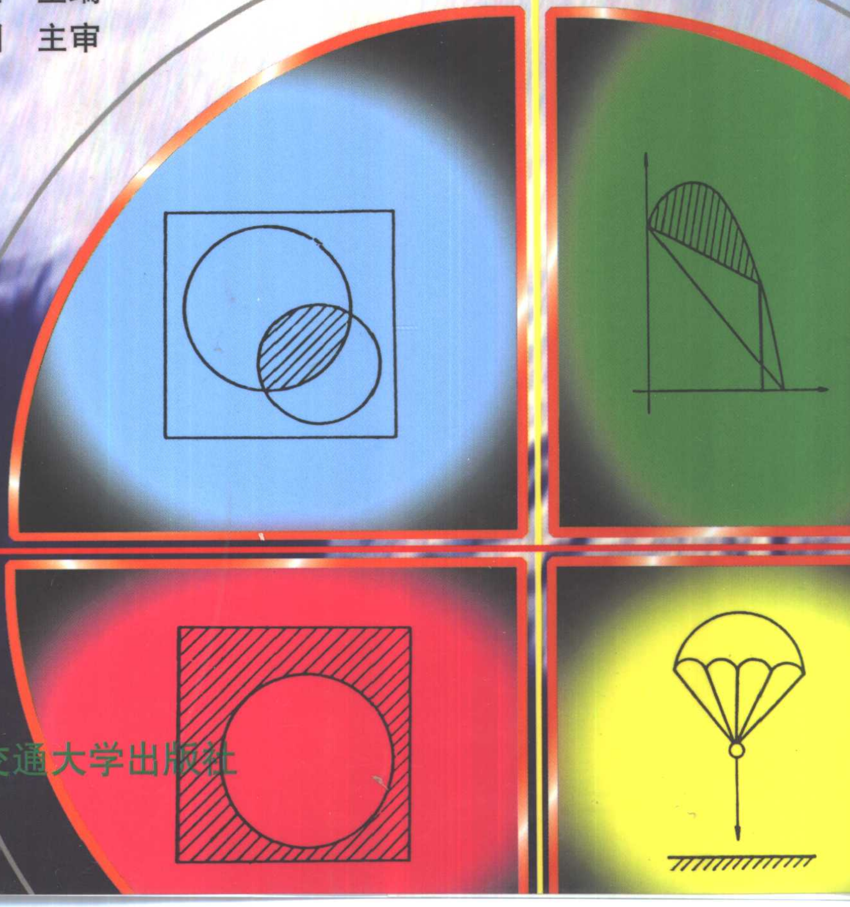
21世纪高职高专通用教材

应用高等数学

下册

赵焕宗　主编
刘振周　主审



上海交通大学出版社

21 世纪高职高专通用教材

应用高等数学

（下册）

主　编　赵焕宗
主　审　刘振周

上海交通大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学 下册/赵焕宗主编. 一上海:上海交通大学出版社,1999(2000.6 重印)

ISBN 7-313-02116-X

Ⅰ.应… Ⅱ.赵… Ⅲ.应用数学:高等数学-高等教育:技术教育-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 28984 号

应用高等数学

(下 册)

赵焕宗 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

上海交通大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:11.25 字数:288 千字

1999 年 7 月第 1 版 2000 年 6 月第 3 次印刷

印数:8101～13150

ISBN 7-313-02116-X/O·154 定价:15.00 元

21世纪高职高专通用教材编纂委员会

序

发展高等职业技术教育，是实施科教兴国战略、贯彻《高等教育法》与《职业教育法》、实现《中国教育改革与发展纲要》及其《实施意见》所确定的目标和任务的重要环节；也是建立健全职业教育体系、调整高等教育结构的重要举措。

近年来，年青的高等职业教育以自己鲜明的特色，独树一帜，打破了高等教育界传统大学一统天下的局面，在适应现代社会人才的多样化需求、实施高等教育大众化等方面，做出了重大贡献。从而在世界范围内日益受到重视，得到迅速发展。

