JIXIELING
JIANZHEN
DONGJISUAN

崔光彩 杨双朝 编

机械零件振动计算

机械零件振动计算

河南科学技术出版社

机械零件振动计算

崔光彩　杨双朝编

责任编辑　孟庆云

河南科学技术出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

郑州市新华书店发行

787×1092毫米 16 开本 22 印张454千字

1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷

印数1—4,340册

ISBN 7-5349-0053-0/T·54

定价5.10元

内 容 简 介

本书在简要介绍机械设计振动理论的基础上，着重论述了齿轮传动振动和噪声、径向液体动压滑动轴承的动态性能、滚动轴承的振动和噪声、轴的振动计算及圆柱螺旋弹簧振动和冲击效应。同时，对减轻机械零件振动的措施作了必要的说明。

本书可供大专院校机械设计、机械制造类有关专业师生及机械工程技术人员参考。

序　言

随着工业和科学技术的飞速发展，机械设计中的振动问题已成为普遍需要认真研究和解决的重要课题了。

从现已出版的机械设计振动计算方面的书籍来看，崔光彩和杨双朝同志编著的《机械零件振动计算》内容比较丰富，也是国内第一本有关机械零件振动计算方面的书籍。本书理论与实际并重，总结了作者本人的研究工作，汇集了国内外一些重大研究成果。在简要介绍机械设计应用振动学原理的基础上，着重论述了机械设计中的齿轮传动振动和噪声、径向液体动压滑动轴承的动态性能、滚动轴承的振动和噪声、轴（转子）的振动及圆柱螺旋弹簧的振动和冲击效应，并有设计计算实例。这本书阐述简明，条理清楚，对学习现代机械零件振动计算理论和具体计算方法都将会有较大的帮助。

这本书具有较高的理论系统性和实用性，将对现代机械设计中的振动计算起到应有的作用，也是现代工科大学机械设计、机械制造类专业师生和广大机械设计人员必需的重要参考书。

朱景梓

1985.4

前　言

在近几十年机械工业的飞速发展过程中，出现了日益增多的机械振动问题。当设计人员设计新的机械系统时，都会遇到机械振动性能和机械零件的振动计算。为了保证机械系统和机械零件具有良好的运转性能和可靠性，机械振动已成为机械设计领域里普遍需要认真研究和解决的重要课题之一。随着电子计算机的广泛应用，先进的振动测试和分析技术的出现，以及振动理论的研究和发展，使我们有可能解决远比以往复杂得多的机械设计振动问题。

机械设计中的机械零件振动计算，是振动理论的具体应用。论述机械零件振动计算的大量文献，零散在许多不同的刊物和资料中，为方便机械设计人员和高等院校师生掌握机械零件振动理论和计算方法，编写了这本既概括机械设计振动理论，又对机械设计中的机械零件振动计算起指导作用的参考书。

本书第一部分《应用振动学原理》，是结合机械设计中的轴系、传动系统等来论述的，它为本书第二部分具体机械零件的振动分析计算提供了理论基础和原则方法。本书第二部分《机械零件振动计算》，具体分析齿轮传动、轴、滑动轴承、滚动轴承及弹簧的振动机理。通过实例说明机械零件振动计算方法和减小振动的措施。

本书书稿，全部由崔光彩编写。出版前，书稿中的第二章和第三章经杨双朝修改、整理。

在编写本书过程中，得到朱景梓教授和卢锡畴教授的指导，并承朱景梓教授审阅，特此表示感谢。由于编者水平所限，书中可能会有一些不妥之处，热忱地希望广大读者给予指正。

编　者

1985年元月

目 录

第一部分 应用振动学原理

第二部分 机械零件振动计算

第一部分　应用振动学原理

第一章　机械振动运动学概念

§ 1-1　简谐振动

机械振动是一种特殊形式的运动。在这种运动过程中，机械系统将围绕平衡位置作往复运动。从运动学观点看，机械振动是指机械系统的某些物理量（位移、速度、加速度），在某一数值附近随时间 t 的变化关系。这种关系如果是确定的，即运动经过相等的时间间隔 T 又重复出现，这种运动称为周期振动。重复一次的时间间隔 T 称为振动周期，它的倒数 $f=\frac{1}{T}$ 称为频率。如果运动用时间函数 $x(t)$ 表示，则任何周期振动必须满足下式：

