《现代控制系统理论》小丛书

离散时间系统的
递推估计与随机控制

中国科学院数学研究所
控制理论研究室主编

科学出版社

《现代控制系统理论》小丛书

离散时间系统的递推估计与随机控制

中国科学院数学研究所控制理论研究室 主编
陈翰馥 编著

科学出版社
1980

内 容 简 介

本书是《现代控制系统理论》小丛书之一．这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论如何由工程实践的需要而产生，怎样应用它来解决工程设计中的实际问题．

全书共分五章．前四章分别讨论了离散时间随机系统的递推滤波、内插、外推和控制问题．最后一章介绍了随机能观测的概念，以及它和缺初值时的线性无偏最小方差估计的联系．

本书不但阐述了国内外在这些方面的发展，还包括了作者新近的研究结果，对于从事控制理论方面的研究人员和高等院校有关专业的师生都有一定的参考价值．本书的理论证明是严谨的．前两章只使用了线性代数和初等概率等数学工具，并且列举了实例．因此，对于从事自动控制的工程技术人员，也是一本提高理论水平的入门书．

《现代控制系统理论》小丛书

离散时间系统的递推估计与随机控制

中国科学院数学研究所控制理论研究室 主编

陈翰馥 编著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年2月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1980年2月第一次印刷　　印张：3 5/8

印数：0001—7,330　　字数：78,000

统一书号：15031·267

本社书号：1673·15—8

定价： 0.48 元

前　　言

递推滤波方法是六十年代初提出来的，它适应了当时航天、航空、航海和导弹技术提出的高精度要求. 快速数字电子计算机的发展，为适时地进行这种滤波运算提供了实现的可能. 但是控制系统除了要求对它的状态进行精确的估计外，还要求加以控制，使它的状态按预定的要求演化. 由于系统是带随机干扰的，所以控制量本身也必然是个随机过程，这种带随机干扰系统的控制问题叫做随机控制问题. 它是工程技术中经常遇到的并需要解决的问题.

写这本小册子的目的，一方面希望能给从事控制和滤波的工程技术人员提供一本系统的参考书，只要他们有较少的数学准备，就能掌握离散时间系统的滤波和随机控制的一些基本结果. 另一方面，这本小册子还包括一些新近的研究结果，因此对控制理论研究工作者，或许会有一定的参考价值.

本书的前两章叙述线性系统在非正态噪声干扰下的递推滤波，Wiener 滤波和 Kalman 滤波的关系以及二次指标下的随机控制问题. 为了方便工程技术人员阅读，笔者把这两章中用到的数学工具尽可能限制在线性代数和概率论中诸如期望、方差这类简单的概念范围内. 就笔者所知，随机控制这样的证明方法，似乎并不见于别处.

第三章和第四章讨论的系统对状态是线性的，但对量测却可以是非线性的，不过要求噪声服从正态分布. 这种系统确定出来的过程叫条件（在量测变量的条件下）正态过程. 这两章讨论这种系统的滤波、内插、外推及随机控制问题.

最后一章讨论随机能观测性及没有初始统计特性时的线性无偏最小方差的滤波、内插、外推及控制问题．这是一些较新的结果．

书中列举了一些例子，着重说明如何灵活地应用理论去处理实际问题，同时加深对理论的理解．

连续时间系统有和离散时间系统平行的结果．这些内容连同非线性滤波方程，将在本丛书的另一本小册子《连续时间系统的估计与控制》中叙述．

本书数学符号

A^+	A 阵的伪逆
A^τ	A 阵的转置
A^*	A 阵的转置并取共轭复数
$\det A$	A 阵的行列式
$\|A\|$	A^*A 的最大本征值的平方根
$\mathrm{tr}\, A$	A 阵对角线元之和
$L(A)$	A 阵的列矢量张成的线性子空间
R_x 或 $\mathrm{cov}(x, x)$	随机矢量 x 的协方差阵
R_{xy} 或 $\mathrm{cov}(x, y)$	随机矢量 x 和 y 的相关阵
E	数学期望
a.s.	几乎必然或以概率为 1
I	单位阵，但维数各处可以不同
$R_{x/y}$	用 y 对 x 进行线性无偏估计时的估计误差的协方差阵
$\mathscr{F}^x$	随机矢量 x 所产生的 σ-代数
$E^{\mathscr{F}}X$ 或 $E(X/\mathscr{F})$	在 σ-代数 $\mathscr{F}$ 条件下 X 的条件期望
E^yX 或 $E(X/y)$	在 y 条件下 X 的条件期望
R_x^y	在 y 条件下 x 的条件协方差阵
R_x^{yz}	在 (y, z) 条件下 x 的条件协方差阵
R_{xy}^z	在 z 条件下，x 和 y 的条件相关阵
$\hat{x}_j(k)$	$E^{y^k}x_j$（用 y^k 对 x_j 的线性无偏最小方差估计也用同样符号表示）
$P_j(k)$	$E^{y^k}[x_j - \hat{x}_j(k)][x_j - \hat{x}_j(k)]^*$（在线

