内容简介

本书是近几年来一系列边界元（BEM）专著中较完整的一本教科书，它全面介绍了两类边界元法（直接边界元法（DBEM）和间接边界元法（IBEM））在一维、二维和三维问题中的应用，并同时注重流体问题和固体问题的边界元模式推演。在叙述上，本书从工程实际观念入手，以有势流动和弹性固体为主要对象讲清基本概念，最后推广到更为一般的不定常问题及流体、固体力学的某些特殊新领域，同时归结到加权残数法和能量逼近等一般原理。本书共分十五章。第一章为引论；第二至第六章依次介绍一维至三维问题；以后各章推广到非势流与非弹性的领域及不定常的状态；最后一章给出了一批FORTRAN语言程序段。附录列出了必要的数学知识。

本书可作为理工科高等院校高年级学生或研究生的教科书，也可作为科技工作者的专业参考书。

Boundary Element Methods in
Engineering Science
P. K. Banerjee
R. Butterfield
1981 McGraw-Hill Book
Company (UK) Limited

*

工程科学中的边界元法

〔英〕P. K. 班努杰 R. 白脱费尔德 编著
冯振兴 李正秀 陶维本 译
杜庆华 校

*

国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张22 1/4 511千字
1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷 印数：0，001—2，080册

ISBN 7-118-00010-8/TB2 定价：10.90元

译者的话

从70年代末开始，边界元法（BEM）开始广泛应用于计算机求解工程实际问题。一方面，BEM弥补了有限元法（FEM）的不足之处，特别适用于无穷大区域和带时间变元的情况，因而在流体问题，液-固耦合、土壤结构耦合问题以及带有裂纹尖缘的断裂问题等领域显示出比FEM更大的潜力。另一方面，由于BEM将问题的维数降低了一阶（三维降为二维，二维降为一维），因此数据准备工作量，方程规模及计算机费用均大大减少，因而当用于非线性问题(迭代求解)时也显示出更高的效能。

由于BEM跟古典的边界积分（奇点分布）法和近代FEM都有紧密的联系，它的发展引起了数学和应用数学工作者以及工程科技工作者的广泛兴趣；也促进了深入研究微分方程基本解、加权残数法、变分及准变分原理、能量逼近、分部积分及格林恒等式等一系列数学-力学课题。可以预见，BEM作为FEM的一种补充与发展，将得到日益广泛的应用。

目前已出版的近十种BEM外文专著中，有些写得不够细致；有些属于会议文集，不够系统。而此书却是一本比较完整而系统的教科书，具有由浅入深，循序渐进的特点。在译校时，我们尽量将原文的错漏之处加注和改正，但限于译者的水平，难免有疏漏不当之处，欢迎批评指正。

译　者

前　言

在工程和应用科学中，需要进行定量分析的问题几乎都有一个共同的特点，即其边界的几何形状不规则，以致难以采用解析法，而必须采用某种形式的数值法。最为通用的数值法总要把整域剖分为子域：如有限差分法要用一组分割线构成差分网格，以确定差分节点；有限元法则要将解域分离成许多离散化的简化元。

有限元法发展至今已十分普及，以致人们都认为未必还会出现另一种和有限元法功能相似而又同样简便的近似方法。本书则正是要介绍另一种同样十分通用的近似方法，即边界元法，它以场问题控制方程的边界积分方程式为基础。原则上讲，这种边界积分法最显著的特点是：它只需将所讨论区域的边界作离散化处理，因而离散元的个数远远少于那些需对整个物体作内部子域剖分的计算格式。这样一来，边界元法最终形成的代数方程组其阶数当然也就比其它方法所得出的方程组低得多。

鉴于有限元法从当初作为一种物理上的近似方法问世以来，至今已渐致完臻；而边界元法却不然，因为边界积分法历来都跟数学界关系较密切，对广大工程分析人员来说，现有的大量文献尚难以立即使他们感兴趣。

本书旨在改变这种状态。书名定为《工程科学中的边界元法》，这本身就确切地反映了这种算法的一个主要步骤，就是把系统的边界剖分成简便适用的单元。本书中所涉及的一切概念均先通过直观的物理演绎导出，随后才给出较严格的表述，以期让读者由简入繁、加深印象。的确，任何一位对于结构分析中的影响线或矩阵分析较熟悉的人，抑或对于所讨论的问题的单位解（格林函数等）较熟悉的人，都会感到边界元法所涉及的主要思想乃是他们业已熟悉的。