$$x(t)=x(t+T)$$

不规律的振动是没有一定周期的，但它可以看作是由大量的具有不同频率的有规律振动的总和。这种振动的性质可以用统计学方法来描述。

周期振动中最简单的是简谐振动。我们可以用一个简单的实验来演示简谐振动的特性。图1·1-1所示为弹簧上悬挂着一个质量块。在静止时给质量块以轻轻一击，质量块便在原来静平衡位置附近上下振动。如果在质量块上放一个小光源，使一束光线照射在一条匀速水平移动的光敏纸带上，记录下质量块的运动过程，则这一运动过程可用下述正弦函数表达

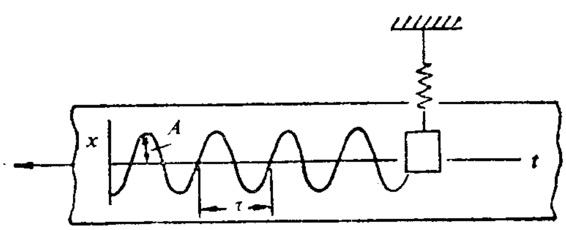

图 1·1-1

$$x=A\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{1·1-1}$$

式中 T 即为周期，A 为离开静平衡位置的最远距离，称为振幅。这种按时间的正弦函数（或余弦函数）所作的振动，称为简谐振动。

上述简谐振动还可以用一个作等速圆周运动的点在铅垂轴线上的投影来表示。如图1·1-2，一长度为 A 的直线 OP，以等角速度 ω 绕 O 点转动，任一瞬时 t，OP 在铅垂

线上的投影为

$$x = A\sin\omega t \tag{1·1-2}$$

式中，ω的单位是每秒弧度(rad/s)，并称为圆频率；ωt 称为相位，表示OP在时间 t 的转角，单位是弧度。

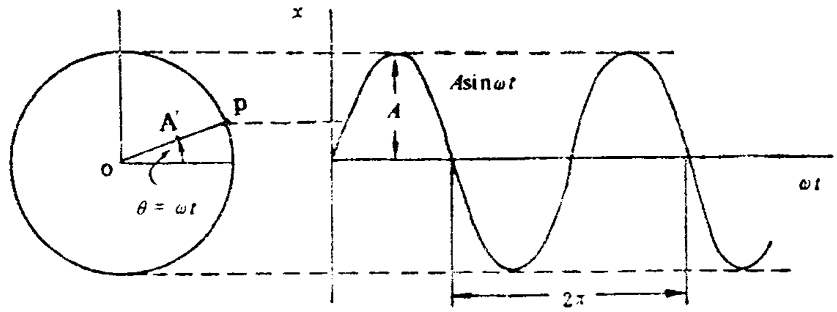

图 1·1—2

由于经2π弧度后运动将重复，因此有如下关系

$$\omega T = 2\pi$$

或

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{1·1-3}$$

式中，周期T的单位用秒(s)，频率f的单位用次每秒（次/s）

对于点的圆周运动，用复数表示是很方便的。圆的半径OP 用复矢量Z表示，它可用下式分为实数和虚数两部分

$$Z = Ae^{i\theta} = A\cos\theta + iA\sin\theta \tag{1·1-4}$$

用$\theta = \omega t$代换，Z的分量可表示为时间的正弦波函数

$$ReZ = A\cos\omega t$$

$$ImZ = A\sin\omega t$$

当研究两个同频率但相差一个相位角φ的简谐振动时，这两个振动可用复矢量表示如下

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= A_1 e^{i\omega t} \\ Z_2 &= A_2 e^{i(\omega t+\varphi)} \end{aligned}\right\} \tag{1·1-5}$$

