科學圖書大庫

高等工程數學

(第五冊)

譯者 黃友訓

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有　不許翻印

中華民國六十八年三月二十日再版

高等工程數學

(第五冊)

基本定價　1.60

譯者　黃友訓　逢甲工商學院教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 7813686 7815250 號

發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號

承印者　大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

譯者序

本叢書共有六冊原名 Ingenieur-Mathematik，內容具有許多優點。例如（1）材料新穎而豐富，適合工程師在大學研究高深學問之需要；（2）本書的重點，不在證明許多定理，而在鼓勵讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立解答各習題；（3）介紹新的數學觀念，培養純粹數學的思考方式；（4）各章附有問題與實例，切於實際的應用；（5）每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題之求解更爲重要；（6）本書頗適合於我國各大學工學院所訂新的課程標準。按照新的規定，微積分與微分方程均屬工學院一年級必修科目；讀完微積分與微分方程，接着讀這本書，在程度上有相當的啣接。

本叢書直譯之名，應爲"工程師數學"，根據原著者弁文所說，這六冊叢書是由敎工學院的講義整理而成；在證明方面不夠嚴密，但對於工程上的應用特別注重。所以用於工學院比較適合；因此本人決定改用"高等工程數學"此一比較符合原著者數學目的之書名。

本叢書第一冊原著頗多在文字上不能自圓其說（譯者按：原著者本人之德文亦並不高明）與排版錯誤之處，均經譯者逐次予以訂正。

黃友訓謹識

民國五十九年七月於逢甲學院土木工程學系。

弁 言

本叢書第一冊開始就講到級數，而將級數戴上“工程師數學”的頭銜者，其用意並非對工程師所指定的一種特殊數學，以表示與自然科學家所用的數學，或與所謂純粹數學有相反的內容之意；本書第一冊所講的級數，主要是針對工科各學系的學生可能應用之問題；就是自然科學的定律也應該就其重點加以說明。決定這一個目標，一則是爲了對教材有所選擇，而此教材主要是滿足直至特許工程師前期考試（ Diplomvorprüfung ；譯者按：德國之 Diplom 學位等於英美之碩士學位）所需要之普通數學講授者。二則本書第一冊中也爲此包含一些工業大學第一學期一開始就習慣採用的教材；於是對於所有———好比由於工業實習———高中畢業後不立即繼續深造的學生而言，容易使之進入高深數學而尋求自修的門徑。

除了對教材有所挑選之外，本人認爲尚有重要的一點，即本叢書與一般數學教授所用的書籍，在數學的方法上大有區別。譬如按照目前的習慣，研讀數學時特別就其通俗性着重於觀念的澄淸，進而加以分析，並且劃分其有效境界；但初入世的工程師與自然科學家所面對的問題，是有計劃的或有效驗的觀念問題；從他們感興趣的狹窄領域而言，此觀點對於他們自然較爲親切，而且對於他們日後的任務總要作爲有所依據的準繩。這是爲了工程師數學（簡稱工程數學）所能做的明顯結論，應該在此處就函數觀念中一個例子予以說明。工程學生對於一般的函數觀念，是絲毫不感覺興趣的；通常所觀察病理上的情形，據他們看來，自始就無乍興趣或者甚至令人討厭的稀奇古怪之事物。但此處使適合而有效的進入分析的函數，却以解剖（即外科手術，俗稱開刀；在數學上則稱爲運算）爲出發點；借助於運算才產生許多不同的函數：由四則法（即加減乘除之總稱）導致多項式及有理函數；由多項式利用趨於極限的解析運算遂產生冪級數；由積分運算導入特別的超越函數（對數）；又由構成逆函數（或稱反函數）的運算，則以解析的方式導致指數函數與三角函數。然後由三角函數所組成的級數（即福里哀級數）有效的產生進入任意函數的廣大途徑。此外，具有歷史性的分析法，其過程直入十九世紀依