本书自成系统，仅少量数学运算超出工程科学与应用科学大学生课程范围，在本书附录中给出了必要的数学知识。尽管边界积分法早已广泛应用于许多问题，但只是到最近才发现这方面的许多工作具有共同基础，并开始编制出实用的成套计算程序，从而引起了各行各业专业人员的广泛关注。

本书讨论范围颇广，包括固体力学与流体力学中线性、非线性、定常、不定常（瞬变）问题，还有采用边界元法结合其它数值方法解题的混合法●。为了论证边界元法确已卓有成效地普遍应用于整个工程科学领域，书中给出了大量的解题实例。

还要提及一点：从适用于均质区域的一种边界元表达式，可以推演得出把整个区域看成一个"有限元"的等价表达式，这种"超单元"很容易纳入常规的有限元计算格式。这种混合逼近算法最引人注目的地方就是它可以既简单又精确地模拟无穷远边界，这是边界元法特有的一条优点。

● 又称杂交法。——译者

目　录

第一章　边界元法概述

1-1　引　　言

工程科技人员在建立任何一种系统的定量的数学模型时，几乎总是着眼于建立一个无穷小微元的基本特性，并且以所涉及的各个主要变量之间的一些假设关系作基本前提。这样做的结果就是以微分方程的形式来描述所讨论的系统。一旦建立起基本模式，并了解了微分方程的特性，随后的工作就归结为在一个特定区域上求出方程的解。解域的形状常常十分复杂，还可能是由不同材料组成若干个区域，每种材料本身的性质又相当复杂。在边界上，可以规定各种各样的条件，如与时间无关的常量条件，或与时间相关的条件等。因此，这类微分方程的求解，已成为两个多世纪来分析人员主要关注的问题。

绝大多数的实际问题其边界都是不规则的，这就排除了寻求控制方程的解析解的可能性，而为了得到较精确又详细的结果，数值方法便成了唯一可行的方法。

目前，直接从所推得的微分方程着手解题而对方程不作进一步的数学处理的数值方法，用得最多的有两类：一种是在区域内部一系列结点处建立一组局部代数方程来逼近方程中的微分算子，这种代数方程当然较为简单；另一种是用有限大（不再是无穷小）的介质单元代替区域本身，从而用这些单元组合体近似地代替真实系统。

有限差分法[1]是第一种解法的先驱。直到 15 年前，在它未被第二种解法代替之前，它一向是一种最通用的方法。原则上讲，有限差分法的优点在于它可应用于任何微分方程组，但边界条件的引进往往十分费劲，且不便于计算机运算；而求得的数值解精度完全取决于用以确定节点分布的差分网格的细密程度。因此，差分法求解过程中常常出现大型联立代数方程组。

迄今为止，另一种最流行的算法是把物体剖分成许多有限尺寸的单元，为使求解过程中所形成的联立方程组阶数尽可能低些，单元尺寸越大越好。每个单元近似地模拟了它所代表的那一小块区域上的物体特性，单元之间的连续性则仅在总体意义上予以体现（通常是在各结点处），而并非在整个相邻界面上处处满足（也就是说，这种方法本质上是对物体及其连接状态的一种近似）。有限元法[2]正好集中地体现了这一类近似方法，且近年来已发展到这种程度：不少人认为未必再会出现另一种跟有限元相近（且不说超过）的方法。有限元法应用广泛，功能强，同时较易引进实际边界条件，因此，要想找到另一种也具备这些特点的新算法确实不易。有限元法的最大弱点是：从思路上讲，它是整个物体的离散化格式，结果不可避免地导致单元总数很多，对于边界延伸得较远的三维问题尤其如此；在每个单元中，解元也并不全都连续变化，且在单元之间经常会出现不合实际的跳跃间断[2]。

