工 程 力 学
计算机分析方法与应用

张善元　李　珠　吴桂英　崔江余　著

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程力学计算机分析方法与应用/张善元等著. -北京：中国建材工业出版社，1998
ISBN 7-80090-694-9

Ⅰ. 工… Ⅱ. 张… Ⅲ. 工程力学-计算-计算机应用Ⅳ. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 16468 号

工程力学计算机分析方法与应用

张善元　李　珠　吴桂英　崔江余　著

*

中国建材工业出版社出版
（北京海淀区三里河路 11 号　邮编：100831）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京密云红光印刷厂印刷

*

开本：787 毫米×1092 毫米　16 开　印张：20.125　字数：515 千字
1998 年 10 月第一版　1998 年 10 月第一次印刷
印数：1—3000 册　定价：36.00 元
ISBN 7-80090-694-9/TP·24

内　容　简　介

本书将工程力学与计算机应用有机地结合在一起，建立了较为统一的计算机分析理论体系及程序设计原理，并提供了工程力学基本内容的源程序。本书力图用现代的、适用于计算机分析的观点组织基本理论，所编程序使用方便，通用性和实用性较强。可用于求解工程力学习题，也可直接用于求解工程实际问题。因此，本书既开拓了学习工程力学课程的新途径，又具有较大的工程应用价值。

本书共分八章，每一章讲述一类问题的计算机分析，最终归结为一个具有较强功能的程序，并配以适当的范例与习题。程序的设计注意由浅入深、由易到难地循序渐进。

本书可作为理工科院校力学、土木、机械、水利和航空等有关专业开设工程力学计算机分析教材，也可供有关工程技术人员作设计、科研参考之用。

前　　言

工程力学是应用性很强的科学，长期以来在许多技术领域发展的推动下，已经形成相当完善的经典理论，发展了许多行之有效的求解工程力学问题的方法和技巧，国内外出版了大量有关工程力学的优秀专著和教科书，可供理工科的学生和广大工程技术人员使用，对于推动科技进步和人类物质文明创建起到了极大的推动作用。近些年来，计算机已广泛应用于科学研究和工程设计，目前大学里使用的以介绍传统方法为主的工程力学教学用书已显得不能适应，需要调整教学内容，更新教学手段，改进教学方法。工程力学与现代化的计算机相结合已是当前教学改革的必然趋势。本书试图给理工科大学生提供一本利用计算机分析方法学习工程力学的教科书。

本书融进了作者们多年从事工程力学计算机分析所研究的理论与实践经验，其主要内容均在太原理工大学工程力学、机械、土木等专业多次使用，这里将多年使用的讲义及研究成果整理成比较系统的理论体系以飨读者。本书简明易懂的理论，方便实用的程序，形象直观的图形显示，给学生开辟了一个在计算机上学习工程力学的园地。同时，引入计算机分析，将会使工程力学所能解决的问题加深、加宽，使繁琐、复杂的重复迭代运算变得轻而易举。有限单元法、有限差分法等有效的数值方法以及矩阵分析和矢量方程等内容的引入，对于工程力学课程改革和学生知识结构的更新都将是有益的。总之，希望通过本书的出版能推动面向21世纪系列课程改革的发展。

工程力学作为一门与工程设计和工程计算有关的技术科学，绝大部分内容都可以采用计算机分析。本书在内容编排上，力图用现代的、适用于计算机分析的观点组织基本理论体系，旨在使学生理解并掌握工程力学的计算机分析理论和数学建模；在程序设计方面，力求循序渐进，由易到难，充分利用汉字式人机对话功能或菜单式操作，绘图及动画显示功能，旨在逐步培养学生的结构化程序设计能力与应用计算机解决实际问题的能力。

本书内容共分八章，前四章为静力学、运动学与动力学，后四章为杆件拉伸（压缩）、弯曲、扭转的强度和刚度及压杆稳定性内容。静力学用矩阵分析理论建立统一公式，运动学将点的复合运动与刚体平面运动在数学上统一为矢量方程，动力学将运动微分方程统一化为状态空间表示，使得所编程序建立在比较统一的理论体系基础之上。基于矩阵位移法的超静定桁架，需反复迭代运算的压杆截面设计，有限差分等方法求解梁的挠度，复杂载荷作用下内力图在屏幕上的直观显示等内容，使得工程力学教学突破了传统的手算模式。本书所有习题经反复精选，内容新颖，不与教材重复，并给出计算机求解提示和求解方法。