	性无偏估计时为 $E[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_j(k)][\boldsymbol{x}_j-\hat{\boldsymbol{x}}_j(k)]^*$)
$\hat{\boldsymbol{x}}_k$	$\hat{\boldsymbol{x}}_k(k)$
P_k	$P_k(k)$
$\hat{\boldsymbol{x}}_k^j(l)$	$E^{\boldsymbol{y}^l \boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{x}_k$（用 $\boldsymbol{y}^l$ 及 $\boldsymbol{x}_j$ 对 $\boldsymbol{x}_k$ 的线性无偏最小方差估计也用同样符号表示）
$P_k^j(l)$	$E^{\boldsymbol{y}^l \boldsymbol{x}_j}[\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k^j(l)][\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k^j(l)]^*$（在线性无偏估计时为 $E[\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k^j(l)]\times[\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k^j(l)]^*$
$\hat{\boldsymbol{x}}_k^j$	$\hat{\boldsymbol{x}}_k^j(k)$
P_k^j	$P_k^j(k)$
$\bar{\boldsymbol{x}}_j(k, \alpha)$	在 $\hat{\boldsymbol{x}}_j(k)$ 的表达式中用 $\mathbf{0}$ 取代 $E\boldsymbol{x}_0$，αI 取代 $R_{\boldsymbol{x}_0}$ 所得的结果
$\bar{P}_j(k, \alpha)$	在 $P_j(k)$ 的表达式中用 $\mathbf{0}$ 取代 $E\boldsymbol{x}_0$，αI 取代 $R_{\boldsymbol{x}_0}$ 所得的结果
$\bar{\boldsymbol{x}}_j(k)$	当 $\alpha\to\infty$ 时，$\bar{\boldsymbol{x}}_j(k, \alpha)$ 的极限
$\bar{P}_j(k)$	当 $\alpha\to\infty$ 时，$\bar{P}_j(k, \alpha)$ 的极限

目　　录

第一章　线性无偏最小方差递推滤波

§1　矩阵的伪逆

因为线性代数的参考书比较多，我们就不再对线性代数作一般性的介绍，而只介绍以后要实质性地用到的阵的伪逆的概念.

设 A 为 $n\times m$ 阵，它的元是复数. 我们来看下面联立的矩阵代数方程组:

$$AXA=A, \tag{1.1.1}$$

$$XAX=X, \tag{1.1.2}$$

$$(AX)^*=AX, \tag{1.1.3}$$

$$(XA)^*=XA, \tag{1.1.4}$$

这里"$*$"表示转置兼取复数共轭，X 是未知阵.

如果 $n=m$，并且 $\det A\neq 0$，那么很显然，$X=A^{-1}$ 是满足上述联立方程的唯一解. 对一般情形的 A 阵，成立下面引理.

引理 1.1　代数方程(1.1.1)—(1.1.4)的解存在且唯一，这个解记作 A^+，它是 $m\times n$ 阵，叫做 A 阵的伪逆.

证明　设 A 阵的秩为 r，$r\leqslant n\wedge m$ $(\equiv\min(n, m))$，那么 A 阵的列张成 n 维空间中的一个秩为 r 的线性子空间 $\boldsymbol{L}(A)$，用 $n\times r$ 阵 B 的列表示 $\boldsymbol{L}(A)$ 的基. 由于 A 阵的任一列必是 B 阵的列的线性组合，所以存在一个 $r\times m$ 阵 C，使得

$$A=BC. \tag{1.1.5}$$

因为 A 的秩为 r，所以 B 和 C 都是满秩阵.