1-2　一种新的近似方法

逼近微分方程组的一种新途径是：在作离散化或引入近似式之前，先设法用某种办

法对微分方程进行解析积分。当然，我们的目标是对微分方程进行积分以求出解答，采用什么办法都行。不过这里所要讲的边界积分法主要是先把微分方程组变换成等价的积分方程组，以作为求解的第一步。直观地说，是希望通过这样一种运算（假设能成功的话），得出一个只含有原积分域的边缘区变元值（即解域边界上的变元值）的方程组。反之，这就意味着随后要作的任何离散化格式只是物体表面的子域剖分。这就恰恰说明：对于任一均质区域，仅需作表面的离散化而不是全物体离散化（因而称之为边界元法）。因此，从有限元角度看，它只是一个精巧的“大单元”，因此，在区域内部解元均将连续变化，全部近似处理（包括几何形状等）仅限于外边界。

另一方面还可直接预料到，边界积分方程的推演与求解在数学上将比前面提及的其它方法来得复杂，所幸的是这种说法只是部分正确。尽管过去主要是数学工作者发展了边界积分方程法，已出版的文献虽为数不少，但都偏重于数学方法，不能得到一种全面统一的通用方法供工程分析人员使用。然而，从实用观点来看，近几年情况已有所改善。由边界积分方程的思想发展而来的边界元分析方法（BEM）现已可供使用，且它是通用的，而不必再对个别的解作出存在性和唯一性的证明。因而，这一方法正在得到广泛流行，并正在编入高速数字计算机算法程序。实际分析人员立等可用。

1-3 边界元法的发展

虽然微分方程的主要特性早在十九世纪就已完全分析清楚，但古典的积分方程却迟至 1905 年才由弗雷德霍姆(Fredholm)首次作了粗浅的探讨。自那以后，对积分方程作过较深入的研究，尤其在场论领域。相应的教科书也已不少[3,4]，本书不必一一引述。

一般讲，对积分方程形态上的深入研究主要应归功于近代的密克林(Mikhlin)[5~7]的贡献，他研究了含有标量型和矢量型（多维）被积函数的积分方程，特别是积分域内带奇点和间断的情形。所有这些内容在数学上尚较粗糙，绝大部分内容对多数应用科学工作者也不熟悉。虽说在积分方程的性质及其分类方面已取得了巨大的进展，却没有人考虑过可能以此为基础建立一套通用的数值算法，以用于求解范围极广的各种实际问题。高速电子计算机的发展对此起了促进作用，其中的一大成果就是出现了边界元法。

各种 BEM 都有一个共同的出发点，但它们也自然分成下列互不相同又彼此紧密联系的三大类别：

1. BEM的直接表达式 在此类表达式中，积分方程内出现的未知元是真实的物理变量。正因如此，比如在弹性问题中，这种积分方程解就可直接得出系统边界上的全部张力和位移，而物体内部的张力和位移则可通过数值积分由边界值推算出来。克鲁斯(Cruse)、拉恰特（La-Chat)、里佐（Rizzo)、肖(Shaw)、沃森（Watson)等人[8~23]都阐述过以这类近似法为基础的算法，这些算法都是近期建立起来的，它们被称为边界积分法。

2. BEM的半直接表达式 另一种方法是采用类似于弹性力学中的应力函数或流体力学中的流函数等未知函数，写出用它表示的积分方程表达式。在求出用这类函数表示的解答后，只要作适当求导便可算出内部应力分布等。这类近似方法统称为半直接法，是由亨利（Henry)、杰斯温（Jaswon)、庞特（Ponter)、里姆（Rim）和辛姆(Symm)[24~28]提出的。

3. BEM 间接表达式 在间接表达式中，积分方程完全用原微分方程的单位奇异解表示，这些奇异解对应的奇点㊀是以特定强度分布在感兴趣的边界上（例如，单位奇异解可以是微分方程的“自由空间格林函数”，这就说明 BEM 跟通常所说的格林函数法也是密切相关的）。奇点密度函数本身并无具体的物理含义，但一旦从积分方程数值解求出了密度函数，则只要作一些积分计算就可得到物体内任意点处解参数的值。这种算法是由班努杰（Banerjee）、白脱费尔德（Butterfield）、海斯（Hess）、杰斯温、马松内特（Massonnet）、奥列维拉（Oliviera）、汤姆琳（Tomlin）、沃森等人最近提出的，他们已用这类算法解决了范围甚广的工程问题。