本书程序采用FORTRAN和TRUE BASIC两种语言编制，以供不同读者阅读与使用。

本书由张善元、李珠、吴桂英、崔江余共同完成。张善元负责全书统搞和绪论；第一、二、三、四章由李珠完成；第六、七章由吴桂英完成；第五、八章由崔江余完成。本书在出版过程中得到了山西省教委的支持及山西省留学归国人员基金资助，太原理工大学理论力学、材料力学和应用力学教研室老师们及出版社同志们给予了热情支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

限于作者水平有限，错误与不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

1998年8月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

绪　论

第一节　本书的背景与形成过程

工程力学也称工科基础力学，从字面上清楚地看到，它体现了力学与工程的结合，它将为工程师们提供必备的力学基础。实际的工程问题是丰富多采的，为适应不同类型、不同层次工程问题的需要，力学已形成了理论力学、材料力学、结构力学、弹性力学、塑性力学、板壳力学、断裂力学、流体力学等多分支学科。不同类型的工程专业对力学要求的侧重面是不同的，但是所有工程类型专业的工程师们都应具备良好的力学素质，这一点都是共同的，因此无论哪一个国家都把工程力学课程指定为高等工程专业学生必修的技术基础课。通常工程力学是指理论力学和材料力学，有些工程力学教科书也涉及到弹性力学初步和其它力学分支的一些概念。长期的工程教育实践表明，工程力学在工科学生的培养过程中起着至关重要的作用，它不仅为后续专业课程的教学奠定了基础，而且直接提供了解决工程实际问题的知识和方法，同时通过力学建模和科学计算的训练对培养学生的逻辑思维、科学作风和提高学生的全面素质是极为有益的。

然而，随着科学技术的进步，当今社会对专业技术人才需求的标准已从单纯技术型向综合素质型转变，即需要大工程观念下的工程师，传统的工程力学教育已显得很不适应。长期以来工科力学的教学过分地强调理论的系统性、完整性，相关课程的内容有不少重迭，派生性、细节性的内容也不断延伸，教材编的很厚、授课时数花费很多，加之力学课程作业多，计算量大，过多地占去了学生课外发展的时间，不利于整体培养过程的优化。近几年来，在全国范围内，一场以提高质量意识，加强素质教育为中心的改革教育思想和教育观念的大讨论正在悄然兴起，随之，以面向 21 世纪教学内容和课程体系改革为重点的教学改革全面展开，极大地调动了广大教师的教学改革的积极性，相应的教学方法的调整和教学手段的更新也都呈现出一片改革的景象。正是在这一改革浪潮的推动下，几年来我们在工程力学和计算机应用的结合方面进行了一些探索与实践，并收到了较好的效果，现将有关成果整理成《工程力学计算机分析方法与应用》，作为工程力学教学参考书，为工程类专业学生提供了一系列完成工程力学问题分析与计算的计算机程序。我们相信，该书不仅会对学生学习工程力学课程带来极大的兴趣和方便，同时对使用计算机分析方法学习后续专业课程乃至解决工程实际问题都会有很大帮助。

第二节　计算尺→计算器→计算机

工程力学课程特点之一是分析计算量大，计算工具及其对计算工具的熟练程度直接影响着该门课程的学习。在教学过程中用于进行科学计算的工具大致经历了三个阶段，50～60 年代基本上是手拉计算尺，70～80 年代主要靠计算器，90 年代起计算机才逐渐进入了各个教学环节。70 年代以前的工科大学生几乎是人手一把计算尺随身携带，为了提高解题速度，同学们都在下功夫苦练各种尺面配合使用的技巧。用计算尺完成大量的数字运算比起手算要快得