然不生變化；我們也要注意"functio"這個字，它與"operatio"一字相同，都是由並不古老的拉丁文而來，具有"功用"，"作用"，或"機能"（德文稱爲 Verrichtung ）之意義。然而有效驗的觀點並非陳腐的老生長談，在現代的基本學理探討上（以 Lorenzen 一人爲例）（譯者按：Dr. Paul Lorenzen 爲西德 Erlangen 大學之數學教授，著有"數學"一書，共一百七十三頁），業已指出：Lorenzen 博士在數學上對基本理論發生困難的克服，做了有用的一種列式假設，使該理論的確能夠成立。——再則在大部份數學教科書中作爲基礎的函數觀念，對許多應用方面的目的而言，也還是過於狹隘：二十世紀中所引用的一般化函數（例如分配律）已成爲不可或缺的數學理論，而在工程數學的圖示方面亦不能無之；本書決定把一般化函數附加於福里哀級數（ Fouriersche Reihen ）作有效驗的運用。

於是對於純粹數學的思考方式，自然不應該隨便剝奪其所賦與之權利；但如果到處適用的說法以及抽象的澄清有其必要的話，這種思考的方式總是不可付諸闕如的。凡特許工程師（ Diplomingenieur ；譯者按：凡在德國工業大學各工程學系畢業之學生，均稱爲特許工程師，或稱爲國授工程師）按其地位的固有意義，均負有發展新方法的使命（但非應用陳舊的方法；如用老的方法，那就沒有進大學研讀的必要了！）；他對數學的抽象批評方面所需要者，與對積極有效方面所需要者完全相同。本書中有關利用德得欽氏綫段分割法（ Dedekindsche Schnitte ）對實數的引用各章，不應該當作教育的裝飾品看待；各該章節乃帶來重要的思考方式！尤其每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題的解答求得若干方法更爲重要。附錄的內容絕對不是多餘的。但讀者對各章所附一大堆實際例題，一定要等到融會貫通之後，才好澈底從事於該附錄內容之研讀。爲使讀者百尺竿頭再對各論題作進一步之研究起見，本叢書每冊最後尚且介紹若干參考書籍，以便讀者選購。

本工程數學叢書並不缺乏精良優美的圖形表示。這些圖示，除了具備任何教科書所應有的目的外，對於後起之秀的工程師（讀者按：應指正在大專院校肄業之學生而言）尚有參考研讀之功用。本叢書是屬於袖珍小冊子的性質，因爲作者在此處有意遷就適先所提及的二功用之一：對課堂聽教授講解之領悟應該有所幫助。此時如果它的結構與體裁有若干地方與剛才的聽講稍有偏差時，那是無關宏旨的；對於同一論題從多方面去認識與了解，總屬有益之舉。本書各章末了所附的問題與實例，乃爲了加深讀者的理解而加工修訂的。其目的在使讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立自主的去求解各

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

課題！

最後，主要是 C. Schmieden 教授對作者所給予寶貴而親切的規勸與忠告，令人萬分感激。又教育委員H.J. Vollrath博士，候補工程師 H.Böttchen，及候補數學家 G.W. Thiel 諸位先生對原稿的共同閱讀與脩改，以及對附圖之謄清與描繪，均有莫大之贊助。還有對出版書局的熱誠合作，亦須在此表示感謝之忱.

