初中奥林匹克竞赛试题分类解析

初二数学

初中奥林匹克

竞赛试题分类解析

课堂内外杂志社 编

CHUZHONG AOLINPIKE JINGSAISHITI FENLEIJIEXI

四川科学技术出版社

初中奥林匹克
竞赛试题分类解析

（初二数学）

课堂内外杂志社　编

四川科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中奥林匹克竞赛试题分类解析.初二数学/课堂内外杂志社编.－成都:四川科学技术出版社,2002.1
ISBN 7－5364－4888－0

Ⅰ.初… Ⅱ.课… Ⅲ.数学课－初中－竞赛题－解题 Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 097258 号

总 策 划 刘信中
康利华
主　　编 张　杰
编　　委 郁卫星　沙春辉

初中奥林匹克竞赛试题分类解析

(初二数学)

课堂内外杂志社　编
责任编辑　洪荣泽　周科琪
封面设计　杨　峰
版面设计　景　朴
责任校对　渝　蓉
责任出版　李　珉
出版发行　四川科学技术出版社
成都盐道街 3 号　邮政编码 610012
开　　本　850mm×1168mm　1/32
印张 9.5　字数 171 千
印　　刷　成都宇川印刷厂
版　　次　2002 年 1 月成都第一版
印　　次　2002 年 1 月成都第一次印刷
印　　数　1－1 0000 册
定　　价　9.20 元
ISBN 7－5364－4888－0/G·891

■　版权所有·翻印必究　■

■本书如有缺页、破损、装订错误,请寄回印刷厂调换。
■如需购本书,请与本社邮购组联系。
地址/成都市盐道街 3 号
邮政编码/610012

前　言

全国初中应用数学、物理、化学、英语等学科奥林匹克竞赛是国家教委正式批准的一项全国性学科竞赛活动，是课外活动的一种好形式，是素质教育的一个方面，是因材施教的一个主渠道。它不仅有利于拓宽知识面，而且有利于加强教学的实践性，使各学科的基础知识与实际应用有机地结合起来。

为了配合初中学科奥林匹克竞赛的开展，为了给参赛的师生提供导向性的材料，我们约请了部分有丰富竞赛辅导经验的老师编写了这套《初中奥林匹克竞赛试题分类解析》，按初一数学、初二数学、初三数学、初二物理、初三物理、初三化学(上、下册)、初一英语、初二英语、初三英语，分册出版。

本书内容典型充实，形式灵活多变，深、广度有所拓展，力求达到举一反三的效果。它源于教材，高于教材，由浅入深，同步辅导，普及提高，相互兼顾。拥有本书，定有收益。

《初二数学分册》分六章。每章由知识要点、例题精讲、巩固练习三部分组成，每章后附有章节自测题（答案、少量提示附在书后）。

由于编写时间比较仓促，不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2002 年 1 月

课堂内外杂志社

培养科学创新精神，倡导全新教育理念，

KETANG NEIWAI

传播优秀文化知识，注重个人全面发展

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　因式分解

§1.1　因式分解的常用方法

知识要点

把一个多项式化为几个整式乘积的形式，叫作因式分解. 因式分解是初一时我们学过的多项式乘法的逆向变形. 因式分解是代数恒等变形的一种最基本的、行之有效的方法之一.

因式分解常用方法有：提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法.

教材中已学过的公式有：

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

完全平方公式：$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$

另外，我们补充如下公式：

立方和(差)公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

二项式完全立方：$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

三项式的完全平方：$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

例题精讲

例1　分解下列因式：

(1)$5m(a+b)-a-b$　(希望杯培训题)

(2)$7(a+x)^{n+1}-21(a+x)^n+14(a+x)^{n-1}$($n$ 为正整数)

分析 因式分解应首先考虑提公因式.

解 (1)原式$=5m(a+b)-(a+b)=(a+b)(5m-1)$

(2)原式$=7(a+x)^{n-1}[(a+x)^2-3(a+x)+2]$

$=7(a+x)^{n-1}(a+x-2)(a+x-1)$

评注:提公因式是各个项系数的最大公约数,相同字母的最低次幂.提取的公因式可以是单项式也可以是多项式.