多，计算尺的精度仅在有效数字的四位，基本上能满足工程的要求，但是对于一些要求更高的问题，计算尺无论精度上还是速度上都是不能胜任的。70年代以后科学计算器完全替代了计算尺，它精度高、掌握容易、操作方便，而且价格便宜，成为工科大学生必备学习用具。不过计算尺和计算器的功能类似，它们能完成的工作也都是数字间的运算或求得常用函数的值，行使了用笔演算和查数字用表的功能。稍微复杂的工程力学问题往往需要求解大型的代数方程组或微分方程组，即使从理论上讲，分析方法是清楚的，但是要完成具体的数值计算，借用计算尺和计算器都是无法实现的。同时，在这样的计算条件下，工程力学的教学受到了很大的限制，只能通过处理只有一两个变元的简单问题来描述该类问题的基本特征，而对于问题的一般性却难以给出全面的、定量的、清晰的物理图象。计算机是先进的计算工具，任何复杂的问题，只要简化为适当的数学物理模型进而利用计算机求解，大都能获得迅速而准确的解答，计算机的引入，使得工程力学的内容、体系、方法、习题以及教学形式等都发生了相应改变。只有计算机普及使用后，工程力学教学才能发生历史性的变革。

计算机的出现及其迅速发展是本世纪科学技术最卓越的成就之一，它已在现代化的产业部门、国防建设和科学研究各个领域中获得了广泛的应用，对推动人类文明和社会进步发生了巨大的影响。计算机一问世就和力学学科交叉产生了计算力学等分支学科，有限元方法的出现就是计算机和力学结合最成功的典范，它给经典力学带来了活力和繁荣。在上个世纪发展起来的许多力学基本方程，搁置了很久，直到计算机在力学中获得了广泛的应用以后，才发挥出其真正的作用，并在工程中获得广泛的应用，混沌现象的揭示就是这一应用的重要标志。当前计算机在工程力学中的应用十分活跃，并对传统教学体系发生着深刻的影响。几年来，随着计算机在教学中的不断应用，工程力学课程体系和教学内容正在做相应的调整和更新，例如，原来教科书中图解静力学内容已基本消失，一些在使用计算尺和计算器条件下发展起来的计算技能的内容也在减少和淡化。为适应高新技术发展的需要，将现代化的计算工具与工程力学相结合，培养高素质的人材是目前工科院校教学改革的一项重要任务。目前，工程力学教学内容的改革还处于起步阶段，各工科院校都在积极探索力学系列课程教学改革方案，组织编写适合于计算机教学的教材和高质量的CAI课件。本书的宗旨也就是为了适应上述工程力学教学改革的需要，使计算机与工程力学有机地结合在一起，更好地培养学生综合应用所学知识解决实际问题的能力。通过工程力学计算机分析不仅能加深理解和掌握工程力学的基本理论和概念；而且能熟练掌握计算机的操作，提高数值分析和科学计算的能力。

第三节　工程力学问题编程与上机

工程力学的编程要充分考虑工程力学与计算机相结合的特点，如何将各种不同的工程力学问题演绎成适合计算机处理的力学模型，是进行工程力学计算机分析首先要解决的问题。在编程过程中，既要考虑到程序的易读性、结构化设计、通用性、程序容易掌握使用等重要因素外，还要考虑以下问题：

1. 程序的功能

编写程序前首先要明确程序所要解决的问题，即程序功能。功能越强编写和调试越困难。通常应根据实际问题的要求，抓住主要矛盾，适当地确定程序的主要功能。

2. 力学模型

利用计算机解决工程实际中的问题以及工程力学教科书中的习题，必须先建立力学模型。需要把该力学模型的几何、材料、约束、主动力等信息以数据的形式输入计算机。力学模型

的选取既要适合计算机分析，也要很好地反映实际问题。

3. 计算方法

根据力学模型选取适当的计算方法，工程力学计算机分析中，常遇到求解代数方程组、微分方程组、求导、积分等运算。在计算机中这些运算一般只能采用数值计算方法，而数值计算方法很多，需根据实际问题选择合适的计算方法，而这些计算方法一般已编制成现成的程序可直接使用。

4. 编程语言

用于计算机分析的编程语言有很多种。目前常用的有 BASIC，TRUE BASIC，FORTRAN，C 语言等，这些编程语言各有千秋，可根据个人的实际情况决定选用其中一种。本书主要强调工程力学的编程理论与实践，不限制用哪一种语言。本书中出现的程序有 TRUE BASIC、FORTRAN 两种语言。程序功能取决于编程的理论，用何种算法语言编程都是可以的，应把注意力放在培养解决工程力学实际问题的能力上来。各种语言之间的联系是明显的，很容易实现各种算法语言之间的转化。