本书全部内容都是系统地论证上述方法，具有简明易学和卓有成效的特点，并以恰当的方式（不追求形式上的严格）揭示此法的数学背景。本书主要介绍 BEM 的直接法（DBEM）和间接法（IBEM），这是因为这两种方法比半直接法更通用。IBEM 的基本求解过程的物理意义尤为清晰简明，因此，以后各章均先讲述间接法。

上面给出的参考文献只是近期发表的运用 BEM 的应用文献，其中已有十分通用的解题算法。当然，还有其他人也用极其相近的方法求解过各种特定问题，这些都在本章末尾书目索引中列出。业已获得成功解决的问题包括由古典微分方程控制的一维、二维、三维的连续介质力学问题，其中包括各向异性、非均质以及更近期的非线性问题。

1-4 应用范围

原则上讲，上述几种 BEM 法可适用于任何问题，控制微分方程组可以是线性的，亦可以是增量法中的局部线性[44~49]。对于椭圆型微分方程，可以直接求解，而对抛物型、双曲型方程组则必须引入时段推进算法。因此，应用范围已包括了十分广泛的领域。例如，定常状态与瞬变（不定常）状态的有势流问题、弹性静力问题、弹性动力问题、弹塑性问题、声学问题等等都可以用 BEM 的直接表达式或间接表达式求解[8~49]。BEM 还可与其它数值方法（如有限元法和有限差分法）联合使用而成为一种混合型方法㊁。由于 BEM 对于大尺度问题具有独到的优越性，而有限元法则对有限尺寸的物体来说是一种较理想的求解方法。这种混合解法可以将有限尺寸物体与大尺度系统结合起来，在介质特性急剧变化的部位，有限元法又可作加密处理，因此上述混合解法的应用范围就几乎不受限制。更详尽的特点对比在下节讲述，以作为本引论的结尾。

1-5 有限元法与边界元法的对比

1-5-1 应用性

各种边界积分法都要用到迭代原理，故只适用于完全线性或增量（近乎）线性的系统，后一类情形使边界积分法的应用范围可以扩展到大量工程科学中感兴趣的问题。目前只有少数问题能用有限元法求解，而用 BEM 却无法求解（至少不能具有同样高效能）。在这类问题中，或者是由于各介质单元的材料性能各不相同，或者是问题的几何

㊀ 原文未说明是奇点分布在边界上，有些含糊不清。——译者

㊁ 混合（hybrid）又可译为“杂交”或“交感”。——译者

形式在某个方向或几个方向上比起其余方向的尺度小得不成比例，但又还不足以忽略其有效尺寸（例如中等厚度的板壳，窄长的薄条等）。

1-5-2 问题的维数

BEM使基本求解过程的维数降了一阶，例如，二维问题的分析所形成的是一个一维积分方程，而三维问题则形成一个二维面积分方程。

在BEM中，各个不同的有界区域必须当作均质区处理。因此，若所讨论的问题非均质性很强，以致必须使用大量的小均质区才能恰当模拟它，这时BEM区域性边界格式就蜕化成基本上仍作全物体子域剖分的格式了，故在此种情况下BEM和有限元格式实际上彼此已无差别。

在均质问题中，若存在分布体积力，或者控制微分方程仅为准线性方程❶（如弹塑性问题即是如此），则除边界积分外，还需加上一项体积分，其中包括将物体内部作任意的子域剖分。不过这种情况下内部的子域剖分并不增大最后需要求解的方程阶数，BEM的长处仍得以保留。读者应仔细辨别：这里由于已知的分布体积力❷或由于塑性问题中的假想增量体积力引起的内部子域剖分，跟上面所说非均质情形的内部子域剖分是不同的；前者本属均质区，后者则反映了问题在本质上呈非线性。

因此，对于绝大多数实际情况，简便的边界离散化必然得到比全物体的离散化的任何计算格式要小得多的联立方程组。另一方面，用BEM形成的系统方程组，在均质情形下是满阵，有多个均质区时则呈块带状；而用有限元解法得到的矩阵虽大得多，却较为稀疏。