式中，A_1、A_2 均为实数。把简谐振动表示为复矢量形式后运算比较容易。

简谐振动的速度$\dot{x}$和加速度$\ddot{x}$，可从方程式(1·1-2)求导得到

$$\dot{x} = \omega A\cos\omega t = \omega A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1·1-6}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\sin\omega t = \omega^2 A\sin(\omega t + \pi) \tag{1·1-7}$$

显然，速度和加速度均为具有同一频率的简谐函数，但相位角比位移分别超前 $\pi/2$和π（图(1·1-3)）。

由方程式(1·1-2)和(1·1-7)知

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad (1\cdot1\text{-}8)$$

这说明，在简谐振动中加速度正比于位移而指向原点。牛顿第二定律指出，加速度正比于作用力，因而简谐振动可认为是具有变化力为kx的线性弹簧系统的振动。

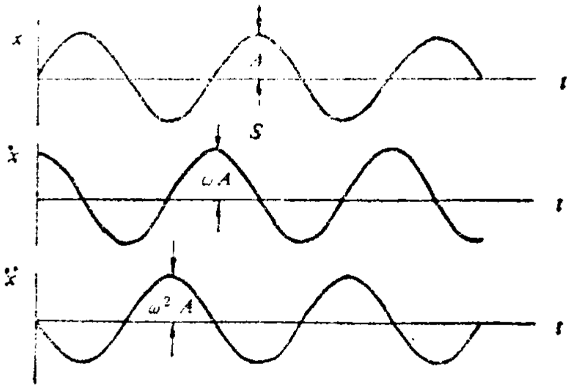

图 1·1-3

§ 1-2 谐波分析

上述简谐振动是一种最简单的周期振动。实际机械工程问题中更多的是非简谐的周期振动。一般的周期振动可以通过谐波分析分解成简谐振动。

按照级数理论，任何一个周期函数，只要满足一定的条件都可以展成J·付立叶级数。

设有一个周期性振动函数$x(t)$，它的周期为T，可以展成付立叶级数

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_1 t + a_2\cos 2\omega_1 t + \cdots\cdots \\ &\quad + b_1\sin\omega_1 t + b_2\sin 2\omega_1 t + \cdots\cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t + b_n\sin n\omega_1 t) \end{aligned} \qquad (1\cdot2\text{-}1)$$

式中$\omega_1 = 2\pi/T$称为基频；$n\omega_1$($n=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots$)称为倍频；$a_0$、$a_n$、$b_n$ 均为待定常数。只要函数$x(t)$为已知，求a_0时将(1·2-1)式的两边都乘以dt，求a_n时两边都乘以$\cos n\omega_1 t dt$，求b_n时两边都乘以$\sin n\omega_1 t dt$，然后依次在$t=0$到$t=T$一个周期内逐项积分，利用三角函数族的正交性，即可得到a_0、a_n、b_n之值。

由三角函数正交性：

$$\int_0^T \cos m\omega_1 t\cos n\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{当} m\neq n \text{时} \\ \dfrac{T}{2} & \text{当} m=n \text{时} \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin m\omega_1 t\sin n\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{当} m\neq n \text{时} \\ \dfrac{T}{2} & \text{当} m=n \text{时} \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin m\omega_1 t\cos n\omega_1 t dt = \int_0^T \cos m\omega_1 t\sin n\omega_1 t dt = 0$$

$$\int_0^T \cos n\omega_1 t dt = 0 \qquad n\neq 0$$

$$\int_0^T \sin n\omega_1 t dt = 0$$

利用这些关系就使上述逐项积分的结果，在等式右边除了$m=n$的一项外，其余各项都等于零，从而得到

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \tag{1·2-2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t \tag{1·2-3}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t \tag{1·2-4}$$

将a_0、a_n、b_n值代入(1·2-1)式，相应的富氏级数就完全确定。

现在分析公式(1·2-1)中频率同为$n\omega_1$的两项。它们的和可以写成

$$\begin{aligned}&a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t\\&=\sqrt{a^2{}_n+b^2{}_n}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a^2{}_n+b^2{}_n}}\cos n\omega_1 t+\frac{b_n}{\sqrt{a^2{}_n+b^2{}_n}}\sin n\omega_1 t\right]\\&=A_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n)\end{aligned}$$