例 2 分解因式$(a-b)a^6+(b-a)b^6$

分析 先提公因式,再考虑利用公式进行分解.

解 原式$=(a-b)a^6-(a-b)b^6=(a-b)(a^6-b^6)$

$=(a-b)(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a-b)^2(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

评注:对于形如a^6-b^6的因式分解既可以用平方差公式又可以用立方差公式.那么为什么先用平方差公式比先用立方差公式进行因式分解要简单?

例 3 分解因式$x^2-2xy+y^2-1$

分析 $x^2-2xy+y^2$是完全平方形式$(x-y)^2$,然后考虑用平方差公式.

解 原式$=(x-y)^2-1=(x-y+1)(x-y-1)$

例 4 分解因式 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

分析 观察题意知$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$,再由公式

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$知:

$a^3+b^3+c^3=3abc+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

解 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

$=[(a-b)+(b-c)+(c-a)][(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a-b)(b-c)-(a-b)(c-a)-(b-c)(c-a)]+3(a-b)(b-c)(c-a)$

$=3(a-b)(b-c)(c-a)$

评注:本题也可套用立方和公式逐步分解:

原式$=[(a-b)+(b-c)][(a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2]+(c-a)^3$

$=(a-c)[(a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2-(c-a)^2]$

$=(a-c)[(a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-a)(b+a-2c)]$

$=(a-b)(a-c)(a-b-b+c-b-a+2c)$

$=(a-c)(a-b)(3c-3b)=3(a-c)(a-b)(c-b)$

例 5 分解因式 $x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1$

分析 利用多项式的乘法易验证：

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$此公式亦可变形为：

$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$

解 原式$=\dfrac{(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x^2+x+1)}{x-1}=\dfrac{x^{16}-1}{x-1}$

$=\dfrac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)$

评注：在解本题时，先乘以 $x-1$，再除以 $x-1$ 的方法，称之为乘除法，希望同学们在学习中有意识地多培养解题技巧.

例 6 分解因式(1)$3x^2-12-8a+2ax$

(2)$x^3y^3-1+\dfrac{1}{8}x^3-8y^3$

分析 多项式有四个或四个以上的项，常考虑用分组分解的方法.

解 (1)原式$=x^2(3+2a)-4(3+2a)=(3+2a)(x^2-4)$

$=(3+2a)(x+2)(x-2)$

(2)原式$=(x^3y^3+\dfrac{1}{8}x^3)-(8y^3+1)=\dfrac{1}{8}x^3(8y^3+1)-(8y^3+1)$

$=(8y^3+1)(\dfrac{1}{8}x^3-1)=\dfrac{1}{8}(8y^3+1)(x^3-8)$

$=\dfrac{1}{8}(x-2)(x^2+4x+4)(2y+1)(4y^2-2y+1)$

评注：分组分解的目的，在于将原多项式用提公因式法或公式法等，进一步分解.

例 7 分解因式(1)$(x^2+x)^2-12(x^2+x)+36$

$(2)a^2+b^2+c^2-2bc+2ca-2ab$

分析 (1)将 x^2+x 视作一个数，则它是完全平方形式；(2)先进行分组，再考虑用提公因式法或公式法.

解 (1)原式$=(x^2+x-6)^2=[(x+3)(x-2)]^2=(x+3)^2(x-2)^2$

(2)原式$=(a^2-2ab+b^2)+(-2bc+2ca)+c^2$

$=(a-b)^2+2c(a-b)+c^2=(a-b+c)^2$

评注：(2)也可直接套用公式 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

例 8 分解因式(1)$x^2+(a+\frac{1}{a})xy+y^2\quad(a\neq0)$

$(2)x^2+2(a+b)x-(3a^2-10ab+3b^2)$

分析 一个多项式若关于某个字母成二次三项式的形式，一般可用十字相乘法分解.

$$\begin{array}{ccc}1 & & ay\\ & \times & \\ 1 & & \frac{1}{a}y\end{array}$$

解 (1)原式$=(x+ay)(x+\frac{1}{a}y)$

$=\frac{1}{a}(x+ay)(ax+y)$

$$\begin{array}{ccc}1 & & 3a-b\\ & \times & \\ 1 & & -(a-3b)\end{array}$$

(2)原式$=x^2+2(a+b)x-(3a-b)(a-3b)$

$=(x+3a-b)(x-a+3b)$

例 9 $(2^{48}-1)$可以被 60 与 70 之间的两个整数整除，求这两个数.（希望杯培训题）

分解 利用因式分解的方法对$(2^{48}-1)$进行分解质因数.