在BEM解法中，矩阵元素分量的计算量要比有限元法多得多，这就抵消了降阶之后矩阵消元所能省出的一部分时间。但是，随着问题规模越来越大，用BEM求解时计算机费用的增长却比有限元法要小得多。从各方面的研究来看[18,29]，可得出如下结论：有限元法和边界元法按同样精度求解三维问题时，其求解时间之比为4:1至10:1，故边界元法较佳。对某些问题，这种差别可能还要大得多，那就更应使用BEM了，例如：

1．具有无穷远边界问题。由于边界元解法自动满足无穷远处的允许边界条件，不必在无穷远处划分单元，而有限元法却必须用适当数量的远距离单元逼近无穷远边界。

2．含有自由面“卸载”区的半无限域情形。只要选用适当的奇异解与BEM配合，则大部分自由表面“卸载”区通常也不必作任何离散化处理[32]。

1-5-3 连续内点模拟

BEM仅模拟系统的边界几何形状，一旦求出了所需的边界信息数据，则任取内点处的解变元的值便可依次算出。此外，所得的解在物体内部处处连续。这都是BEM独具的两大特点。结果，在后一种内点计算中，分析人员在作完主要的（BEM）分析后，可以算出任意内点的变元值。例如，可以特别注意弹性与弹塑性问题中的应力集中区这一类部位。

---

❶ 此时常将局部非线性项当作等效体积力处理，故情况跟存在体积力时类似。——译者

❷ 运用高斯定理（第六章），很容易将连续分布保守体积力的体积分化成等价的面积分。

1-5-4 精度及误差分布

边界积分方程本身是所论问题的一种精确提法，其误差仅来自离散化的处理，数值上的近似计算也只是因为在边界上无法求闭型积分解而引起的。若采用相当成熟的数值积分法（如采用曲边元和在边界上连续变化的函数分布），则积分引起的误差可以很小。当然，数值积分比起数值微分来总要稳定、精确得多，而DBEM和IBEM均不必作任何数值微分。

至此已十分清楚：在没有体积力的作用下，分析人员只需准备解域边界几何形状的数据（连同边界条件、材料性能等，这与一般解法相同），因此，数据准备工作量比任何一种需作内部几何形状模拟的解法要少得多。因此，对大量实际问题，BEM比有限元法具备更大的优越性。

1-6 结　论

本章介绍了BEM作为求解实际问题的一种工具的发展史，并将它跟其它通用的新型算法在实用方面作了对比。通过比较，我们得出的结论是：BEM比其它方法具有更大的潜在优越性，其中有一些已为人们所认识，我们希望本书后面各章的内容能有助于深化这一认识，在这些章节里通过广泛的实际问题求解阐明了BEM的功效，同时强调了此法，且已为大多数工程技术人员和应用科学工作者所熟悉的简明的物理概念。

1-7 参考文献

1. Southwell, R. V. (1946) *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Oxford University Press.
2. Zienkiewicz, O. C. (1971) *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London.
3. Kellog, O. D. (1929) *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin; also published by Dover,, New York, in 1953.
4. Kupradze, V. D. (1963) *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, translated from Russian by Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.
5. Mikhlin, S. G. (1957) *Integral Equations*, Pergamon Press, Oxford.
6. Mikhlin, S. G. (1965) *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, Pergamon Press, Oxford.
7. Mikhlin, S. G. (1965) *Approximate Solutions of Differential and Integral Equations*, Pergamon Press, Oxford.
8. Cruse, T. A. (1969) 'Numerical solutions in three-dimensional elastostatics', *Int. J. Solids and Structs*, **5**, 1259–1274.
9. Cruse, T. A. (1972) 'Application of the boundary integral equation method in solid mechanics', in H. Tottenham and C. Brebbia (eds), *Proc. Int. Conf. Southampton Univ.*, Vol. 2.
10. Cruse, T. A. (1974) 'An improved boundary integral equation method for three-dimensional stress analysis', *Computers and Structs*, **4**, 741–757.
11. Cruse, T. A., and Rizzo, F. J. (1968) 'A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem', *J. Math. Anal. Appl.*, **22**, 244–259.
12. Cruse, T. A., and Rizzo, F. J. (eds) (1975) 'Boundary integral equation methods –computational applications in applied mechanics', *Proc. ASME Conf. on Boundary Integral Methods*, ASME, New York.
13. Lachat, J. C. (1975) 'Further developments of the boundary integral techniques for elasto-statics', Ph.D. thesis, Southampton University.
14. Lachat, J. C., and Watson, J. O. (1975) 'A second generation boundary integral equation program for three-dimensional elastic analysis', in T. A. Cruse and F. J. Rizzo (eds), *Proc. ASME Conf. on Boundary Integral Equation Methods*, ASME, New York.
15. Shaw, R. P., and Friedman, M. B. (1962) 'Diffraction of a plane shock wave by a free cylindrical obstacle at a free surface', *Fourth U.S. Nav. Congr. of Appl. Mech.*, pp. 371–379.