Detlef Laugwitz 1963年暑假期間於西德 Darmstadt

目　　錄

第一章　一個複變數之函數

(Funktionen Einer Komplexen Veränderlichen)

我們從以往迄今所講的分析法構造論中，得知對實數的限制，必將接二連三的遭遇困難。好比在初等代數學中（參看本叢書第一册第七章），如果要將一般的適用性賦予二次方程式的求根公式時，就非引用複數不可；而且在超越函數方面，複數值函數的仔細加以研究，亦往往導致簡單化。又如在線性微分方程及微分方程系中，更無法避免對複數特徵值之容許運用；而且指數函數與三角函數之間的連帶關係，如果利用歐拉公式（參看本叢書第二册公式5.5）是很容易在複數中建立起來的，這就是一個很好的例子，令人看出在分析法中如果借助於複數，有許多事情是如何的更易於看得透澈，而且更適合於實際的用途。

我們採用複數第一個目的，乃在使負數的開方成爲行得通之事實。就一般而言，吾人對於數字概念的推廣，習慣於作如此的理解，即一俟在舊式的數字範圍中，其運算無法實施而要求如此做法時，立即要有新的數字（好比負數，分數，以及複數等）從自然數1，2，3，……出發獲得明確的界說。所以我們的願望是具有強迫性的，要將自然數的減法使之成爲一般可以付諸實施，意即「零」與「負數」的納入應用範圍以內，又對任意整數的除法可能性，那必然導致有理數的出現。最後對於開平方的運算，必將使之化爲虛數與複數。吾人至此似乎就可以猜測得到，除了減法，除法，及開方之外，還有其他基本計算方法的逆運算，譬如三次根的開方與對數算法，必將予以引起數字系統新式推廣的機緣。但現在要加以證明者，却爲隨着複數的引用而達成數字系統中某一段落之結束；意即在複數的範圍以內所有逆運算（或稱反運算）每次都是行得通的。這也是複數意義所具有的理由之一。

除此以外，附帶要加以說明者，即一個複變數所屬函數的理論，在許多方面，實比實數函數的理論爲簡單而優美。所謂實數函數，如用曲線畫出來，縱使它是用“合乎理性”的解析式子來表示（吾人只要想到福里哀級數），該曲線的變跡形狀也是任意奔放，不可捉摸的；但在複數方面乃由可微分的單純要求產生一定的結果，即所有函數是局部的（意即在任意地點的周圍，

只要函數可予微分之處）可用**冪級數**來表示。而且所謂**冪級數**，我們是學過的，即在本叢書第一冊中當作依照**多項式**列出來最爲簡單的**類函數**看待者。

函數自變數以及由實數化爲複數所屬函數值的一般化，首先可能會帶來新的麻煩；然而相反的已證實其對特別合理而重要的函數，具有一種限制作用。吾人現在可以反過來問，究竟經由這種限制作用是否另一方面將導致不可能產生應用領域內的重要函數。令人驚訝的，並非這種不可能產生的情形：實際上頗爲重要的一些函數，每次都可以從複數的函數理論中產生出來，甚至**一般化函數**（即下面第六章在問題與實例中所舉第六及第七例題所討論的分佈函數）也容許當作**複數分析函數的“邊緣分配式”**表示出來。

除此以外，還有複數可微分（或“分析”）函數直接應用於**分析法**及其物理的、幾何的、與工程的應用範疇內所發生的許多問題。好比這些函數是與非常重要的**微分方程**$\triangle u=0$，即與所謂**電位方程**（Potentialgleichung）的解法，有密切關聯之處；而且這些函數對於**保形**造像的表示方法亦具有決定性，意即在各種不同的應用領域內究竟出現那些函數；這是顯而易見的問題。

此處擺在我們面前的乃爲數學中一度出現的情形，即純粹數學上的動機（指基本的代數運算可能使之成爲逆運算而言）予以引起推廣**分析法**的外在原因，而這種**分析法**的推廣容許用特別優美而閉合的形式見諸應用於許多物理的、幾何的、以及工程的範圍以內。頗爲希罕的，這種**複數函數理論**，簡稱**函數理論**，才產生於十九世紀中。**函數理論**的開端乃在十九世紀的第二個十年之間，即當高斯氏（Gauss） 與高希氏（Cauchy）二人發表他們頗有根基的論著之時。到了上一時紀的中葉，黎曼氏（Rimnann）乃從受幾何學影響的觀點出發；維斯特拉斯氏（Weierstrass）則從偏於分析的立場出發，把複數函數的理論用閉合的形式建立起來。從此以後，**函數理論**才開始掌握了通過數學及其應用領域的一次凱旋行列：而這個行列在數學的歷史中亦只出現一次的。