式中，$A_n=\sqrt{a^2{}_n+b^2{}_n}$，$\mathrm{tg}\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}$

因此，公式(1·2-1)也可表达为

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

显然，两频率相同的简谐振动，可以合成一个简谐振动。

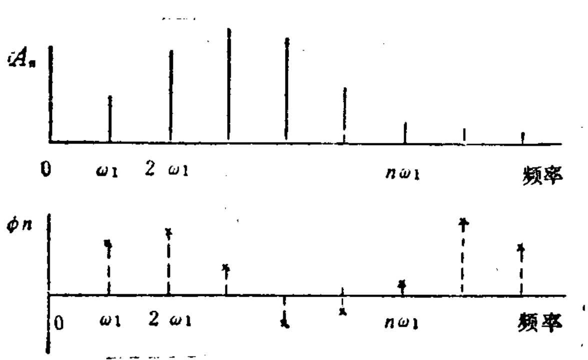

图 1·2-1

为了把谐波分析的结果形象化，可以把A_n和φ_n与ω之间的变化关系用图形来表示，如图 1·2-1 所示。因为只是在$n\omega_1$($n=1$，2，3……)各点A_n和φ_n才有一定的数值，所以图形是一组离散的垂线，这种图形称为函数的频谱。

目前借助数字电子计算机，频谱分析可在很短时间内完成。 6

第二章　单自由度系统振动

§ 2-1　导引

在分析机械系统的振动问题时，往往需要把它简化为若干“无质量”的弹簧和“无弹性”的质量所组成的模型，称为弹簧质量系统。如图 2·1-1 所示是一个最简单的振动系统，它只包含一个弹簧 k 和一个质量 m。

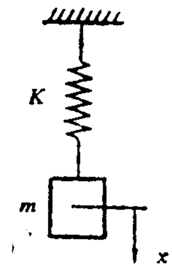

图 2·1-1

一个振动系统的自由度是指在振动过程中任何瞬时都能完全确定系统在空间的几何位置所需要的独立坐标的数目。一个振动系统究竟有多少个自由度，常常是相当复杂的问题。这不仅取决于系统本身的结构特性，还要根据我们所研究的振动问题的性质、要求的精确度以及振动的实际情况等来确定。对系统简化的结果是否正确，最后还要通过实测来检验。

本章只讨论单自由度系统。图 2·1-1 所示弹簧质量系统，质量 m 作为一个质点在空间有三个自由度。但如果它只在垂直方向作上下振动，则在振动过程中任何瞬时，系统的几何位置便只需要用一个独立坐标 x 就可以完全确定，即单自由度系统。

根据不同的振动形式，独立坐标可以选取线位移 $x(t)$ 或角位移 $\theta(t)$ 来表示。

§ 2-2　自由振动系统

2-2-1　力的迭加原理

现在讨论图2·2-1所示单自由度弹簧质量系统的自由振动。质量块的质量为 m(kg)，

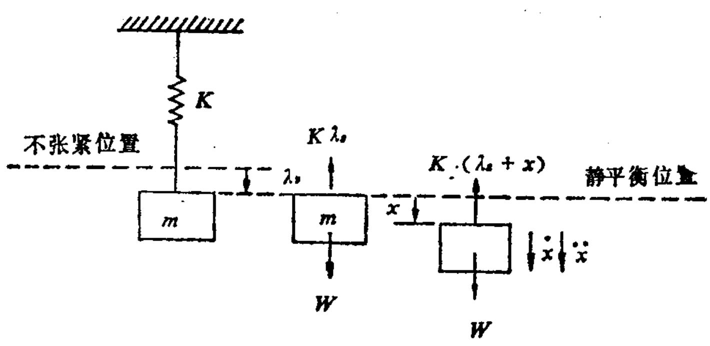

图 2·2-1

它所受重力为W，弹簧刚度为k(N/m)。

当质量块没有加到弹簧上时，弹簧处于自由状态，不受拉伸。当质量块联结到弹簧上而没有振动时 系统处于静平衡状态，弹簧受重力W的作用产生拉伸变形λ_s，称为系统的静变形。由质量块的静平衡条件得