16. Friedman, M. B., and Shaw, R. P. (1962) 'Diffraction of a plane shock wave by an arbitrary rigid cylindrical obstacle', *J. Appl. Mech.*, **29**(1), 40–46.
17. Banaugh, R. P., and Goldsmith, W. (1963) 'Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape', *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**(10), 1590–1601.
18. Mitzner, K. M. (1967) 'Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape—retarded potential technique', *J. Acoust. Soc. Am.*, **42**(2), 391–397.
19. Shaw, R. P. (1966) 'Diffraction of acoustic pulses by obstacles of arbitrary shape with a robin boundary condition—Part A', *J. Acoust. Soc. Am.*, **41**(4), 855–859.
20. Shaw, R. P. (1969) 'Diffraction of pulses by obstacles of arbitrary shape with an impedence boundary condition', *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**(4), 1962–1968.
21. Rizzo, F. J., and Shippy, D. J. (1977) 'An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermo-elasticity', *Int. J. Num. Meth. in Engng*, **11**, 1753.
22. Rizzo, F. J., and Shippy, D. J. (1979) 'Recent advances of the boundary element method in thermoelasticity', in P. K. Banerjee and R. Butterfield (eds), *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. I, Chap. VI, Applied Science Publishers, London.
23. Lachat, J. C., and Watson, J. O. (1976) 'Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elasto-statics', *Int. J. Num. Meth. in Engng*, **10**, 991–1005.
24. Jaswon, M. A. (1963) 'Integral equation methods in potential theory—I', *Proc. Roy. Soc.*, **273**(A), 23–32.
25. Jaswon, M. A., and Ponter, A. R. (1963) 'An integral equation method for a torsion problem', *Proc. Roy. Soc.*, **273**, 237–246.
26. Rim, K., and Henry, A. S. (1967) 'An integral equation method in plane elasticity', NASA Report No. CR-779-1967.
27. Symm, G. T. (1963) 'Integral equation methods in potential theory', *Proc. Roy. Soc.*, **275**(A), 33–46.
28. Symm, G. T. (1964) 'Integral equation methods in elasticity and potential theory', Ph.D. thesis, London University.
29. Banerjee, P. K. (1976) 'Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape', *Int. J. Mech. Sci.*, **18**, 293–303.
30. Banerjee, P. K., and Butterfield, R. (1976) 'Boundary element methods in geomechanics', in G. Gudehus (ed.), *Finite Elements in Geomechanics*, Chap. 16, Wiley, London.
31. Tomlin, G. R., and Butterfield, R. (1974) 'Elastic analysis of zoned orthotropic continua', *Proc. ASCE, Engng Mech. Div.*, **EM3**, 511–529.
32. Butterfield, R., and Banerjee, P. K. (1971) 'The problem of pile-cap pile-group interaction', *Géotechnique*, **21**(2), 135–142.
33. Massonnet, C. E. (1965) 'Numerical use of integral procedures', in O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister (eds), *Stress Analysis*, Chap. 10, Wiley, London.
34. Oliviera, E. R. A. (1968) 'Plane stress analysis by a general integral method', *J. ASCE, Engng Mech. Div.*, **February**, 79–85.
35. Watson, J. O. (1973) 'Analysis of thick shells with holes by using integral equation method', Ph.D. thesis, Southampton University.
36. Banerjee, P. K., and Driscoll, R. M. C. (1976) 'Three-dimensional analysis of raked pile groups', *Proc. Inst. Civ. Eng., Res. and Theory*, **91**(2), 653–671.
37. Chen, L. H., and Schweikert, J. (1963) 'Sound radiation from an arbitrary body', *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**, 1626–1632.
38. Banerjee, P. K. (1971) 'Foundations within a finite elastic layer –application of the integral equation method', *Civ. Engng.* **November**, 1197–1202.
39. Hess, J. L., and Smith, A. M. O. (1964) 'Calculations of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies', *J. Ship Res.*, **8**(2), 22–44.
40. Jaswon, M. A., and Symm, G. T. (1977) *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, Academic Press, London.
41. Hess, J. L., and Smith, A. M. O. (1966) 'Calculations of potential flow about arbitrary bodies', in *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 8, pp. 1–138, Pergamon Press, New York.
42. Hess, J. L. (1974) 'The problem of three-dimensional lifting potential flow and its solution by means of surface singularity distributions', *Computer Meth. in Appl. Mech. Engng*, **4**, 283–319.
43. Hess, J. L. (1975) 'Improved solution for potential flow about arbitrary axi-symmetric bodies by the use of a higher order surface source method', *Computer Meth. in Appl. Mech. Engng*, **5**, 297–308.
44. Zienkiewicz, O. C. (1978) *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, London.
45. Banerjee, P. K., and Davies, T. G. (1979) 'Analysis of some case histories of laterally loaded pile groups', *Proc. Int. Conf. on Num. Meth. in Offshore Piling*, Institute of Civil Engineers, London.
46. Davies, T. G. (1979) 'Linear and nonlinear analyses of pile groups', Ph.D. thesis, University of Wales, University College, Cardiff.