5. 编程和调试

应从编小程序和简单问题入手。当自己动手编程解决了一个简单问题也非常了不起。首先，已开始步入利用计算机解决实际问题的领域；其次，为编制更复杂的计算程序打下了基础。编程应选一个好的环境，针对目前大部分高校实际情况，建议利用 WPS 的非文书文件功能编程，也可用 EDIT 西文编辑软件和 WINDOWS 环境下 WORD 软件进行编程，这要根据用户所用微机的条件确定。编程过程中要充分运用编辑软件的复制、块操作、查找、替换等编辑功能，这样可大大提高编程速度，不提倡逐字逐句的输入。调试过程一般会出现两类错误，一类是语法错误，这类错误易按照提示进行改正；另一类是运行错误，比较难以处理，一般采用断点法和输出中间运算结果的方法解决程序运行错误。

6. 程序运行

运行程序时，应在计算机屏幕上提示用户输入信息，很多初学者所编程序不注意这一点，在执行程序的过程中，自己也不知道下一步要输入什么，只是看着屏幕上不断闪亮的光标发呆，这可称之为“盲程序”。要解决这个问题有两种方法，一种方法是采用人机对话的方式，另一种方法是制作菜单。本书程序中大都采用人机对话方式或菜单式操作。运行过程中少量的数据可以通过键盘输入，对大量的数据输入，建议采用数据文件或者放在 DATA 语句中，这几种输入方法本书均有涉及。

第四节　本书内容概要与编排

本书在工程力学计算机分析理论方面建立了较为统一的理论体系，并在该理论体系基础上编制了一些通用程序。这些通用程序均具有很强的汉字式人机对话功能或采用菜单式操作，且配有绘图功能，使用方便，可用于求解大部分工程力学习题，并扩大了解决工程力学实际问题的范围。可让学生从繁重的手工解题中得到一些解脱，并加深对基本理论和概念的理解与掌握。本书注重培养学生应用计算机解决实际问题的能力，以适应现代科学技术的发展。

全书共八章，包括工程力学的大部分内容，并配有习题、例题和一系列实用程序。在内容编排上，第一章到第四章为理论力学部分，包括静力学、运动学和动力学主要内容；第五章到第八章为材料力学部分，包括杆件拉伸（压缩）、扭转、弯曲、组合变形和压杆稳定主要内容。每一章讲述一类问题的计算机分析方法，先讲述基本的理论并从简单问题开始编程，让

学生掌握基本理论和编程的基本思路，然后再逐步过渡到较为复杂的程序。每一章最后给出一个功能较强的通用程序，该程序基本上是一个“傻瓜”程序，易于使用和掌握。

学习本书的建议：了解一到两种计算机算法语言，基本掌握本书提供的理论公式，这对使用通用程序，特别对开发工程力学计算软件会有很大的帮助。坐在计算机前学习本书是唯一的有效途径。

第一章　静力学计算机分析理论

第一节　力系与平衡方程式

作为本书需要，下面将静力学力系的各种平衡方程式汇总如下：

一、平面汇交力系平衡方程

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

二、平面平行力系平衡方程

若力系平行 y 轴

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

式（1.2）也称平面平行力系基本平衡方程式（或平面平行力系一力矩平衡方程式）。

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad AB\text{ 连线与诸力不平行} \tag{1.3}$$

式（1.3）也称平面平行力系二力矩平衡方程式。

三、平面力偶系平衡方程式

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \tag{1.4}$$

四、平面任意力系平衡方程式

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_0(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

式（1.5）也称平面任意力系基本平衡方程式（或平面任意力系一力矩平衡方程式）。

此为试读,需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0 \quad AB\text{ 连线与 }x\text{ 轴不垂直} \\ \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

式（1.6）也称平面任意力系二力矩平衡方程式。

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0 \quad \begin{array}{l} A、B、C\text{ 三点不共线} \\ \text{（或 }A、B、C\text{ 三点所围面积不为零）} \end{array} \\ \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

式（1.7）也称平面任意力系三力矩平衡方程式。

五、空间汇交力系平衡方程式

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} z_i = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

六、空间平行力系平衡方程式

假设力系平行 z 轴

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} z_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