我国改革开放不久，从1980年开始，在一些经济发展较快的中心城市就先后开办了一批职业大学。1985年，中共中央、国务院在关于教育体制改革的决定中提出，要建立从初级到高级的职业教育体系，并与普通教育相沟通。1996年《中华人民共和国职业教育法》的颁布，从法律上规定了高等职业教育的地位和作用。目前，我国高等职业教育的发展与改革正面临着很好的形势和机遇：职业大学、高等专科学校和成人高校正在积极发展专科层次的高等职业教育；部分民办高校也在试办高等职业教育；一些本科院校也建立了高等职业技术学院，为发展本科层次的高等职业教育进行探索。国家学位委员会1997年会议决定，设立工程硕士、医疗专业硕士、教育专业硕士等学位，并指出，上述学位与工程学硕士、医学科学硕士、教育学硕士等学位是不同类型的同一层次。这就为培养更高层次的一线岗位人才开了先河。

高等职业教育本身具有鲜明的职业特征，这就要求我们在改革课程体系的基础上，认真研究和改革课程教学内容及教学方法，

努力加强教材建设。但迄今为止，符合职业特点和要求的教材却似凤毛麟角。由泰州职业技术学院、上海第二工业大学、金陵职业大学、扬州职业大学、彭城大学、沙州工学院、上海交通高等职业技术学校、上海农学院、上海汽车总公司职工大学、江阴职工大学、江南学院、常州职业技术师范学院、苏州职业大学、锡山市职业教育中心、宁波高等专科学校、上海工程技术大学等60余所院校长期从事高等职业教育、有丰富教学经验的资深教师共同编写的《21世纪高职高专通用教材》，将由上海交通大学出版社陆续向读者朋友推出，这是一件值得庆贺的大好事，在此，我们表示衷心的祝贺。并向参加编写的全体教师表示敬意。

高职教育的教材面广量大，花色品种甚多，是一项浩繁而艰巨的工程，除了高职院校和出版社的继续努力外，还要靠国家教育部和省(市)教委加强领导，并设立高等职业教育教材基金，以资助教材编写工作，促进高职教育的发展和改革。高职教育以培养一线人才岗位与岗位群能力为中心，理论教学与实践训练并重，二者密切结合。我们在这方面的改革实践还不充分。在肯定现已编写的高职教材所取得的成绩的同时，有关学校和教师要结合各校的实际情况和实训计划，加以灵活运用，并随着教学改革的深入，进行必要的充实、修改，使之日臻完善。

阳春三月，莺歌燕舞，百花齐放，愿我国高等职业教育及其教材建设如春天里的花园，群芳争妍，为我国的经济建设和社会发展作出应有的贡献！

叶春生
2000年4月5日

前　言

《应用高等数学》是高等职业技术教育系列通用教材之一，全书分上、下两册。上册包括向量代数与空间解析几何，函数、极限与连续性，微分学，微分学的应用，一元函数积分学，二元函数积分学等共 6 章，82 学时。下册包括常微分方程，级数，行列式，矩阵，线性方程组，随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，参数估计，假设检验，数值计算，数学建模初步等共 13 章，72 学时。学时数不含“*”部分内容，“*”部分内容供各校根据实际情况选用。

本书以“必须够用”为度，与普通专科《高等数学》教材相比，作了较大的改革，主要特色体现在以下四个方面：

(1) 在保留高等数学核心内容的前提下，教学课时有较大幅度的压缩，以适应高职教育少学时高等数学教学的需要。

(2) 优化组合经典内容体系，将方法相同或相似的内容放在一起讲，避免相关内容的重复和割裂，也便于学生通过比较加深理解、加深印象。

(3) 以掌握概念强化应用为教学重点。本书弱化了求极限、求不定积分等复杂的计算技巧，对不定积分更多的是要求学生会使用积分表。

(4) 将工程数学与高等数学结合起来作为一门课程，节省了教学时数，并增加了数值计算、数学建模初步两章，引入计算机软件 Matlab，体现了教学改革的方向。

本书上册由翟向阳任主编，王峰、赵焕宗任副主编(以姓氏笔画为序)，朱长坤主审；下册由赵焕宗任主编，张建新、翟向阳、戴文

荣任副主编(以姓氏笔画为序),刘振周主审。参加本书上、下册编写的有(以姓氏笔画为序):丁仰章、王峰、王网喜、朱长坤、刘大瑾、张建新、赵焕宗、晏开湘、顾宗如、章朝庆、翟向阳、薛学铬、戴文荣。

