工程数学

线性代数

杨茂信　陈璞华　庾镜波　编

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是编者在1986年所编试用教材基础上，经在华南理工大学试用两届后，反复修改而成的。各章内容依次为：行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、线性空间与欧氏空间、线性变换、矩阵的特征值与特征向量、二次型。每章配有习题，书末附有习题答案。

本书可作为高等理工科院校开设线性代数的各专业学生用教材，也可作为自学教材和工程技术人员的参考书。

工 程 数 学

线 性 代 数

杨茂信 陈璞华 庾镜波 编

责任编辑 林炳清 刘赞华

*

华南理工大学出版社出版发行

（广州 五山）

广东省新华书店经销

广东省华南理工大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张 6.4375 字数 145千

1988年 7 月第1版 1988年 7 月第 1 次印刷

印数 1－7000 定价：0.95 元

ISBN 7-5623-0059-3/O·7（课）

编 者 的 话

我们根据教学大纲的要求，结合多年教学实践的经验，编写了这本教材.1985和1986年度，本书在我院作了广泛的试用，并反复进行了修改，现在正式予以出版. 本书分为八章，依次是行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、线性空间与欧氏空间、线性变换、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 编写时注意突出以下几个特点：

（1）章与节层次分明，重点突出，便于教学. 例如，矩阵运算自成系统的一章，教与学便有利于加强运算的训练. 接着讲线性方程组，整个求解过程便可以利用矩阵的运算来获得解决. 向量理论的概念与证明方法比较难于理解掌握，但放在矩阵与线性方程组之后来讲，便容易把它们联系起来，融汇贯通. 这样逐步深入，学生便可以理解掌握，灵活应用，达到提高教学质量的目的.

（2）线性空间与线性变换，本书编排在向量理论之后，矩阵的特征向量之前，同时把欧氏空间归入到线性空间内作为有机的组成部分. 这样做可以起到承上启下的作用，也可以达到把前几章内容进行综合提高的目的.

（3）本书的例题与习题具有一定的深、广度，对于报考研究生的工科学生，也可作为考前复习的参考资料.

此外，书中文字深入浅出，便于自学，对有志自学的校外人员和科技人员，也可作为自学用书.

本书由罗家洪副教授审阅，不少老师看过书稿后提了许多宝贵的意见，在此表示深切的谢意. 由于编者的水平所限，如有错漏不足之处，恳请批评指正.

编者

1987.10.15

目　录

第一章　行 列 式

行列式在数学中，特别在线性代数中有着广泛的应用．本章主要介绍 n 阶行列式的概念、基本性质，及其按行（列）展开定理．

§1　n 阶行列式

一、全排列及其逆序数

在中学代数里知道，由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个全排列（简称排列）．

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示．

$$P_n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!\ .$$

在全排列里，自然数按照从小到大的一个排列 $1\ 2\ 3\cdots n$ 称为顺序排列．一个排列中两个自然数的前后位置如果与从小到大的顺序相反，我们就说它们构成了一个逆序．一个排列中的逆序的总数，称为这个排列的逆序数．逆序数为偶数的排列，称为偶排列；逆序数为奇数的排列，称为奇排列．顺序排列的逆序数为 0，属于偶排列．

例如，排列 1 3 2的逆序数为1；3 1 2的逆序数为 2．1 3 2是奇排列；3 1 2是偶排列．

排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1\ i_2\ \cdots\ i_n)$．

例1　求 $\tau(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)$．

解　在 $n\ n-1\ \cdots 2\ 1$ 中，n 与后面 $n-1$ 个数都组成逆序；

一般地 $k(k>1)$ 与它后面 $k-1$ 个数也都组成逆序。所以

$$
\begin{aligned}
&\tau(n\ n-1\ \cdots 2\ 1)\\
&\quad=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\
&\quad=\frac{1}{2}n(n-1).
\end{aligned}
$$

二、对 换

为了探讨行列式的性质，我们还需引入对换的概念。

把自然数的一个排列中某两个数的位置互换，称为对这个排列施行一次对换。

定理 1 每个排列经过一次对换，将改变其奇偶性。

证 1. 先考虑相邻两数对换的情形。设原来排列为 $\cdots ij\cdots$，把 i,j 对换一次，便得到新排列 $\cdots ji\cdots$。比较这两个排列的逆序数，因为原来位于数 i 之前的每个数在 i,j 对换以后，仍然位于 i,j 之前，而原位于 j 后面的每个数在 i,j 对换后，也仍然在 i,j 之后，所以有关它们的逆序保持不变。如果 ij 是逆序，对换后 ji 便变成顺序；如果 ij 是顺序，则 ji 便变成逆序。由此可知，从原排列 $\cdots ij\cdots$ 变成 $\cdots ji\cdots$，逆序数或者减少 1 或者增加 1，所以它们的奇偶性刚好相反，即奇排列变成偶排列，而偶排列则变成奇排列。