把秩为 r 的 A 阵写成 r 列的阵 B 乘以 r 行的阵 C 的形式 (1.1.5)，叫做 A 的满秩分解.

很容易直接验证

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{1.1.6}$$

满足式 (1.1.1)—(1.1.4)，由此证得存在性.

今设 X 和 Y 都满足式 (1.1.1)—(1.1.4)，那么

$$\begin{aligned}X &= X(AX)^* = XX^*A^* = XX^*(AYA)^* \\ &= X(AX)^*(AY)^* = XAY = XAYAY \\ &= (XA)^*(YA)^*Y = (YAXA)^*Y = (YA)^*Y \\ &= YAY = Y.\end{aligned}$$

证毕.

引理 1.2 伪逆有以下性质:

1) $(A^*)^+ = (A^+)^*,\quad (A^+)^+ = A,$

2) $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+ = A^+(A^+)^*,$

3) $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+,$

4) $A^+AA^* = A^*AA^+ = A^*,$

5) 设 U 和 V 分别是 $n\times n$ 及 $m\times m$ 酉阵，那么

$$(UAV)^+ = V^*A^+U^*.$$

证明 1) 利用 A 的满秩分解式 (1.1.5) 知 $A^* = C^*B^*$ 是 A^* 的满秩分解，所以利用 (1.1.6) 知

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^+)^*.$$

因为式 (1.1.6) 正好就是 A^+ 的满秩分解，所以容易验证 $(A^+)^+ = A$.

2) 记 $\bar{B} = C^*$, $\bar{C} = B^*BC$，那么 $A^*A = \bar{B}\bar{C}$ 是满秩分解，所以

$$\begin{aligned}(A^*A)^+ &= C^*B^*B(B^*BCC^*B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \\ &= A^+(A^+)^* = A^+(A^*)^+.\end{aligned}$$

同样，利用A阵的满秩分解易证 4)，而 5)可用直接验证的办法证明.

证毕.

引理 1.3 矩阵代数方程 $AX=D$ 相容的充要条件是 $AA^+D=D$，当此条件成立时，方程 $AX=D$ 的通解为 $X=A^+D+(I-A^+A)Y$，这里D是 $n\times l$ 阵，Y为任一 $m\times l$ 阵，I 为单位阵（今后总用 I 表示单位阵，但维数各处可能不一样，对此不再逐一说明）.

证明 如果 $AA^+D=D$，那么A^+D就是方程的解.反之，如果X满足方程 $AX=D$，那么

$$AA^+D=AA^+AX=AX=D.$$

当 $AA^+D=D$时，显然

$$X=A^+D+(I-A^+A)Y \tag{1.1.7}$$

满足方程. 另一方面，如果X满足方程，那么

$$X=A^+D+X-A^+D=A^+D+(I-A^+A)X,$$

它也具有式(1.1.7)的形式.

证毕.

§2 线性无偏最小方差估计

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别是n维和m维随机矢量，$\langle E\boldsymbol{x}^*\ \boldsymbol{x}\rangle<\infty$，$E\,\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{y}<\infty$. 记

$$R_x\equiv E(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})^*,$$

$$R_{xy}=E(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-E\boldsymbol{y})^*.$$

设$\boldsymbol{c}_1$是n维矢量，C_2是 $n\times m$ 阵，那么$\boldsymbol{x}_y\equiv\boldsymbol{c}_1+C_2\boldsymbol{y}$是$\boldsymbol{y}$的分量的一个线性组合，把它看成是对$\boldsymbol{x}$的一个估计. 我们要求估计是无偏的，所以$\boldsymbol{c}_1=E\boldsymbol{x}-C_2E\boldsymbol{y}$，因此$\boldsymbol{x}_y=E\boldsymbol{x}+C_2(\boldsymbol{y}-E\boldsymbol{y})$. 如果

$$E[x-Ex-C_0(y-Ey)][x-Ex-C_0(y-Ey)]^*$$
$$=\min_{C_2} E[x-Ex-C_2(y-Ey)][x-Ex-C_2(y-Ey)]^*$$

那么称

$$\hat{x}_y \equiv Ex + C_0(y-Ey)$$

是利用 y 对 x 的线性无偏最小方差估计.