我們在此處假定關於複數的一些基本事實，如同在本叢書第一冊第七章中用許多式子和圖形所表示者。

還要提醒讀者的一點，即複數$z=x+iy$（x與y代表實數，x是實部，y是虛部）與含有特性$i^2=-1$的數「i」共同構成一個數的本體；意即除了以$0=0+i0$來除的除法，一切有理數的運算對複數而言，是可以付諸實施的。除了其他雖有論文發表但毫無影響力的數學家之外，高斯氏（Gauss）已大量應用我們學過關於複數的幾何意義，經由**高斯數字平面**（die Gaussche Zahlenebene）的矢量（或者經由這些矢量的各端點）來表示。還要向讀

者提醒的一點，即**複數**的加法與減法在高斯平面內可以利用相當的矢量運算來表示（見第一圖）。對乘法和除法的圖示意義來說，吾人最好採用**極坐標**的方

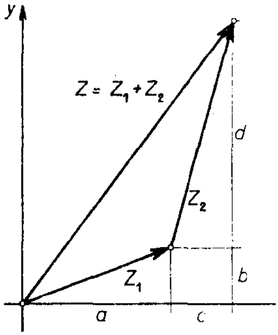

圖 1.　複數的加法與減法

法：$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$。配屬於一個數 z 的矢量，其長度 r 亦稱為**絕對值**，即 $r=|z|$；φ 角的決定，其精度僅達於 2π 所屬任何整數多倍相加者，也叫做 z 的**輻角**（見第二圖）。在兩個複數相乘的時候，其輻角是

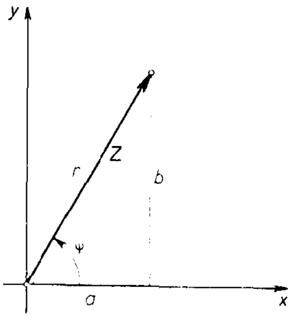

圖 2.　總計與輻角

互相加起來的；但其絕對值却是彼此相乘；相除的結果歸於絕對值的除法，以及**輻角**的減法（見第三圖）。對所有這些情形而言，尚希讀者參閱本叢書第一册第七章所講。

此外，也值得我們回憶的一點，即適用於絕對值的計算規則：

$$|z_1 z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\quad;\quad|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

在對函數進行研究與分析之前，吾人尚須對**複數**的收斂問題——如同實數領域內——多作考慮。我們從前也曾經有過機會做了如此的考慮，好比在

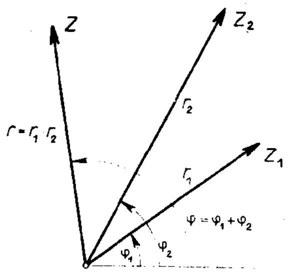

圖 3. 乘法與除法

本叢書第一册第十一章中對冪級數的研究與分析，就是用複數來完成的。吾人首先要弄明白的，即在固定的z_0情形之下，在複數平面內所有z連同$|z-z_0|<\rho$ 的數量，是用敞開的圓盤（其半徑爲ρ，中心點爲z_0）來表示；意即利用不帶邊的圓盤上所屬各個點來表示。凡含有$|z-z_0|\leqq\rho$ 的這些數「z」乃用封鎖的圓盤，意即帶有邊緣的圓盤上所有點來表示（見第四圖）。