七、空间力偶系平衡方程式

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

八、空间任意力系平衡方程式

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}x_i=0\\&\sum_{i=1}^{n}y_i=0\\&\sum_{i=1}^{n}z_i=0\\&\sum_{i=1}^{n}m_x(\vec{F}_i)=0\\&\sum_{i=1}^{n}m_y(\vec{F}_i)=0\\&\sum_{i=1}^{n}m_z(\vec{F}_i)=0\end{aligned}\right. \tag{1.11}$$

式（1.11）也称空间任意力系的基本平衡方程式，或者称空间任意力系的三力矩平衡方程式。

以上力系共11组平衡方程式构成静力学理论体系。这11组平衡方程式之间存在着一定的关系：从式（1.11）可以推出除式（1.3）、（1.6）、（1.7）三组平衡方程式之外的其余任何一组平衡方程式，也就是说从空间任意力系平衡方程式可以推出其它任何一个力系的基本平衡方程式，但对任何一种非基本平衡方程式，则不能从式（1.11）推出，说明式（1.11）不包括非基本平衡方程式。从理论上讲空间任意力系包括全部力系，其它力系都是空间任意力系的特例，从而应当能从空间任意力系的平衡方程式推出其余各种平衡方程式，所以以上11组平衡方程式的理论体系是不封闭的。这里只是说明，并没有给出严格证明，在以后的章节将证明这种不封闭性，并提出静力学统一的平衡方程式，正是依据统一的平衡方程式才能编制通用计算程序。

第二节　静力学体系的统一性

一、统一公式的意义

要想编出通用的软件供解决实际问题使用，仅靠教科书上给出的公式是不够的。如空间任意力系平衡方程式，书上只给出了一个最简单的三力矩空间任意力系平衡方程式（也称为空间基本平衡方程式），如式（1.11）。

式（1.11）中前三式是力对轴投影平衡方程式，后三式是力对轴取矩的平衡方程式，n 为力系中力的个数，x_i、y_i、z_i 分别为力系 $\vec{F}_i$（$i=1$，…，n）中的第 i 个力在 x、y、z 坐标上的投影。而平面任意力系的平衡方程式有三组，称为一矩式（也称平面任意力系基本平衡方程式），如式（1.5）；二矩式，如式（1.6），不过式（1.6）若想成为判别平面任意力系平衡的充分必要条件，需加上 AB 连线不垂直 x 轴这样一个限制条件；三矩式，如式（1.7），式（1.7）同式（1.6）一样也有其限制条件，即 A、B、C 三点不在同一条直线上（或者 A、B、C 三点所围成的面积不为零）。

从以上平面任意力系平衡方程的多样性（共3组）来看，使得解决实际问题灵活、方便。但迄今为止，空间任意力系的平衡方程式所有教科书上只给出了式（1.11），而没有给出像平

面任意力系一样的二力矩式和三力矩式，这样便存在一些问题：

1. 理论体系的不封闭。如理论上空间任意力系包括平面任意力系这样一个特例，所以应能从（1.11）推出（1.5），（1.6），（1.7）三组平衡方程式，但实际上只能从（1.11）推出（1.5），而不能推出（1.6）和（1.7）。原因在于空间任意力系也存在类似平面任意力系一样的三、四、五、六力矩式，只不过这些平衡方程式的限制条件不像（1.6），（1.7）两式一样，很容易写出其限制条件。这个问题尽管有很多学者研究过，希望能给出一个明确的且具有明显几何意义的限制条件，但由于这个问题过于复杂，更主要是由于不考虑用计算机解题，人们在使用空间任意力系的三、四、五、六力矩式就提出了列一个方程解一个未知数，不解联立方程的解题方案，这样由于一个方程解一个未知数就自然避免了解同解方程的问题，自然也就满足了空间任意力系的三、四、五、六力矩式的限制条件，这种方法对手算是有效的，因为人的大脑起了避开限制条件的调解作用，因此空间任意力系的三、四、五、六力矩平衡方程式的研究就被忽视了。如果用计算机编程解题，则必然不能避开限制条件，计算机不像人的大脑能自动避免解同解方程，一旦没有避开限制条件，计算机就会解同解方程，从而碰到“死循环”、“溢出”或“无解”等问题，所以要想编制静力学通用程序，必须首先保证静力学理论体系的封闭性，从而必须从根本上解决空间任意力系三、四、五、六力矩式平衡方程的限制条件问题，以及搞清静力学力系之间的联系。