本书在修订再版过程中得到泰州职业技术学院、上海第二工业大学、上海工程技术大学、上海农学院、上海交通高等职业技术学校、沙州工学院、徐州彭城大学、江阴职工大学、扬州职业大学、上海交通大学的大力支持和关心,并得到许多兄弟院校教师的关心和支持,在此一并致谢。

由于编者的水平和经验有限,书中不当之处在所难免,恳请读者指正,以便再版时更正。

编　　者

2000年5月

目　　录

第 7 章　常微分方程

函数是客观事物内部联系的反映，利用函数关系可以对客观事物的规律性进行研究。因此寻找变量之间的函数关系对解决实际问题具有重要的作用。但在不少问题中，这种函数关系有时却不能直接找出，而往往只能列出含有未知函数及其导数(或微分)的关系式，即微分方程。然后通过解微分方程，得到所需求的函数，再利用所得的结果去解释某些实际问题。本章着重介绍微分方程的一些基本概念和几种常见的微分方程的解法。

7.1　常微分方程的基本概念

7.1.1　微分方程举例

例 7.1　求自由落体的运动规律。设有质量为 m 的物体(看作质点)在空气中只受重力作用而自由降落，试求它的下落距离随时间 t 的变化规律。

解　如图 7.1 所示建立坐标系，设 t 时刻物体的位置函数为 $y=y(t)$，由一阶和二阶导数的力学意义可知，物体在 t 时刻的速度为 $y'(t)$，加速度为 $y''(t)$，物体只受重力 F 的作用，因为 y 轴向上为正，因而重力向下为负，即 $F=-mg$(g 是重力加速度)，根据牛顿第二运动定律 $F=ma$，可以列出方程

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg\ ,$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g\ 。\tag{7.1}$$

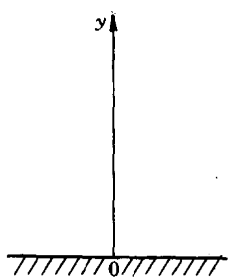


图 7.1

把方程(7.1)两端积分一次，得

$$y'(t) = -gt + c_1;\tag{7.2}$$

再积分一次，得

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2。\tag{7.3}$$

上式中包含两个任意常数 c_1 和 c_2，这表明物体的运动状态还没有最后确定，因为物体的运动状态还与其初始状态，即物体在初始时刻($t=0$)的位置 $y(0)=y_0$ 和初始速度 $y'(0)=v_0$ 有关。若 $y(0)=y_0$，$y'(0)=v_0$

在式(7.2)、式(7.3)中令 $t=0$，则得

$$c_1 = v_0; c_2 = y_0。$$

于是最后确定了物体的运动规律为

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0。\tag{7.4}$$

值得注意的是，若物体以某初始速度垂直上抛，则 $v_0>0$；若垂直下抛，则 $v_0<0$。

这个例子虽然简单，但它也包含了三个问题：

(1) 把实际问题化为微分方程问题，即

$$y'' = -g。$$

(2) 求解微分方程，解得

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0。$$

(3) 利用求得的解说明某些问题。

例 7.2 镭的衰变。镭是一种放射性物质，它的原子时刻都向外放射出氦原子及其他射线，从而原子量减少，变成其他的物质(铅)。这样一定质量的镭，随着时间的变化，它的质量就会减少，这种现象称为衰变。实验告诉我们，每一时刻镭的衰变率与该时刻镭的质量成正比，试确定镭的衰变规律。

解 设在时刻 t，镭的质量 $R=R(t)$，则镭的衰变率就是$\frac{dR}{dt}$，由于 R 将随时间而减少，故$\frac{dR}{dt}$应为负值，于是根据衰变规律，可以列出方程

$$\frac{dR}{dt} = -kR。\tag{7.5}$$

其中 k 为一正的比例常数，称为衰变系数。方程(7.5)的求解见 7.2 节。

例 7.3 设有一个弹簧，它的上端固定，下端挂一个质量为 m 的物体，

平衡位置时弹簧伸长 a，如果将物体向下拉长一段距离 b，然后放开，求物体的运动规律（不计空气阻力）。

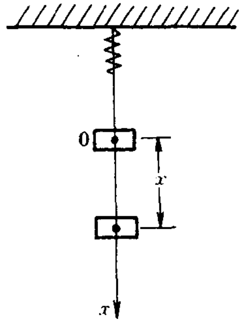


图 7.2

解 取 x 轴铅直向下，并取物体的平衡位置为坐标原点，如图 7.2所示。该物体在运动过程中某一时刻 t 离开平衡位置的距离为 $x(t)$，使物体运动的力就是使物体回到平衡位置的弹簧恢复力 f，根据虎克定律，