解 $\because\ 2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$

$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$

又 $\because\ 2^6+1=65,2^6-1=63\quad\therefore$ 这两个数为 65、63.

例 10 证明 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 对任何整数 n 都为整数且被 3 除余 2.

分析 将多项式 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 或该多项式的部分因式 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 分解成两个连续整数的乘积，即可得 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

整数;分解成三个连续整数的乘积即可得被 3 除余 2.

解 ∵ 原式$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-1=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{8}-1$

$=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-1$

∵ n、$n+1$ 是连续整数 ∴ $n(n+1)$是 2 的倍数

∴ $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-1$ 是整数

∵ $2n$、$2n+1$、$2n+2$ 是三个连续整数

∴ $2n(2n+1)(2n+2)$是 3 的倍数

即$\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$是 3 的倍数

∴ $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 被 3 除余 2.

例 11 试证：对任何整数 x 和 y, $x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$ 不等于 33.

证明 原式$=(x^5-5x^3y^2+4xy^4)+(3x^4y-15x^2y^3+12y^5)$

$=x(x^4-5x^2y^2+4y^4)+3y(x^4-5x^2y^2+4y^4)$

$=(x^4-5x^2y^2+4y^2)(x+3y)$

$=(x^2-y^2)(x^2-4y^2)(x+3y)$

$=(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y)(x+3y)$

∵ 33 不能分解为五个不同整因数的乘积

又若五个整因数中有两个相等，必然导致 $y=0$，即原式$=x^5\neq 33$,所以命题获证.

评注:例 10、例 11 都是利用因式分解处理整数问题,可见因式分解是代数式恒等变形的重要技能.

巩固练习

(一)选择题

(1)下面各式的因式分解中,正确的是(　　).

A. $ab-a+b+1=(a-1)(b+1)$

B. $4xy+1-4x^2-y^2=(1+2x-y)(1-2x-y)$

C. $3a-3b+ax-bx=(a-b)(3-x)$

D. $-4xy+1-4x^2-y^2=(1+2x+y)(1-2x-y)$

(2)计算:$19.95\times199.5+199.5\times89.94-1.995\times989=$(　　).

A. 19850　　B. 19950　　C.19840　　D.19940

(3)设 $a+b+c=3m$,则

$(m-a)^3+(m-b)^3+(m-c)^3-3(m-a)(m-b)(m-c)=$(　　).

A. $3m$　　B. 0　　C. m^3　　D. $3m^3$

(4)以下四个命题,正确的有(　　)个.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

①$(-2)^{1999}+(-2)^{2000}$ 分解因式后是 2^{1999};

②若 $2^{48}-1$ 能被 60 与 70 之间的两个整数所整除,这两个数为 65 和 67;

③若 $x^2+2(m-3)x+16$ 是完全平方式,则 $m=7$;

④多项式 $-x^2+2xy-y^2$ 可以用完全平方公式分解.

(5)整式 $2x^2y^2-2y^2+(xy-1)(x-1)^2$ 因式分解后,含有的因式有(　　).

A. $xy-1$　　B. x^2-1　　C. $x-1$　　D. $(x-1)^2$

(6)若 $a+b+c+d=0$,$a^3+b^3+c^3+d^3=3$,则 $abc+bcd+cda+dab=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 4

(二)填空题

(7)$(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)=$(　　).

(8)若 $x+y+z=0$,则 $x^3+y^3+z^3=$(　　).

(9)在代数式①$4x^2-4x+1$、②m^2+mn+n^2、③$64n^2+1$ 中(　　)是完全平方式.

(10)若 $a-b=-1$,$c-b=1$;则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$(　　).