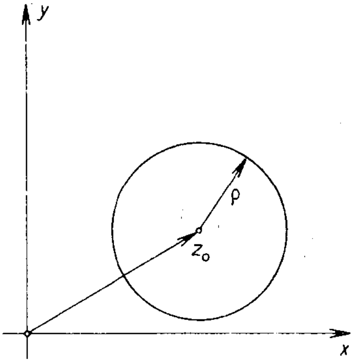

圖 4. 爲$|z-z_0|\leqq\rho$所作補充示意圖

複數的一個序列z_n現在就稱爲趨向於z_0這個數而自行收斂，或寫成 $\lim z_n=z_0$，假如 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$的話。這是一個眞實的定義，因爲一個複數敍列的收斂性是用**實數序列**$|z_n-z_0|$的收斂性來解釋；同時也因爲實數序列方面的收斂情形已經下了定義的緣故。在數字平面內如用幾何意義來解釋，這種情形是這樣的：因爲數串z_n趨向於z_0的收斂性顯屬搭配於任何$\varepsilon>0$者，一定有一個號碼$N(\varepsilon)$；因此，$|z_n-z_0|<\varepsilon$，只要n大於$N(\varepsilon)$；所以所屬各

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

點從號碼$N(\varepsilon)$開始一定位於半徑等於ε，而中心點爲z_0的這個圓以內。如將這個圓投影於坐標軸之上，便可令人看出：z_n的實部與虛部x_n，y_n然後也趨向於z_0的實部與虛部x_0，y_0而自行收斂；祇以假如$z_n=x_n+iy_n$，$z_0=x_0+iy_0$，由$|z_n-z_0|<\varepsilon$勢必產生$|x_n-x_0|<\varepsilon$及$|y_n-y_0|<\varepsilon$的緣故。反過來說：假如實數串x_n與y_n各按情形趨向於x_0與y_0自行收斂時，那末$z_n=x_n+iy_n$必然趨向於$z_0=x_0+iy_0$而自行收斂。因爲由於收斂的關係乃產生一個$N=N(\varepsilon)$的存在問題；結果可以寫成下面的式子：

$$|x_n-x_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\quad\text{及}\quad|y_n-y_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\ \text{令}\ n\geqq N(\varepsilon)$$

至此吾人求得

$$|z_n-z_0|=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon\ \ \text{令}\ \ n\geqq N(\varepsilon)$$

玆以文字說明如下：複數的一個序列（或稱數串）是趨向於一個複數而自行收斂的，只有在實部與虛部的數串各自單獨的趨向於極限値的實部與虛部自行收斂時，才是如此。

另外還有一種複數的幾何意義，頗爲流行而適合於許多用途者，即黎曼氏的數字圓球（die Rimnannsche Zahlenkugel）。吾人對此數字圓球可設想就坐標原點在$x-y$平面上作此圓球，其半徑等於$\frac{1}{2}$（見第五圖），而將圓球表面上各點從“北極”（0，0，1）出發投影於$x-y$平面之內；吾人稱此

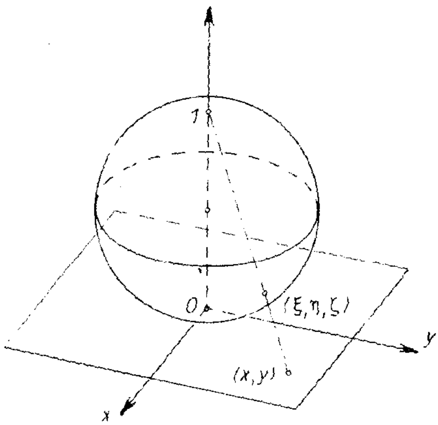

圖 5.　黎曼數字圓球

投影為**球極平面投影**(stereographische Projektion)。如以(ξ,η,ζ)代表圓球各點的坐標,再以(x,y) 代表平面各點的坐標,則適用下面的造像方程式:

$$\xi=\frac{x}{1+x^2+y^2} \qquad \eta=\frac{y}{1+x^2+y^2} \qquad \zeta=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