2. 存在的第二个问题是仅用（空间）平面任意力系的基本平衡方程式编程会遇到难以解决的问题。如果基本平衡方程数为 3 个，则 n 个刚体共有 $3n$ 个未知数，而实际问题大都是未知数小于 $3n$，正好 $3n$ 个未知数的题目很少，所以只按基本平衡方程编程，会处理不了未知力少的问题，这就限制了解题类型。如果希望计算机能像人的大脑一样灵活解题，并希望所编制的程序符合理论力学课程的特点确实起到 CAI 的作用，这就需要采用非基本平衡方程式编程，而且采用基本平衡方程式编程所得的平衡方程不是最简的，这会影响计算效率。解决以上问题的方法只有一个，采用空间任意力系平衡方程式的统一公式编程，而且该公式必须覆盖静力学各种力系。

为推导静力学平衡方程式的统一公式以及它和各力系之间的联系，应首先明确各力系之间的关系，而这种关系用下面的关系框图（图 1.1）便一目了然。

在以上各平衡方程之间的关系框图中有 * 号的内容是以往教科书中所没有的，也是本书重点要讲的。先推导空间任意力系静力学求解的统一公式，然后按框图关系（加 * 号的）逐个推导，至于不加 * 号的内容在教科书上都有涉及，故本书不予讨论。

二、静力学统一公式

静力学空间任意力系平衡方程的统一公式，可以通过力系向一点简化的方法推导。

如图 1.2 所示，设力系 $\vec{F}_i$（$i=1, \cdots, n$）的主矢为 $\vec{R}$、主矩为 $\vec{M}_0$，如图 1.2 所示。力系对任意轴 L_i 上任意点 A（x_i，y_i，z_i）力矩为：

$$\vec{M}_A = \vec{M}_0 + \vec{R} \times \vec{r}_i \tag{1.12}$$

于是力系对 L_i 轴的力矩平衡方程可写为：

$$\vec{M}_A \cdot \vec{e}_i = M_x l_i + M_y m_i + M_z n_i + [(\vec{r}_i \times \vec{e}_i) \cdot \vec{i}]R_x + [(\vec{r}_i \times \vec{e}_i) \cdot \vec{j}]R_y$$

$$+ [(\vec{r}_i \times \vec{e}_i) \cdot \vec{k}]R_z = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{1.13}$$