$$k\lambda_s = W \tag{2·2-1}$$

当这个系统受到外界某种初始干扰，系统失去静平衡状态、则弹簧力将不再与重力平衡。而产生不平衡的弹性恢复力，系统靠这种弹性恢复力维持自由振动。位移x从静平衡位置度量，因此作用在质量块上的力是$k(\lambda_s + x)$和W。规定x向下为正，取所有与x方向一致的力，速度和加速度为正。根据牛顿第二定律，得质量块m的运动微分方程式

$$m\ddot{x} = \sum F = W - k(\lambda_s + x)$$

因为$k\lambda_s = W$，上式可简化为

$$m\ddot{x} = -kx$$

或

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2·2-2}$$

很显然，选择静平衡位置作为参考坐标，可以从运动微分方程中消去重量W和弹簧的静力$k\lambda_s$。而作用在质量块m上的合力就只有由于弹簧位移x而产生的力了。

下面解微分方程(2·2-2)，引进符号p表示固有圆频率

$$p^2 = \frac{k}{m} \tag{2·2-3}$$

方程式(2·2-2)可改写为

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{2·2-4}$$

与方程式(1·1-8)比较可知，这个振动系统作简谐振动。上式为二阶齐次线性微分方程，其通解为：

$$x = b_1 \cos pt + b_2 \sin pt \tag{2·2-5}$$

式中b_1、b_2是两个待定常数，由振动的初始条件决定。

从式(2·2-5)可知，这个弹簧质量系统的自由振动，由两个同频率的简谐振动组成，根据上一章的证明，合成后仍然是一个简谐振动。可用下式表达

$$x = A\sin(pt + \varphi) \tag{2·2-6}$$

式中，$A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$，$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{b_1}{b_2}$

振动的固有周期可以从$pT = 2\pi$得到，或

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{s} \tag{2·2-7}$$

固有频率f为

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \mathrm{Hz} \tag{2·2-8}$$

根据方程式(2·2-1)，取$k\lambda_s=mg$，则上述各式均可表示为静变位 λ_s 的函数。显然，单自由度振动的固有频率f只决定于静变位λ_s，即

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\lambda_s}} \tag{2·2-9}$$

式(2·2-5)中的两个待定常数b_2和b_2应根据振动的初始条件决定。设振动初始条件为

$t=0$时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$

可解得

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{2·2-10}$$

上式称为系统对于初始条件为x_0与$\dot{x}_0$的响应。同时，根据(2·2-6)式可求得系统自由振动的振幅A和初位相φ：

$$\left.\begin{aligned} A&=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \\ \varphi&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x_0 p}{\dot{x}_0} \end{aligned}\right\} \tag{2·2-11}$$

当需要用角位移θ作为独立坐标来表达扭转振动问题时，我们运用牛顿第二定律得到转动方程式

$$I\ddot{\theta}==\sum M \tag{2·2-12}$$

式中，I是转动物体对于转动轴的转动惯量，$\ddot{\theta}$是角加速度，M是施加于扭转物体上的力矩，它的方向与θ角位移一致时为正。

设扭转振动系统的扭转刚度为$k\vartheta$(N·m/rad)，(2·2-12)式可写成系统扭振的微分方程式

$$I\ddot{\theta}=-k_\theta\vartheta$$

或

$$\ddot{\theta}+p^2\theta=0 \tag{2·2-13}$$

式中，

$$p^2=\frac{k_\theta}{I} \tag{2·2-14}$$

微分方程式(2·2-13)的通解为

$$\theta=A\sin(pt+\varphi) \tag{2·2-15}$$

式中，A与φ同样是两个待定常数，决定于扭转振动的初始条件。

$t=0$，$\theta=\vartheta_0$，$\dot{\theta}=\dot{\theta}_0$

同理可得扭振系统自由振动的振幅A和初位相φ：

$$
\left.\begin{aligned}
A&=\sqrt{\theta_0^2+\left(\frac{\dot{\theta}_0}{p}\right)^2}\\
\varphi&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\theta_0 p}{\dot{\theta}_0}
\end{aligned}\right\} \tag{2·2-16}
$$