吾人對這些方程式易於予以證實:首先行得通者應為下面的式子:

$$\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

因此,其眞正的關鍵乃在圓球上一個點而已。此外,對於投影特性獲得滿足的情形,還要加以證明;而證明的結果應為(0,0,1),(ξ,η,ζ),及(x,y,0)這三個點均在一條直線上;這是由於(ξ,η,ζ),(0,0,1)這兩個點的**連結矢量**

$$(\xi,\eta,\zeta-1)=\frac{1}{1+x^2+y^2}(x,y,-1)$$

及(x,y,0),(0,0,1)這兩個點的**連結矢量**,意即

$$(x,y,-1)$$

彼此互成一定的比例所產生的結果。

由此可見;吾人對於一個**複數** $z=x+\mathrm{i}y$,亦可利用所屬的圓球點(ξ,η,ζ)表示出來。所謂**數字圓球**(Zahlenkugel)的優點,此處是易於解釋的,即將平面上一個無限遠的點∞配屬於圓球的北極。如利用如此一個點∞加入計算,而使**複數平面**成為嚴密封鎖狀態,那就必將一再的證實其為的確具有適應性。那末這種情形就與**投影幾何**的使用略有偏差發生,因為在**投影幾何**方面無限遠的一條直線是意義深長的緣故。此處只能當作一個點∞的暫時論證予以明白規定者,即在**有理函數**方面是根據它的零位出現分子與分母的某種對稱性:在分子的零位中,其函數值等於零;但在分母的零位中,其函數值却等於無窮大(∞)。吾人現在可以討論"趨向於∞而自行收斂"的問題,假如在球面上一個點的敍列趨向於北極而自行收斂的話,那末吾人就可以說:在數字平面上的像點是趨向於∞而自行收斂。顯然亦可寫成:$z_n\to\infty$,如果有一個號碼$N(M)$配屬於任何正數M;因而$|z_n|>M$是對$n\geqq N(M)$而言,是則假如最後在**複數平面**內所有點都位於任何一個大圓之外的話。至於有關**數字圓球**的其他應用問題,俟後再作深切之研究。

我們做了上述的各種準備之後,現在進而討論一個**複變數**z的函數問題;其中就一般而言,我們對於函數值w也要當作複數來看待:

$$w=f(z)\ ;$$

由此可見，利用如此一個函數乃將**複數**w配屬於某些**複數**z。吾人可以將此二數分解爲**實部**與**虛部**，即$z=x+\mathrm{i}y$及$w=u+\mathrm{i}v$。我們仔細看一看下面的函數

$$w=\frac{1}{z}$$

當作第一個例題來研究，上式中產生的結果如下：

$$w=\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=\frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

此處出現的u與v，是代表x與y的函數；那末吾人可以說：凡屬**複數值函數**乃爲含有二變數x與y的兩個實值函數中一種綜合表示而已。

對**複數值函數**用圖形來表示的意義而言，乃由與**實值函數**的類似情形產生一種可能性；其實，一個**實值函數**$y=f(x)$利用$x-y$平面內一條曲線令人一目了然的表示，不能拿到這裡來使之一般化者，祇以爲了達此目的似乎要有四個實的坐標x,y,u,v；那末非有四維的一個空間不可的緣故。但吾人對於一個**實值函數**$y=f(x)$亦可解釋爲x軸上各點造像於y軸之上（見第六圖）。類似這種情形，是則**複數值函數**$w=f(z)$自能當作**複數**z**平面**上