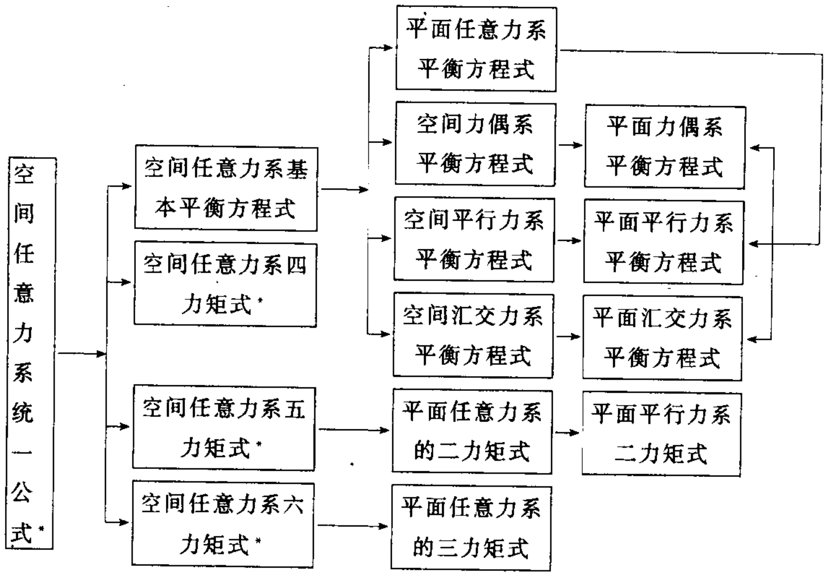

图 1.1 静力学全部平衡方程之间的关系框图

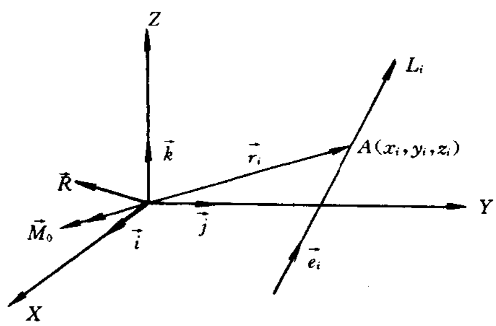

图 1.2 投影轴与矩轴在空间的位置

其中 $\vec{M}_0=[M_x,M_y,M_z]^T$；$\vec{R}=[R_x,R_y,R_z]^T$；$\vec{r}_i=[x_i,\ y_i,\ z_i]^T$；$\vec{e}_i=[l_i,\ m_i,\ n_i]^T$ 为 L_i 轴单位方向矢量。力系在 L_i 轴上 $6-m$ 个投影平衡方程为：

$$\vec{R}\cdot\vec{e}_j=R_xl_j+R_ym_j+R_zn_j=0 \qquad (1.14)$$
$$(j=m+1,\cdots,6)$$

式(1.13)，(1.14)合起来就是空间力系的6个平衡方程，写成矩阵形式如下：

$$\left\{\begin{matrix}\sum L_{m+1}\\ \cdots\\ \sum L_6\\ \sum m_{L_1}\\ \cdots\\ \sum m_{L_m}\end{matrix}\right\}=\left[\begin{matrix}l_{m+1} & m_{m+1} & n_{m+1} & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ l_6 & m_6 & n_6 & 0 & 0 & 0\\ (\vec{r}_1\times\vec{e}_1)\cdot\vec{i} & (\vec{r}_1\times\vec{e}_1)\cdot\vec{j} & (\vec{r}_1\times\vec{e}_1)\cdot\vec{k} & l_1 & m_1 & n_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\vec{r}_m\times\vec{e}_m)\cdot\vec{i} & (\vec{r}_m\times\vec{e}_m)\cdot\vec{j} & (\vec{r}_m\times\vec{e}_m)\cdot\vec{k} & l_m & m_m & n_m\end{matrix}\right]\left\{\begin{matrix}R_x\\ R_y\\ R_z\\ M_x\\ M_y\\ M_z\end{matrix}\right\}=0 \qquad (1.15)$$

第三节 统一公式的应用

一、关于统一公式的若干结论

式(1.15)有唯一零解的充要条件是系数矩阵满秩，因此所选 L_i 轴必须满足一定条件。把式(1.15)中的系数矩阵定义为限制条件矩阵，记作 D_m。由于推导时未对力系加任何限制条件，所以这个结果适用于静、动力学。由于对投影轴 L_{m+1}，…，L_6，矩轴 L_1，…，L_m 未加限制，所以结果包含空间力系所有情况。故 D_m 阵可以作为判别所选轴是否独立的统一矩阵判据，适用于计算机分析。

结论一：质点系在空间力系作用下平衡或形式上平衡时，能使 6 个平衡方程成为空间力系平衡的充要条件是由这 6 个轴的参数构成的 D_m 阵满秩。

结论二：从 D_m 阵满秩可知，共 $4\times(C_{36}^{1}+\cdots+C_{36}^{36})-18=4\times2^{36}-18$ 种可能性，从而有众多种可能的三、四、五、六力矩式，因此明确所有力矩式的限制条件是不可能的，也是不必要的。D_m 阵本身就可作为统一判据。

结论三：D_m 阵各项元素都有明确的几何意义，如 $(\vec{r}_i\times\vec{e}_i)\cdot\vec{i}\neq0$ 要求 L_i 轴和 x 轴不共面。

结论四：$m=3$，4，5，6 分别对应三、四、五、六力矩式。

二、三、四、五、六力矩式的最简形式

分别让 D_3、D_4、D_5、D_6 对应于单位矩阵 I，就可找到三、四、五、六力矩式的最简形式及相应的限制条件。

1. 最简三力矩式

$$\begin{cases}\sum x_i=0\\ \sum y_i=0\\ \sum z_i=0\\ \sum m_{xi}=0\\ \sum m_{yi}=0\\ \sum m_{zi}=0\end{cases}\quad (x,y,z\text{ 轴共点正交})\tag{1.16}$$