引理 1.4 利用 y 对 x 的线性无偏最小方差估计唯一地表达为

$$\hat{x}_y = Ex + R_{xy}R_y^+(y-Ey) \quad \text{a. s.}^{1)} \tag{1.2.1}$$

估计误差的协方差阵为

$$R_{x/y} \equiv R_x - R_{xy}R_y^+R_{yx}. \tag{1.2.2}$$

证明 先证

$$R_{xy}R_y^+R_y = R_{xy}. \tag{1.2.3}$$

因为

$$E[(I-R_y^+R_y)(y-Ey)][(I-R_y^+R_y)(y-Ey)]^* = 0,$$

所以

$$(y-Ey)^* = (y-Ey)^*R_y^+R_y \quad \text{a. s.} \tag{1.2.4}$$

随机量之间的等式可以差一个零概率的例外集，但今后我们往往省写为“a. s.”.

从式 (1.2.4) 立即得到式 (1.2.3). 利用式 (1.2.3) 很容易验证

$$\begin{aligned}
&E[x-Ex-C_2(y-Ey)][x-Ex-C_2(y-Ey)]^* \\
&= R_x - C_2R_{yx} - R_{xy}C_2^* + C_2R_yC_2^* \\
&= (C_2-R_{xy}R_y^+)R_y(C_2-R_{xy}R_y^+)^* \\
&\quad + R_x - R_{xy}R_y^+R_{yx}.
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

上式依赖于 C_2 的只有第一项,而它是个非负定阵，所以当且仅当 $C_2 = R_{xy}R_y^+ + Z$ 时,估计误差协方差阵才达最小,

---

1) a. s. 是英语殆肯定 (almost surely) 的缩写.

这里 $R_y Z^* = 0$.

因此

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_y &= E\boldsymbol{x} + (R_{xy} - R_y^+ + Z)(\boldsymbol{y} - E\boldsymbol{y}) \\ &= E\boldsymbol{x} + R_{xy}R_y^+(\boldsymbol{y} - E\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

从式 (1.2.5), (1.2.1) 便得式 (1.2.2).

证毕.

推论 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维确定性矢量, $\boldsymbol{x}^1$ 和 $\boldsymbol{x}^2$ 是两个协方差阵有穷的 n 维随机矢量, C 为 $n \times m$ 阵, 那么用 $\boldsymbol{y}$ 对

$$\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2 + C\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha}$$

的线性无偏最小方差估计 $\hat{\boldsymbol{z}}_y$ 显然是

$$\hat{\boldsymbol{z}}_y = \hat{\boldsymbol{x}}_y^1 + \hat{\boldsymbol{x}}_y^2 + C\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha}.$$

如果 A 是 $r \times n$ 阵, 那么用 $\boldsymbol{y}$ 对 $A\boldsymbol{x}$ 的线性无偏最小方差估计是 $A\hat{\boldsymbol{x}}_y$.

设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 为协方差阵有穷的三个随机矢量,记

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}.$$

引理 1.5 记

$$K = (R_{xz} - R_{xy}R_y^+R_{yz})R_{z/y}^+, \tag{1.2.6}$$

那么

$$\hat{\boldsymbol{x}}_w = \hat{\boldsymbol{x}}_y + K(\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}_y). \tag{1.2.7}$$

证明 因为

$$E(\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}_y)(\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}_y)^* = R_{z/y},$$

所以用式(1.1.1),(1.1.4)知 $E[(I - R_{z/y}^+R_{z/y})(\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}_y)] \times [(I - R_{z/y}^+R_{z/y})(\boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{z}}_y)]^* = 0$, 因此和式 (1.2.4) 类似地有

$$(\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}_y)^* = (\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}_y)^*R_{z/y}^+R_{z/y}. \tag{1.2.8}$$

记

$$R_{xz/y} = E(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_y)(\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{z}}_y)^*, \tag{1.2.9}$$

那么从式 (1.2.8) 知

$$R_{xz/y} - R_{xz/y}R_{z/y}^{+}R_{z/y} = 0 \tag{1.2.10}$$

或者

$$E[x - \hat{x}_y - R_{xz/y}R_{z/y}^{+}(z - \hat{z}_y)][z - \hat{z}_y]^* = 0 \tag{1.2.11}$$