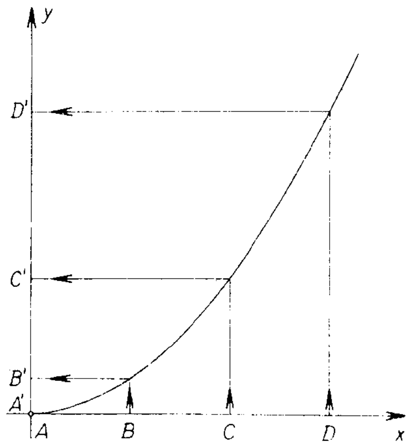

圖 6.　實值函數當作點的造像看待

各點造其像於**複數**w**平面**之上看待。我們再拿函數$w=\dfrac{1}{2}$的例子來說明這種

情形。在第七圖中作爲基礎的，並不是 z 平面內的直角 $x-y$ 坐標，却爲極坐標 r,φ；在 w 平面者，相當的是以極坐標 R,Φ 爲基礎；因爲這些坐標比較容易與此特殊函數相配合的緣故。由 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 這一點寫成下面的式子：

$$W=R(\cos\Phi+i\cdot\sin\Phi)=\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$$

$$=\frac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\frac{1}{r}[\cos(\ \varphi\ )+i\sin(\ \varphi\ )]$$

由此可見，與 z 平面上含有坐標 r,φ 之點互成搭配者，應爲 w 平面上其 $R=\frac{1}{r}$ 及 $\Phi=-\varphi$ 這個點。對一個坐標四角形而言，在第七圖上是規定爲像的四

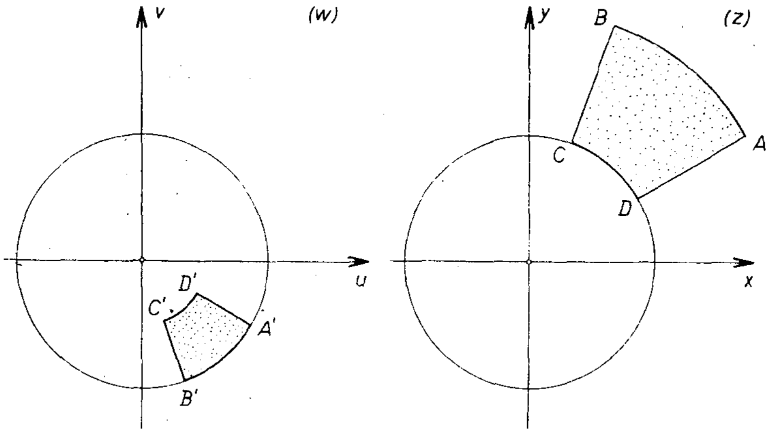

圖 7.　$w=1/z$ 的造像

邊形。當造像的時候，在實值軸上（$\Phi=-\varphi$）的反映，是與“倒半徑變換”（$R=\frac{1}{r}$）結合在一起的。吾人如果借助於數字圓球的想像，用以解釋造像的情形；是則相當於 z 圓球上的 0 點者，應爲 w 圓球上的 ∞ 點；反過來說，亦是如此。但首先我們對於連帶考慮 ∞ 點的可能性，却不應該加以運用。

讀者仍須參考本章最後在**問題與實例**中所學的第一例題，其中是討論函

數$w=z^2$及$w=\sqrt{z}$的問題。

與實值範圍內完全相同，吾人對於**複數值函數**中所出現的**連續性**、**可微分性**、及**可積分性**，也一樣的感到興趣。此處首先對於連續性的要求，進行研究與分析。與實數中頗相類似的情形，吾人對於z_0這一點內的一個函數稱爲具有連續性，只要這個函數是用z_0這個點及z_0的周遭來說明；而且只要$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$。吾人如果把函數$f(z)$分解爲**實部**與**虛部**兩部分：

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$$

是則當作與此定義等價（或稱同值）看待者應爲：一個函數$f(z)$是連續的，假如u與v在x,y兩個變數中共同具有連續性的話。這兩個定義的等價關係，乃由關於**複數敍列之收斂性**（見上兩頁第四圖以下所講）所作種種考慮而產生的結果。

然後也一樣如同實數方面得一結論，即凡**連續函數**的相加、相減、以及相乘，依然是連續的；而且同樣的情形適用於分母所屬零位外部的商數。因爲函數$w=\text{const}$及$w=z$都具有連續性，這是從定義中立即看出來的；所以在分母所屬零位外部的一切**有理函數**，結果都是連續的。