式（1.16）也就是空间任意力系基本平衡方程式（1.15），但由式（1.16）不能编出通用计算程序，它只是静力学统一公式的一个特例。

2. 最简四、五、六力矩式

$$\begin{cases}\sum x=0\\ \sum y=0\\ \sum m_x=0\\ \sum m_y=0\\ \sum m_z=0\\ \sum m_{z'}=0\end{cases}\quad (z'\text{ 轴与 }z\text{ 轴不共面})\quad\text{最简四力矩式}\tag{1.17}$$

$$\begin{cases}\sum z=0\\ \sum m_x=0\\ \sum m_y=0\\ \sum m_z=0\\ \sum m_{x'}=0\\ \sum m_{y'}=0\end{cases}\quad \begin{matrix}(x'\text{ 轴与 }x\text{ 轴共面而与 }y\text{ 轴不共面},y'\text{ 轴与}\\ x\text{ 轴共面而与 }y\text{ 轴不共面})\quad\text{最简五力矩式}\end{matrix}\tag{1.18}$$

$$
\begin{cases}
\sum m_x = 0 \\
\sum m_y = 0 \\
\sum m_z = 0 & (x'、y'、z' \text{ 轴分别在 } xoy, yoz, zox \\
\sum m_{x'} = 0 & \text{平面且都不过原点）} \quad \text{最简六力矩式} \\
\sum m_{y'} = 0 \\
\sum m_{z'} = 0
\end{cases}
\tag{1.19}
$$

以上式（1.16）～（1.19）为所有三、四、五、六力矩式的最简情况，形式简单，几何意义明显，易于理解掌握，且诸下标具有可替换性。

3. 最简三、四、五、六力矩式的力学证明

以上从 $D_m=I$（$m=3$，4，5，6）推导三、四、五、六力矩式，学生不易掌握，为此下面采用力学意义明显的证法。仅以式（1.19）为例。

证明：

必要性证明是明显的。

充分性证明如下，将力系向任一点简化，得主矢 $\vec{R}'$ 和主矩 $\vec{M}_0$。

由 $M_0=\sqrt{\left(\sum m_x\right)^2+\left(\sum m_y\right)^2+\left(\sum m_z\right)^2}$，满足式(1.19)，则有 $\vec{M}_0=0$，将主矢 $\vec{R}'$ 分解为 $\vec{R}'_x$、$\vec{R}'_y$、$\vec{R}'_z$，如图 1.3 所示。

若 $\sum m_{x'}=0$，由合力矩定理知：

$$\sum m_{x'} = m_{x'}(\vec{R}') = m_{x'}(\vec{R}'_x) + m_{x'}(\vec{R}'_y) + m_{x'}(\vec{R}'_z)$$

因 y'，z' 轴分别在 zoy，xoz 平面内，故有：

$$m_{x'}(\vec{R}'_x) \equiv 0, m_{y'}(\vec{R}'_y) \equiv 0$$

$$\text{故：} \sum m_{x'} = m_{x'}(\vec{R}'_z) = R'_z d_1 = 0$$

由 x' 轴不过原点，所以 $d_1 \neq 0$，故 $R'_z=0$，同理可得 $R'_x=0$，$R'_y=0$，从而力系平衡，证毕。

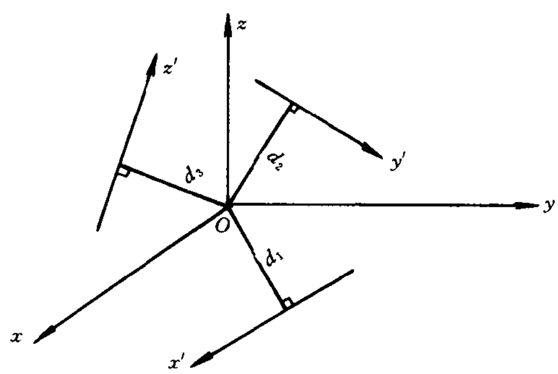

图 1.3　最简六力矩式矩轴分布示意图

以上证明对 x、y、z 轴共点不共面且不互相平行的非正交坐标系同样成立。作为最简六力矩式的一个推论，可得 Appell 结果，即空间力系六力矩平衡方程所选的六根矩轴可以是一体积不为零的任意四面体的六条棱，这只需让图 1.3 中的 x'、y'、z' 轴与 x、y、z 轴构成一封闭的四面体即可。

三、从最简五、六力矩式导出平面二、三力矩式

1. 从最简五力矩式导出平面二力矩式

用下标轮换方式可将式（1.18）改写为：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com