 而 ($L3$) 需要简短的计算(请读者自己验证). 为将这一新的代数结构与原来的结合代数区分, 我们用 $\mathfrak{gl}(V)$ 代替 $\mathrm{End}\, V$, 意指把它看作李代数, 且称之为**一般线性李代数**(因为它与 V 的所有可逆自同态组成的**一般线性群** $GL(V)$ 密切相关). 当 V 是有限维时, 我们将不加注解地使用记号 $\mathfrak{gl}(V)$.

李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的任一子代数称为**线性李代数**. 有些读者感到矩阵比线性变换更为适宜, 因此宁可取定 V 的一组基, 将 $\mathfrak{gl}(V)$ 与 F 上所有 $n\times n$ 矩阵的集合等同起来, 并记为 $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{F})$. 这一做法不但无妨, 反而能方便计算. 为了参照起见, 我们写下 $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{F})$ 关于由矩阵 e_{ij} (在 (i, j) 位置上是 1, 其余为 0)所组成的标准基的乘法表. 因为 $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$, 所以

$$[e_{ij}, e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{li}e_{kj}. \qquad (*)$$

请注意, 系数全是 ± 1 或 0, 因此都在 F 的素子域里.

现在看一些进一步的例子, 这些例子是本书中将要阐述的理论的中心. 它们分成四个族: A_l, B_l, C_l, $D_l (l\geq 1)$, 且被称为典型

李代数(因为对应于某些典型线性李群).

A_l: 设 $\dim V=l+1$. 将 V 中迹为 0 的同态的集合记为 $\mathfrak{sl}(V)$ 或 $\mathfrak{sl}(l+1, F)$. (复习一下: 矩阵的迹是对角元素之和, 因它与 V 内基的选取无关, 故对 V 的自同态有意义.) 由于 $Tr(xy)=Tr(yx)$ 以及 $Tr(x+y)=Tr(x)+Tr(y)$, 故 $\mathfrak{sl}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 又因它与行列式等于 1 的自同态所成的**特殊线性群** $SL(V)$ 有联系, 因此被称为**特殊线性李代数**. 它的维数是多少呢? 一方面, $\mathfrak{sl}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的真子代数, 所以它的维数至多为 $(l+1)^2-1$. 另一方面, 我们可以列举出这么多个迹为 0 的线性无关矩阵: 取所有的 $e_{ij}(i\neq j)$ 以及所有的 $h_i=e_{ii}-e_{i+1,i+1}(1\leqslant i\leqslant l)$, 总共有 $l+(l+1)^2-(l+1)$ 个矩阵. 我们总是把它们看作 $\mathfrak{sl}(l+1, F)$ 的标准基.

C_l: 设 $\dim V=2l$, 基 $(v_1, \cdots, v_{2l})$. 在 V 上用矩阵

$$s=\begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

定义一个非退化斜对称型 f. (可以证明, 存在满足 $f(v, w)=-f(w, v)$ 的非退化双线性型的必要条件是维数为偶数.) 被记为 $\mathfrak{sp}(V)$ 或 $\mathfrak{sp}(2l, F)$ 的**辛代数**就是由满足 $f(x(v), w)=-f(v, x(w))$ 的 V 的所有自同态所组成的. 读者很易验证, $\mathfrak{sp}(V)$ 在方括号运算下是封闭的. $x=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ $(m, n, p, q\in\mathfrak{gl}(l, F))$ 是辛矩阵的条件, 用矩阵术语表达, 就是 $sx=-x^ts$ ($x^t=x$ 的转置) 即 $n^t=n$, $p^t=p$ 以及 $m^t=-q$. (最后一个条件迫使 $Tr(x)=0$.) 现在很易计算 $\mathfrak{sp}(2l, F)$ 的一个基. 取对角阵 $e_{ii}-e_{l+i,l+i}(1\leqslant i\leqslant l)$, 共 l 个. 再加上所有 $e_{ij}-e_{l+j,l+i}(1\leqslant i\neq j\leqslant l)$, 有 l^2-l 个. 对 n, 我们使用矩阵 $e_{i,l+i}(1\leqslant i\leqslant l)$ 和 $e_{i,l+j}+e_{j,l+i}(1\leqslant i<j\leqslant l)$, 共 $l+\frac{1}{2}l(l-1)$ 个. 对 p 的位置, 可作类似的处理. 合并起来, 我们发现 $\dim\mathfrak{sp}(2l, F)=2l^2+l$.