记

$$\tilde{x} = x - \hat{x}_y - R_{xz/y}R_{z/y}^{+}(z - \hat{z}_y),$$

把 $\hat{x}_y$, $\hat{z}_y$的表达式 (1.2.1) 代入，知

$$\tilde{x} = x - Ex - R_{xy}R_y^{+}(y - Ey) - R_{xz/y}R_{z/y}^{+}[z - Ez - R_{zy}R_y^{+}(y - Ey)]. \tag{1.2.12}$$

由此利用式 (1.2.3) 知

$$E\tilde{x}(y - Ey)^* = 0. \tag{1.2.13}$$

所以从式 (1.2.11) 及式 (1.2.12) 知

$$E\tilde{x}(z - Ez)^* = 0, \tag{1.2.14}$$

因此

$$E\tilde{x}(w - Ew)^* = 0. \tag{1.2.15}$$

注意到 $E\tilde{x} = 0$, 所以从式 (1.2.15),(1.2.1)知 $\hat{\tilde{x}}_w = 0$.

$$\tag{1.2.16}$$

另一方面用引理 1.4 的推论从式 (1.2.12) 知

$$\hat{\tilde{x}}_w = \hat{x}_w - Ex - R_{xy}R_y^{+}(y - Ey) - R_{xz/y}R_{z/y}^{+}[z - Ez - R_{zy}R_y^{+}(y - E_y)].$$

所以 $$\hat{x}_w = \hat{x}_y + R_{xz/y}R_{z/y}^{+}(z - \hat{z}_y). \tag{1.2.17}$$

从 $R_{xz/y}$ 的定义 (1.2.9) 很容易验证

$$R_{xz/y} = R_{xz} - R_{xy}R_y^{+}R_{yz}.$$

把上式代入式 (1.2.17), 便得式 (1.2.6), (1.2.7).

证毕.

§3 线性无偏最小方差递推滤波公式(Kalman 滤波)

设 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k, \cdots$ 为任一矢量列，以后我们总用如

下标记:

$$\boldsymbol{a}^k = [\boldsymbol{a}_0^\tau \boldsymbol{a}_1^\tau \cdots \boldsymbol{a}_k^\tau]^\tau, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

我们现在来考察离散时间的线性随机系统.

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k + B_{k+1}\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{b}_{k+1} + D_{k+1}\boldsymbol{\xi}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \cdots, \tag{1.3.1}$$

$$\boldsymbol{y}_k = C_k\boldsymbol{x}_{k-1} + H_k\boldsymbol{y}^{k-1} + F_k\boldsymbol{\xi}_k, \quad k=1, 2, \cdots, \tag{1.3.2}$$

$\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$, $\boldsymbol{\xi}_k$ 分别是 n, m, l 维随机矢量, $E\boldsymbol{\xi}_k=0$, $E\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_j^*=\delta_{kj}I$.

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_0\end{bmatrix}$ 和 $\{\boldsymbol{\xi}_k\}$ 不相关, 并且协方差阵有穷. 设 $\boldsymbol{x}_0$ 的期望 $E\boldsymbol{x}_0$ 及协方差阵 $R_{\boldsymbol{x}_0}$ 已知. 今后总把 $R_{\boldsymbol{x}_0}$ 简记为R.

$\boldsymbol{b}_k$ 是确定性矢量, $\Phi_{k+1,k}$, B_{k+1}, D_{k+1}, C_k, H_k, F_k 都是确定性阵.

在随机系统 (1.3.1), (1.3.2) 中 $D_{k+1}\boldsymbol{\xi}_{k+1}$ 叫模型噪声, $F_k\boldsymbol{\xi}_k$ 叫量测噪声. 我们并不假设它们是正态矢量. 模型噪声和量测噪声可以是相关的, $F_kD_k^*$ 就是它们的相关阵. 我们也不要求量测噪声的非退化性, 因此确定性系统 ($D_k \equiv 0$, $F_k \equiv 0$) 是我们考察的随机系统的特例.

$B_{k+1}\boldsymbol{y}^{k+1}$ 是线性反馈控制项, 而 $H_k\boldsymbol{y}^{k-1}$ 是线性量测控制, $\boldsymbol{b}_k$ 是外干扰.