(11)因式分解:$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=$(　　).

(12)已知：a、b、c 为三角形的三个边长，则代数式 $a^2-b^2-c^2-2bc$ 的值(　　)零(填大于、等于、小于).

(三)解答题

(13)计算 $100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$

(14)分解因式 $a^2b^2-(a+b)^2+2ab+1$

(15)已知 $x^3+x^2+x+1=0$　求 $x^{2000}+x^{1999}+\cdots+x^3+x^2+x+1$ 的值.

(16)分解下列因式：

①$(x^2+xy+y^2)(x^2+xy+3y^2)+y^4$

②$x^5(2x-1)^2-2x^3(2x-1)^3+x(2x-1)^4$

③$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

④$(am+bn)^2+(bm-an)^2$

(17)已知正数 a、b、c 满足 $ab+a+b=bc+b+c=ac+a+c=3$，求 $(a+1)(b+1)(c+1)$的值.

(18)求证 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$ 能被 $a+b+c$ 整除.

(19)若 a、b、c 均为正数，且 $(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$，求证 $a=b=c$.

(20)证明 $3^{24}-1$ 能被 91 整除.

§1.2　因式分解的常用技巧(一)

知识要点

因式分解除以上所讲的常用方法外，还常用到配方法、拆项/添项法、换元法、双十字相乘法等解题技巧.

(1)配方法

在代数式运算中，有时需要凑成完全平方项、完全立方项，这种方法通常称做配方法.配方法不仅在因式分解中有用处，而且在将来的学习中有广泛应用.

(2)拆项/添项法

在因式分解中，有时将某一项拆成两个项的和、差形式；或添

上某一项再减去这一项的方法，称之为拆项/添项法.

(3)换元法

在代数式运算中、有时需要把一个代数式中的某些部分看成一个整体，并用一个字母来表示，称作换元法. 换元法的优点是能使某些数量关系明朗化，从而简便了运算.

(4)双十字相乘法

对形如 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ 的多项式进行因式分解，可先将所有二次项进行十字相乘；再对所得的结果利用十字相乘法分解，称之为双十字相乘法.

掌握以上四种方法，对提高因式分解的技能技巧，以及对代数式的运算、恒等变形都是十分有益的.

例题精讲

例 1 利用配方法分解因式：(1) x^2-4x-5 (2) x^4+4x^2

分析 观察得知：(1)、(2) 均可配成完全平方减去某一常数的形式.

解 (1)原式 $=x^2-4x+4-4-5=(x-2)^2-9$

$=(x-2+3)(x-2-3)=(x+1)(x-5)$

(2)原式 $=x^4+4x^2+4-4=(x^2+2)^2-2^2=x^2(x^2+4)$

评注：实际上(1)用十字相乘法，(2)用提公因式法更简单，同学们自己试一下.

例 2 已知 $(a^2+1)(b^2+4)=8ab$ 求 $a+(\frac{b}{2})^{1997}$ 的值

分析 将原等式中的代数式配成两个完全平方形式：

解 $a^2b^2+4a^2+b^2+4-8ab=0$

$(a^2b^2-4ab+4)+(4a^2-4ab+b^2)=0$

$(ab-2)^2+(2a-b)^2=0$

$ab-2=0$ 且 $2a-b=0$

$\therefore$ $a=1$ 时，$b=2$；$a=-1$ 时，$b=-2$ $\therefore$ $a+(\frac{b}{2})^{1997}=2$ 或 -2

评注:在本题的代数变形中,用到了配方法、拆项法两种方法.

例 3 分解因式 x^3-9x+8

分析 根据系数的特点将 8 拆成-1 和 9 两项.

解 原式$=(x^3-1)+(-9x+9)=(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-8)$

评注:本题可将$-9x$ 拆成$-x$ 和$-8x$ 两项,则原式$=x^3-x-8x+8=x(x+1)(x-1)-8(x-1)=(x-1)(x^2+x-8)$;也可将 x^3 拆成 $9x^3$ 和$-8x^3$ 两项,则原式$=9x^3-8x^3-9x+8=(9x^3-9x)-(8x^3-8)=9x(x+1)(x-1)-8(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x^2+x-8)$.