此外，吾人需要**區域**的概念。稱爲一個**區域**者，應爲**複數平面**中一大堆相連在一起的、彼此間留有空隙的稀疏點；意即如此一大堆的點，其中每兩個點可用一條路線相連；而且每一個點也包含以**正半徑**繞此點畫出來的一個圓盤者（見第八圖）。對我們的目的而言，下述的路線定義是足敷應用的：

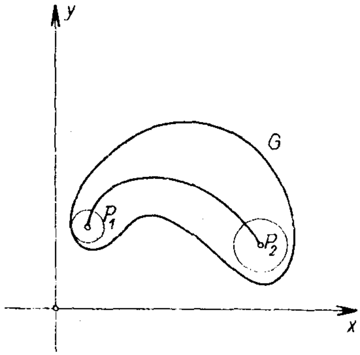

圖 8.　區域的概念示意圖

一條路線是一根曲線$[x(t),y(t)]$；因此，$x(t)$與$y(t)$對所有t而言是連續的而且含有極其有限的例外也是連續可微分的。根據這個定義，凡邊緣

上所有點均不屬於區域以內。如果硬要把它算進去的話，那末很明白的這是一個自成系統的區域問題。點堆 $|z|<r$ 是一個敞開而沒有邊緣的圓盤，此圓盤應爲適合於一個區域的例子；但圓盤 $|z|\leq r$ 却稱爲對外隔絕，或自成一個系統的。

有時如果討論包含∞這個點的區域，亦適合乎目的；簡單說來，這就是屬於平面上的一些點堆，而這種點堆乃利用**球極平面投影**由**數字圓球**的敞開數量所產生，且包含北極在內者。但我們要加以約定：假如不是很明白的說出少許不同的事物，那末一個區域 G 就應該有限的；意即在一個充分大的圓圈內佔有「坐標原點」周的地方。

我們還要緊跟着確定一些其餘的概念。好比一條曲線（或一條"路線"）應該稱爲單純閉合的，或者稱爲不含二重點的，只要該曲線的本身不自行相交；意即假如 $[x(t_1),y(t_2)]=[x(t_2),y(t_2)]$ 這兩個點的相等只能出現於 $t_1=t_2$ 的情形之下，除了路線的一頭一尾，這兩個點是成爲疊合狀態的。在區域方面可能發生有"洞穴"的情形。如果沒有洞穴，這個區域就稱爲簡單相連的；準確一些言之：一個區域 G 稱爲簡單相連的，只要任何一條單純閉合的曲線在區域 G 內具有一切曲線的內點屬於區域 G 之特性。

問題與實例

【第一題】由 z 平面造像於 w 平面，乃用下列各函數作媒介，而且是應用極坐標完成造像的；試討論之：

a）　$w=z^2$

b）　$w^2=z$，意即　$w=z^{\frac{1}{2}}$

提示：在兩個平面中依然引用極坐標 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 及 $w=R(\cos\Phi+i\sin\Phi)$。此處由函數 a）的方程式 $w=z^2$ 寫成：

$$R(\cos\Phi+i\sin\Phi)=r^2(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)$$

由此可見，此處上面的 z **半平面** $0\leq\varphi<\pi$ 已經含有整個 w 平面，當作所造成之像。下面的 z **半平面**再一次的含有整個 w 平面當作所造成之像；因此，w 平面是利用 $w=z^2$ 的造像接受雙重的覆蓋（坐標原點則屬例外），假如原來的像點把 z 平面完全塡滿的話（見第九圖如下）。

這已經導致函數 b）的解法，只要將 z 平面與 w 平面上的坐標軸予以調換而已。此處吾人求得方程式如下：

$$R^2(\cos2\Phi+i\sin2\Phi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com