$$f = -kx 。$$

其中，常数 k 为弹性系数，负号表示弹簧恢复力的方向与物体位移的方向相反。

由题意知，$k=\frac{mg}{a}$，由牛顿运动第二定律得

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx ,$$

即

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{mg}{a}x = 0 ,$$

也即

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}x = 0 。\tag{7.6}$$

这就是物体运动应满足的微分方程，它的求解见 7.3 节。

7.1.2 常微分方程的基本概念

1. *微分方程*

含有自变量、未知函数及未知函数的导数（或微分）的方程称为**微分方程**。

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**；未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**。上面列出的方程(7.1)、(7.2)、(7.5)、(7.6)都是常微分方程。方程(7.1)中的 t 为自变量，y 为未知函数；方程(7.5)中的 t 为自变量，R 为未知函数；方程(7.6)中的 t 为自变量，x 为未知函数。而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

是偏微分方程，本章只介绍常微分方程。

2. 微分方程的阶

在微分方程中未知函数的导数的最高阶数叫做**微分方程的阶**。

如例 7.1、例 7.3 是二阶微分方程，例 7.2 是一阶微分方程。而方程

$$x^2y''' - 4xy' = 3x$$

是三阶微分方程，其中 x 为自变量，y 是未知函数。

一阶常微分方程的一般形式可以表示为

$$F(x,y,y') = 0 \text{ 。} \tag{7.7}$$

如果式(7.7)能解出 y'，则得到方程

$$y' = f(x,y) \text{ ，} \tag{7.8}$$

或

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \text{ 。} \tag{7.9}$$

式(7.7)为一阶隐方程，式(7.8)为一阶显方程，式(7.9)为微分形式的一阶方程。

n 阶隐式方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0 \text{ 。} \tag{7.10}$$

n 阶显式方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \text{ 。} \tag{7.11}$$

不管哪种形式，在 n 阶微分方程中，$y^{(n)}$ 是必须出现的，而 x，$y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 则可以不出现。如 n 阶微分方程

$$y^{(n)} + 1 = 0 \text{ 。}$$

3. 微分方程的解

如果把某一个函数代入一个微分方程后，使该方程成为一个恒等式，那末这个函数就称为该微分方程的一个**解**。

容易验证函数

$$y = x^2$$

是微分方程

$$y' = 2x$$

的一个解。

因为任意常数 c 的导数为 0，所以函数

$$y = x^2 + c$$

也是方程

$$y' = 2x$$

的解。

因此可知，微分方程的解并不是唯一的，而是存在着无穷多个函数同时都是它的解。

4. 微分方程的通解、特解、初始条件

如果微分方程的解中含有任意常数，这些常数的个数与微分方程的阶数相同，并且任意常数之间不能合并，这样的解叫做微分方程的**通解**。如例 7.1 中的解(7.3)。而当通解中的各任意常数都取确定数值时所得到的解，称为微分方程的**特解**，如例 7.1 中的解(7.4)。用来确定通解中的任意常数的附加条件称为**初始条件**。一般一阶微分方程的初始条件是

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

或 $$y(x_0) = y_0。$$

二阶微分方程的初始条件是

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0;$$

或 $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0。$$

n 阶微分方程的初始条件是

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)};$$

或 $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}。$$

求微分方程满足初始条件特解的问题称为**初值问题**，一阶微分方程(7.8)的初值问题常记为

$$\begin{cases} y' = f(x,y); \\ y|_{x=x_0} = y_0。 \end{cases} \tag{7.12}$$

常微分方程的每一个特解都是一元函数 $y = y(x)$，其图形是一条平面曲线，叫做微分方程的积分曲线。微分方程的通解有无穷多个，它对应于平面上无穷多条积分曲线，称为该微分方程的积