例 4 因式分解 $x^3+8x^2+17x+10$

分析 可将一次项 $17x$ 拆成 $8x$、$10x$ 和$-x$ 三项.

解 原式$=x^3+8x^2+8x+10x-x+10$

$=(x^3-x)+(8x^2+8x)+(10x+10)$

$=x(x+1)(x-1)+8x(x+1)+10(x+1)$

$=(x+1)(x^2+7x+10)=(x+1)(x+2)(x+5)$

评注:拆项/添项法实际上要考察各项系数特点. 本例的多项式中奇次项系数之和,等于偶次项系数和,即 $1+17=8+10$. 因而由 $10=1+17-8$ 可拆常数项,即有:

原式$=x^3+8x^2+17x+1+17-8=(x^3+1)+(8x^2-8)+(17x+17)$

$=(x+1)(x^2-x+1)+8(x+1)(x-1)+17(x+1)$

$=(x+1)(x^2+7x+10)=(x+1)(x+2)(x+5)$

由 $1+17=8+10$ 得 $8=1+17-10$,则应如何拆项呢?

例 5 分解因式 $x^4+x^3-3x^2-4x-4$

解 原式$=(x^4+x^3-2x^2)-(x^2+4x+4)=x^2(x^2+x-2)-(x+2)^2$

$=x^2(x+2)(x-1)-(x+2)^2=(x+2)(x^3-x^2-x-2)$

$=(x+2)[(x^3-2x^2)+(x^2-2x)+(x-2)]$

$=(x+2)[x^2(x-2)+x(x-2)+(x-2)]$

$=(x+2)(x-2)(x^2+x+1)$

评注:本例属较复杂的拆项/添项法,在第一步将$-3x^2$ 拆成

$-2x^2$、$-x^2$;在第五步将$-x^2$拆成$-2x^2$和x^2,$-x$拆成$-2x$和x.

例 6 分解因式 $x^4+1999x^2+1998x+1999$

分析 将 1999 设为 a,便于本例的分组分解.

解 原式$=x^4+ax^2+(a-1)x+a=(x^4-x)+(ax^2+ax+a)$

$=x(x-1)(x^2+x+1)+a(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+a)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1999)$

例 7 因式分解$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$

解 设 $xy=a,x+y=b$,则

原式$=(a-1)^2+(b-2)(b-2a)=(a-b+1)^2=(xy-x-y+1)^2$

$=[(x-1)(y-1)]^2=(x-1)^2(y-1)^2$

评注:试着利用本例方法分解$(x+y)^3+2xy(1-x-y)-1$.

例 8 分解因式$(x+1)^4+(x+3)^4-272$

分析 如果将$(x+1)^4$、$(x+3)^4$展开,显然不可能,可采取均值换元,即取 $x+1$、$x+3$ 的平均值 $x+2$.

解 原式$=(y-1)^4+(y+1)^4-272=2y^4+12y^2-270$

$=2(y^4+6y^2-135)=2(y^2+15)(y^2-9)$

$=2(y^2+15)(y+3)(y-3)=2(x^2+4x+19)(x+5)(x-1)$

例 9 分解因式 $2a^2-b^2-ab+bc+2ca$

分析 观察本题可将 a 视作主元,b、c 看作常量,这样就可将多项式化为关于字母 a 的二次三项式.

解 原式$=2a^2+(2ca-ab)-(b^2-bc)$

$=2a^2+(2c-b)a-b(b-c)$

$=(2a+b)(a-b+c)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & b \\ 1 & & -(b-c) \end{array}$$

例 10 分解因式 $2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2$.(1997 年希望杯培训题)

分析 可考虑双十字相乘法,先分解二次项 $2x^2-5xy-3y^2$.

解 原式$=(2x+y)(x-3y)+(3x+5y)-2=(2x+y-1)(x-3y+2)$

评注:本例也可仿例 9 中的解法,以 x 为主元,则

原式$=2x^2-(5xy-3x)-(3y^2-5y+2)=2x^2-(5y-3)x-(y-1)(3y-2)$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.