一个单自由度系统的扭振也是简谐振动。它的固有圆频率由(2·2-14)式得

$$p=\sqrt{\frac{k\theta}{I}} \tag{2·2-17}$$

固有频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k\theta}{I}} \tag{2·2-18}$$

周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{k\theta}} \tag{2·2-19}$$

2-2-2 能量方法

在保守系统中总能量是不变的，运动微分方程可以根据能量守恒原理建立。对无阻尼的自由振动系统，能量的一部分是系统中运动质量所具有的动能T，另一部分是系统由于弹性变形而储存的弹性势能U，或由于重力作功而产生的重力势能。由于总能量不变，其变化率为零，可用下式表示

$$T+U=\text{常数} \tag{2·2-20}$$

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0 \tag{2·2-21}$$

如果我们的目的是确定系统的固有频率，则可用下述方法。根据能量守恒原理，我们可以写出

$$T_1+U_1=T_2+U_2 \tag{2·2-22}$$

即任意选择两个瞬时位置1与2，其能量总和应该相等。对于简谐振动，我们通常选择质量块正经过静平衡位置时作为第一瞬时位置，此时速度最大，动能也最大，$T_1=T_{max}$；取此时为势能$U_1=0$。再选择质量块达到最大位移时作为第二瞬时位置，此时速度为零，动能$T_2=0$，而势能为最大$U_2=U_{max}$，因此有：

$$T_1+0=0+U_2$$

或

$$T_{max}=U_{max} \tag{2·2-23}$$

从上式可直接得到固有频率。

例：确定图2·2-2所示扭转摆的固有频率。

解：设摆运动是简谐振动

$\theta = A\sin(pt+\varphi)$

其最大动能和势能是：

$$T_{max} = \frac{1}{2}I\cdot\dot{\theta}^2{}_{max} = \frac{1}{2}Ip^2A^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}k_\theta\theta^2{}_{max} = \frac{1}{2}k_\theta A^2$$

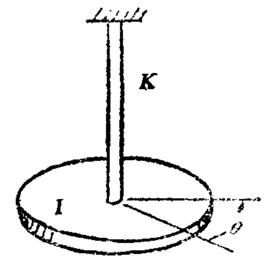

图 2·2-2

使最大动能和最大势能相等，可得固有频率表达式

$$p = \sqrt{\frac{k_\theta}{I}}$$

2-2-3 质量模拟

在以上讨论中，我们在计算固有频率时都假定弹簧和其它运动元件没有质量。而弹簧和其它运动的元件常占系统总质量的相当部分，如果略去这部分质量，将会导致计算出来的固有频率偏高。

为了较准确的估算固有频率，我们把弹簧和其它运动元件的分布质量对系统振动频率的影响考虑进去，计算它们的附加能量。附加能量 T_S 的综合影响可以表示为集中质量的速度$\dot{x}$的函数，即

$$T_S = \frac{1}{2}m_S\dot{x}^2 \tag{2·2-24}$$

式中，m_S是弹簧和其它运动元件的等效质量。

例：求图2·2-3所示系统在计算固有频率时的弹簧有效质量。

解：设弹簧在联结质量块m的一端位移为x，弹簧轴向长度为l，则距固定端y处的位移为$\frac{yx}{l}$。因此，当质量块m在某一瞬时的速度为$\dot{x}$时，弹簧在y处的微段dy的相应速度为$\frac{y\dot{x}}{l}$。ρ为弹簧单位长度的质量，则弹簧微段dy的动能为

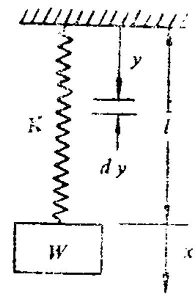

图 2·2-3

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{y\dot{x}}{l}\right)^2 dy$$

整个弹簧的动能为

$$T_S = \frac{1}{2}\rho\int_0^l\left(\frac{y\dot{x}}{l}\right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho l}{3}\cdot\dot{x}$$