2. 再考虑 i 与 j 不相邻的情形。设 i 与 j 中间尚有 s 个数，不妨记为 $k_1k_2\cdots k_s$。如果依次进行相邻对换 (i,k_1)，(i,k_2)，$\cdots(i,k_s)$，那末，经过这 s 次相邻对换后，原排列便变成排列 $\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots$，接着再作相邻对换 (i,j)，(k_s,j)，$\cdots(k_1,j)$，经过 $s+1$ 次相邻对换后，排列又变成 $\cdots jk_1\cdots k_si\cdots$，这就说明：把 $\cdots i\cdots j\cdots$，作一个对换 (i,j)，变成排列 $\cdots j\cdots i\cdots$，这个变换可以通过上述 $2s+1$ 次相邻对换来实

现。由 1 知每次相邻对换将改变排列的奇偶性，可知经过奇数$(2s+1)$次对换后，新排列$\cdots j\cdots i\cdots$与原排列$\cdots i\cdots j\cdots$的奇偶性相反。

推论　全部n级排列中，奇排列与偶排列各占一半，都是$\frac{n!}{2}$个$(n\geqslant 2)$。

证　假设在$n!$个n级排列中有p个奇排列，q个偶排列，我们来证：$p=q$。

将这p个奇排列的头两个数字都作一次对换，例如将$i_1i_2\cdots i_n$变为$i_2i_1\cdots i_n$，于是就得到p个偶排列，而且这p个排列各不相同。但是偶排列一共有q个，所以$p\leqslant q$。同理，将q个偶排列的头两个数字对换，便得到q个不同的奇排列，因此$q\leqslant p$。由此即得$p=q$，即奇排列的总数与偶排列的总数一样，因为这两种排列一共有$n!$个，所以它们各有$\frac{n!}{2}$个。

三、n阶行列式的定义

在中学里已经讲过，三阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

为了引入一般的即n阶行列式的概念，我们首先来看看三阶行列式的结构。

三阶行列式从结构看都具有如下几个特点：

（1）三阶行列式都是若干项的代数和，而每一项都是行列式中位于不同行不同列上的三个元素的乘积。若把位于行列式中第 i 行，第 j 列的元素记为 a_{ij}，三阶行列式的每一项总可写成 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$，其中的 $i_1i_2i_3$ 是自然数 1,2,3 的一个全排列。

(2)三阶行列式中每一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 的符号，决定于全排列 $i_1i_2i_3$ 的逆序数，当 $i_1i_2i_3$ 是偶排列时，项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 的符号取正号；反之，当 $i_1i_2i_3$ 是奇排列时，则项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 的符号取负值。

（3）由三个自然数 1,2,3 组成的所有不同的全排列共有 6 个，相应地三阶行列式便有六个项。

我们对三阶行列式的结构作了分析，总结出三个规律，概括起来，三阶行列式可写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1\ i_2\ i_3)} (-1)^{\tau(i_1\ i_2\ i_3)} \cdot \times a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}, \qquad (2)$$

其中 $\sum\limits_{(i_1\ i_2\ i_3)}$ 是指对所有排列 $(i_1i_2i_3)$ 求和，$\tau(i_1\ i_2\ i_3)$ 是排列 $i_1i_2i_3$ 的逆序数。

将三阶行列式的规律加以推广，我们有

定义1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$ 得到形如

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} \tag{3}$$

的项，其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为这个排列的逆序数．由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而式(3)的项共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} \tag{4}$$

称为**n 阶行列式**，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

特别当 $n=1$ 时，由数 a 确定的一阶行列式就是数 a 本身．

例2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由于这个行列式中，当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$．行列式中凡是含有这些零因数的项 $a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$ 均为零，因此

$$D = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$$

$$= \sum_{(1i_2\cdots i_n)} (-1)^{\tau(1i_2\cdots i_n)} a_{11}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

$$= \sum_{(12\cdots i_n)} (-1)^{\tau(12\cdots i_n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{ni_n}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad (6)$$

这就是说，这个行列式除了主对角线上 n 个元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 的乘积这一项 $a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$ 外，其余各项由于至少含有一个因素 0 而均为零，所以 $D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

以上形式的行列式，通常称为下三角形行列式.