B_l: 设 $\dim V=2l+1$ 是奇数, 且取 f 为 V 上非退化对称双线性型, 它的矩阵为

$$s=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_l\\0&I_l&0\end{pmatrix}.$$

正交代数 $\mathfrak{o}(V)$ 或 $\mathfrak{o}(2l+1, \mathsf{F})$ 就是由满足 $f(x(v), w)=-f(v, x(w))$ (与 C_l 同样的要求)的 V 的所有自同态所组成. 如果按 S 的形状将 x 分块, 即

$$x=\begin{pmatrix}a&b_1&b_2\\c_1&m&n\\c_2&p&q\end{pmatrix},$$

则条件 $sx=-x^ts$ 可以转换成以下一组条件: $a=0$, $c_1=-b_2^t$, $c_2=-b_1^t$, $q=-m^t$, $n^t=-n$, $p^t=-p$. (与 C_l 的情形一样, 这说明了 $Tr(x)=0$.) 作为一组基, 首先取 l 个对角阵 $e_{ii}-e_{l+i,l+i}(2\leqslant i\leqslant l+1)$. 再加上 $2l$ 个只含第1行或第1列的矩阵 $e_{1,l+i+1}-e_{i+1,1}$ 和 $e_{1,i+1}-e_{l+i+1,1}(1\leqslant i\leqslant l)$. 相应于 $q=-m^t$, 取(与 C_l 一样) $e_{i+1,j+1}-e_{l+j+1,l+i+1}(1\leqslant i\neq j\leqslant l)$. 对 n, 取 $e_{i+1,l+j+1}-e_{j+1,l+i+1}$ $(1\leqslant i<j\leqslant l)$, 对 p, 取 $e_{i+l+1,j+1}-e_{j+l+1,i+1}(1\leqslant j<i\leqslant l)$. 基元素总数是 $2l^2+l$ (注意这也是 C_l 的维数).

D_l: 我们得到另一个**正交代数**, 它的结构和 B_l 完全一样, 只不过 $\dim V=2l$ 是偶数, 且 s 具有更简单的形式 $\begin{pmatrix}0&I_l\\I_l&0\end{pmatrix}$. 把构造它的基以及验证 $\dim\mathfrak{o}(2l, \mathsf{F})=2l^2-l$ 作为练习留给读者(练习 8).

在结束本小节之前, 再提出 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 的其它几个子代数, 它们起着重要的辅助作用. 令 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ 是上三角阵(即 (a_{ij}), 当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$) 的集合, $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 是**严格上三角阵**(当 $i\geqslant j$ 时, $a_{ij}=0$)的集合. 再设 $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ 是所有**对角阵**的集合. 显然它们在方括号运算下都是封闭的. 也注意到 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})=\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})+\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ (作为向量空间的直和), $[\mathfrak{d}(n, \mathsf{F}), \mathfrak{n}(n, \mathsf{F})]=\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$, 所以

$$[\mathfrak{t}(n, \mathsf{F}), \mathfrak{t}(n, \mathsf{F})]=\mathfrak{n}(n, \mathsf{F}).$$

请参看练习 5. (若 H, K 是 L 的子代数, 则 $[HK]$ 表示由换位

子 $[xy]$, $x\in H$, $y\in K$ 所张成的 L 的子空间.)

1.3. 导子李代数

某些线性变换的李代数自然地来源于代数的导子. 所谓 F 代数(不必结合的)就是指 F 上一个向量空间 $\mathfrak{A}$, 再被赋予一个双线性运算 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, 通常就用两个字母连写来表示这个运算(只有当 $\mathfrak{A}$ 是李代数时, 才使用方括号). $\mathfrak{A}$ 的**导子**是指一个线性映射 δ: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, 它满足大家熟知的乘积规则 $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$. 很易验证, $\mathfrak{A}$ 的所有导子的集合 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ 是 $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ 的一个向量子空间, 而且可验证, 两个导子的换位子 $[\delta, \delta']$ 仍是一个导子(但通常的乘积不一定如此, 见练习 11). 所以 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$ 的一个子代数.

因为一个李代数 L 是上述意义下的 F 代数, 所以 $\mathrm{Der}\,L$ 是有定义的. 某些导子很自然地如下产生: 若 $x\in L$, 则 $y\mapsto[xy]$ 是 L 的自同态, 记为 $\mathrm{ad}\,x$. 事实上, $\mathrm{ad}\,x\in\mathrm{Der}\,L$, 这是因为我们可将 Jacobi 等式写成(利用 $(L2')$): $[x[yz]]=[[xy]z]+[y[xz]]$. 这一形式的导子称为**内导子**, 其它都称为**外导子**. 当然, 在 $x\neq 0$ 时也有可能 $\mathrm{ad}\,x=0$: 例如在所有的一维李代数内就是如此. 把 x 对应到 $\mathrm{ad}\,x$ 的映射 $L\to\mathrm{Der}\,L$ 称为 L 的**伴随表示**, 它在以后起着决定性的作用.

有时同时把 x 看作 L 的元素以及 L 的子代数 K 的元素. 为了避免混淆, 使用记号 $\mathrm{ad}_L x$ 或 $\mathrm{ad}_K x$, 以分别表示 x 作用在 L 上或 K 上. 例如, 若 x 是对角阵, 则 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{d}(n,F)}(x)=0$, 而 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(n,F)}(x)$ 不必为 0.

1.4. 抽象李代数

我们已看到了线性李代数的一些自然的例子. 大家也知道, 实际上每一(有限维)李代数都同构于某个线性李代数 (Ado-Iwasawa 定理). 在此不打算证明它 (参看 Jacobson[1] 第六章或 Bourbaki[1]). 不过在李代数理论的初始阶段, 这个结果对所有我