47. Swedlow, J. L., and Cruse, T. A. (1971) 'Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow', *Int. J. Solids and Structs*, 7, 144–151.

48. Marjaria, M., and Mukherjee, S. (1980) 'Improved boundary integral equation method for time-dependent inelastic deformation in metals', *Int. J. Num. Meth. in Engng*, 15(1), 97–112.

49. Chaudonneret, M. (1977) 'Boundary integral equation method for visco-plasticity analysis' (in French), *J. de Méch. Appliq.*, 1(2), 113–131.

1-8 书目索引

Chicurel, R., and Suppiger, E. W. (1964) 'The reflection method in elasticity and bending of plates', *ZAMP*, 15, 629–638.

Gruters, H. (1971) 'Berechnung des Spannungszustandes in homogenen anisotropen Scheiben mit Hilfe einer Integralgleichungsmethode', Thesis, Aachen.

Heise, U. (1969) 'Eine Integralgleichungsmethode zur Lösung des Scheibenproblems mit gemischten Randbedingungen', Thesis, Aachen.

—— (1975) 'The calculations of Cauchy principal values in integral equations for boundary value problems of the plane and three-dimensional theory of elasticity', *J. Elasticity*, 5, 99–110.

—— (1976) 'Non-integral terms in integral equations in the plane and three-dimensional theory of elasticity', *Mech. Res. Comm.*, 3, 119–124.

—— (1978) 'The spectra of some integral operators for plane elastostatical boundary value problems', *J. Elasticity*, 8, 47–49.

—— (1978) 'Numerical properties of integral equations in which the given boundary values and the sought solutions are defined on different curves', *Computers and Structs*, 8, 199–205.

Herrera, I. (1978) 'Theory of connectivity: a systematic formulation of boundary element methods', *Proc. Int. Conf. on Boundary Element Methods*, Southampton University, Pentech Press.

—— and Sabina, F. J. (1978) 'Connectivity as an alternative to boundary integral equations', *Proc. Natn. Acad. Sci., U.S.A.*, 75, 5.

Kompis, V. (1970) 'Integralgleichungsverfahren zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der ebenen Elastizitätstheorie', Thesis, Aachen.

Massonnet, Ch. (1949) 'Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane', *Bull. CERES Liège*, 4, 3–183.

—— (1956) 'Solution générale du problème aux tensions de l'élasticité tridemensionnelle', *Proc. Ninth Congr. Appl. Mech.*, Brussels, pp. 168–180.

Miche, R. (1926) 'Le calcul pratique de problèmes élastiques à deux dimensions par la méthode des équations intégrales', *Proc. Second Int. Congr. Tech. Mech.*, Zurich, pp. 126–130.

Rieder, G. (1962) 'Iterationsverfahren und Operatorgleichungen in der Elastizitätstheorie', *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 14, 109–343.