同理，上三角形行列式也有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad (7)$$

特殊情形

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & d_2 \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 \cdots d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n. \qquad (8)$$

这种除了主对角线上的元素之外，其余元素均为 0 的行列式称为对角形行列式.

§2 n阶行列式的性质

行列式的性质是计算行列式以及进一步研究矩阵的重要依据。

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$, $D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式D'称为行列式D的转置行列式。

性质1 行列式与它的转置行列式相等，即$D=D'$。 (9)

（证明省略）

由于D的列（行）经过转置便是D'的行（列），因此在行列式中，凡对行成立的性质，根据性质1可知对列也成立，反之亦然。这说明：在行列式中，行与列的地位是同等的。

性质2 互换行列式的两行（列），行列式变号。

证 设行列式D互换i,j两行，得到行列式D_1：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots a_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots a_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}$$

为了说明方便，我们把D_1重新记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots b_{nn} \end{vmatrix},$$

当$k\neq i,j$时，$b_{kp}=a_{kp}$；当$k=i,j$时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$ $(p=1,2,\cdots,n)$根据行列式的定义，

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$为顺序排列，$\tau$为排列$p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$的逆序数，记排列$p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$的逆序数为$\tau'$，因为一次对换$(p_i,p_j)$改变了排列的奇偶性，所以$(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau'}$，所以

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &=-\sum(-1)^{\tau'}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &=-D. \end{aligned} \tag{10}$$

推论 **如果行列式有两行（列）对应元素相同，则此行列式为零。**

证 一方面，由于两行对应元素相同，所以互换这两行与没有互换时的行列式一样；另一方面，根据性质2，互换这两行后，新行列式$D=-D$，所以$D=0$。

性质3 **把行列式的某一行（列）的每个元素乘以同一数k，等于用数k乘此行列式。即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2}\cdots ka_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

（依定义可证，这里从略）

这个性质指出：当行列式的某一行（列）的各元素存在公因子k时，可以将这公因子k提到行列式外面去。

推论 **若行列式的某一行（列）的各元素均为0，则此行列式等于零。**

性质4 **若行列式中有两行（列）对应元素成比例，则此行列式等于零。**

证 因为在成比例的两行（列）中，若把其中的一行（列）提出比例常数k后，剩下行列式便有两行（列）是完全相同的，根据性质2的推论，可知行列式等于零。

性质5 **若行列式的某一列（行）的各元素均是两数之和。例如**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots(a'_{1j}+a''_{1j})\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots(a'_{2j}+a''_{2j})\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots(a'_{nj}+a''_{nj})\cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式D等于下列两个行列式之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a'_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a'_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a'_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a''_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a''_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a''_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

这由定义易证，从略。

性质6　在行列式的某一行（列）加上另一行（列）与某一数k的乘积，行列式不变．即

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots a_{jn} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}
. \qquad (13)
$$

证 按照性质5，上面等式右边的行列式等于两个行列式之和，前者便是上面等式左边的行列式，后者因有两行成比例可知等于零。

约定记号：用 r_i 表示第 i 行；c_i 表示第 i 列。$r_i \longleftrightarrow r_j$ 表示互换第 i 行与第 j 行；第 i 行乘以数 k，记作 $k\times r_i$；用 $r_i \pm kr_j$ 表示第 i 行加（减）k 与第 j 行之积，类似地可得到关于行列式列的记号。如 $c_i \longleftrightarrow c_j, kc_i, c_i \pm kc_j$。

如果行列式（13）的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots n)$ 就称这个行列式为对称行列式，例如

$$
\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}
$$

都是对称行列式。对称行列式主对角线上的元素可以任意的，一般的对称行列式可以写成

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\
a_{12} & a_{22} \cdots a_{2n} \\
\cdots & \cdots \\
a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

如果行列式式(3)的元素满足$a_{ij}=-a_{ji}$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$，就称它是**反对称行列式**．例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix},$$

都是反对称行列式．因$a_{ii}=-a_{ii}$，所以反对称行列式主对角线元素全等于零．一般的反对称行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

例3 证明奇数阶反对称行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0$$

证 由$D=D'=(-1)^nD=-D$。所以$D=0$。

例4 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}.$$