用 $\boldsymbol{y}^k$对$\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_{k+1}$, $\boldsymbol{y}_k$ 和 $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 的线性无偏最小方差估计分别记为 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ (滤波值), $\hat{\boldsymbol{x}}'_{k+1}$ (预报值), $\hat{\boldsymbol{y}}_k$ 及 $\hat{\boldsymbol{y}}'_{k+1}$, 并记

$$P_k \equiv E(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)^*,$$

$$P'_k \equiv E(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}'_k)(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}'_k)^*.$$

定理 1.1 对系统 (1.3.1), (1.3.2) 成立如下的递推滤波公式:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\hat{\boldsymbol{x}}_k + B_{k+1}\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{b}_{k+1} + K_{k+1}(\boldsymbol{y}_{k+1} - C_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k - H_{k+1}\boldsymbol{y}^k) \tag{1.3.3}$$

$$K_{k+1} = (\Phi_{k+1,k}P_kC^*_{k+1} + D_{k+1}F^*_{k+1})(C_{k+1}P_kC^*_{k+1} + F_{k+1}F^*_{k+1})^+ \tag{1.3.4}$$

$$P_{k+1} = \Phi_{k+1,k}P_k\Phi^*_{k+1,k} - K_{k+1}(\Phi_{k+1,k}P_kC^*_{k+1} + D_{k+1}F^*_{k+1})^* + D_{k+1}D^*_{k+1} \tag{1.3.5}$$

初值

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = E\boldsymbol{x}_0 + R_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0}R^+_{\boldsymbol{y}_0}(\boldsymbol{y}_0 - E\boldsymbol{y}_0),$$
$$P_0 = R - R_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0}R^+_{\boldsymbol{y}_0}R_{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}_0}.$$

证明 因为 $\boldsymbol{y}^k$ 只线性地依赖于 $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{\xi}_0$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_k$, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{k-1}$, 所以它和 $\boldsymbol{\xi}_{k+1}$ 不相关. 因此利用式(1.2.1)及引理 1.3 的推论知

$$\hat{\boldsymbol{y}}'_{k+1} = C_{k+1}E\boldsymbol{x}_k + C_{k+1}R_{\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{y}^k}R^+_{\boldsymbol{y}^k}(\boldsymbol{y}^k - E\boldsymbol{y}^k) + H_{k+1}\boldsymbol{y}^k$$
$$= C_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k + H_{k+1}\boldsymbol{y}^k.$$

记

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \Phi_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k + D_{k+1}\boldsymbol{\xi}_{k+1}.$$

用 $\boldsymbol{y}^k$ 对 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k$ 及 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ 的线性无偏最小方差估计类似地记作 $\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_k$ 及 $\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}'_{k+1}$. 由于

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} + B_{k+1}\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{b}_{k+1},$$

所以根据引理 1.4 的推论知

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{k+1} + B_{k+1}\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{b}_{k+1}. \tag{1.3.6}$$

在式(1.2.6),(1.2.7)中作如下对应: $\boldsymbol{x} \to \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}$, $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}^k$, $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{y}_{k+1}$, 那么用 $\hat{\boldsymbol{y}}'_{k+1}$ 的表达式代入便知

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{k+1} = \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}'_{k+1} + K_{k+1}(\boldsymbol{y}_{k+1} - C_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k - H_{k+1}\boldsymbol{y}^k), \tag{1.3.7}$$

这里

$$K_{k+1} = (R_{\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}\boldsymbol{y}_{k+1}} - R_{\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}\boldsymbol{y}^k}R^+_{\boldsymbol{y}^k}R_{\boldsymbol{y}^k\boldsymbol{y}_{k+1}})R^+_{\boldsymbol{y}_{k+1}/\boldsymbol{y}^k}$$
$$= [\mathrm{cov}(\Phi_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k + D_{k+1}\boldsymbol{\xi}_{k+1}, C_{k+1}\boldsymbol{x}_k + H_{k+1}\boldsymbol{y}^k + F_{k+1}\boldsymbol{\xi}_{k+1}) - \mathrm{cov}(\Phi_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k + D_{k+1}\boldsymbol{\xi}_{k+1}, \boldsymbol{y}^k)R^+_{\boldsymbol{y}^k}$$
$$\times \mathrm{cov}(\boldsymbol{y}^k, C_{k+1}\boldsymbol{x}_k + H_{k+1}\boldsymbol{y}^k + F_{k+1}\boldsymbol{\xi}_{k+1})]$$
$$\times [\mathrm{cov}(\boldsymbol{y}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{y}}'_{k+1}, \boldsymbol{y}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{y}}'_{k+1})]^+$$