—— (1968) 'Mechanische Deutung und Klassifizierung einiger Integralverfahren der ebenen Elastizitätstheorie I, II', *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Technol.*, 16, 101 114.

—— (1969) 'Eine Variante zur Integralgleichung von Windisch für das Torsionproblem', *ZAMM*, 49, 351–358.

—— (1972) 'Über Eingrenzungsverfahren und Integralgleichungsmethoden für elastiche Scheiben, Platten und verwandte Probleme', *Wiss. Z. der Hochsch. für Archit. und Bauwesen Weimar*, 19/2, 217–222.

—— (1974) *On Kupradze's Generalised Stress –Its Applications to Certain Integral Operators of Plane Elasticity*, Anniversary volume, H. Parkus, Vienna.

—— (1975) 'Adjoint integral equations in elasticity', in *Schiffstechnisches Symposium, Experimentelle und mathematische Methoden der Grundlagenforschung in der Schiffstechnik*, Rostock, pp. 141 151.

Weinel, E. (1931) 'Die Integralgleichung des ebenen Spannungszustandes und der Platten theorie', *ZAMM*, 11, 349–360.

第二章　若干一维问题

2-1　引　　言

为论证 BEM 使用中所涉及的基本概念，以及其中遇到的有关控制微分方程单位解的特性，下面几节将简明扼要地讲解若干一维问题的求解过程。在本章内，各种解法的数学表述暂予精简，而主要借助于直观原理推出解答，重点放在各类运算的物理含义上。在间接边界元法（IBEM）中尤其如此。应强调指出的是本章的目的并非想把 BEM 作为解一维初等问题的最佳办法加以推荐。实际上，一般来讲，对于一维系统，BEM 不是一种高效能的求解工具。尽管如此，我们讲解一维例子的目的在于讲清楚 BEM 的整套解法和一系列有条理的运算步骤，从而说明整个解法的基本特点。并可将所述解法几乎原封不动地套用于复杂的二维问题和三维问题。因此，建议读者循序渐进地弄清原始简例，仔细地研究本书中从头至尾沿用的符号记法。

2-2　影响函数法

为引入解的叠加概念，我们先从一维有势流问题着手，说明 BEM 和早已成熟的影响函数法（或称格林函数法）之间的异同点。

2-2-1　一维有势流

图 2-1 所示为截面积等于 1，长为 L 的均质一维场，系统的边界就是两个端点 P 和 Q，每个点对应一个“边界元”。端点处保持零势状态，即 $p(Q)=p(P)=0$。设在任一“加载”点 B 处有一强度等于 ψ 的点源，B 的坐标为 ξ，而 P' 是物体内部一个一般的“场点”(field point)，其位置用坐标 x 表示。

这里所考虑的具体问题可以是沿均质导体的电流或传热，也可以是沿等截面管道的无粘性不可压流。在这几种问题中，势 $p(x)$ 分别代表电压、温度或总水头。在 PQ 区间内，除 B 点外势函数均受拉普拉斯方程的控制，故在一维情况下

$$\frac{d^2p}{dx^2}=0 \tag{2-1}$$

若介质传导率为 k，则电流强度、热通量强度或流动速度 $v(x)$ 由下式给出●：

$$v=-k\frac{dp}{dx} \tag{2-2}$$

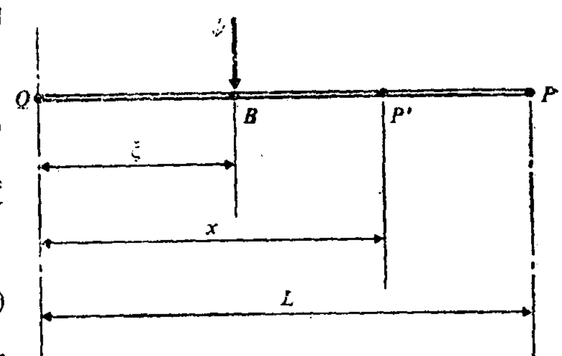

图　2-1

同时，方程（2-1）和（2-2）可用来描绘图 2-2 所示受有张力 k 而绷紧的细弦，在纵向小载荷 ψ 作用下，弦线产生的挠度为 $p(x)$。在端点 P、Q 处给定边界条件后，求解方

● 以后统称 v 为通流强度（flux）。——译者