数学故事丛书

未知中的已知

—方程的故事

上海科学普及出版社

未知中的已知

·方程的故事·

张 远 南

上海科学普及出版社

内容提要

本书系数学故事丛书中的一册。全书用24篇生动有趣的小故事叙述方程的性质与用途。希望能通过非教学手段，寓数学于趣味之中。主要目的是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识。

序

我们的世界充满着未知，这种未知以极强的诱惑力，引导着人类去攻克、进取。

在数学中，形形色色的方程，无疑是自然界最为简明的、"未知"的表示方式。在数千年漫长的历史长河中，人类用自己的智慧，开辟了无数从未知通向已知的路，使巍峨的代数学宫殿，由此而显得更加金碧辉煌！

对于年轻一代，古老的方程理论，仍不失是科学大厦的基石。然而这本书没有打算，也不可能对此作完整的论述，那是教科书的任务。本书的目标，只是想激发读者的兴趣，并由此引起他们自觉学习这一知识的欲望。因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身往往是从兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，又从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者在长期实践中，深感普通教学的局限和不足，希望能通过非教学的手段，实现人类智慧接力棒的传递。

基于上述目的，作者计划尽自己的力量，写一套各自独立的数学读物，它们是：《偶然中的必然》、《未知中的已知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变量中的常量》、《抽象中的形象》等。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等故事，作者心目中的读者，是广大的中学生和数学爱好者，他们是衡量本书最为精确的天平。

由于作者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批

评指出。

但愿本书能为滋润智慧，充当雨露！

张远南

1987年12月

目　录

一、王冠疑案的始末

在地球零度经线穿过的地方，有一方界于亚、欧、非三大洲之间的著名水域，叫地中海。地中海的北滨，有一个形状酷似长靴的半岛，叫亚平宁半岛。与半岛隔海相望的，便是地中海的第一大岛西西里岛。在远古时代，岛上有一个滨海的叙拉古城，那是一个城堡国家。

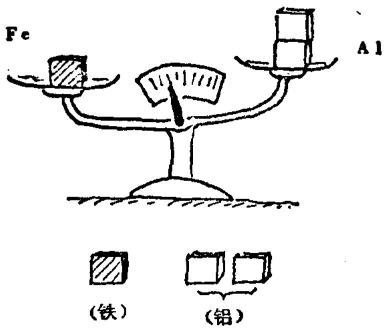
公元前241年，罗马远征军在与迦太基人的战争中，夺得了除叙拉古以外的整个西西里。公元前214年，马塞拉斯率领罗马大军再度进攻叙拉古。罗军在叙拉古城外团团围定。罗马的战船有恃无恐，耀武扬威地驶近叙拉古城下。叙军孤城无援，势如累卵。

在这千钧一发之际，但见城内举起无数面镜子，把阳光集中反射到敌船上。倾刻间，敌船起火，烈焰腾天。又见叙城内射出无数石弹，砸得围城罗军喊爹叫娘，心胆俱裂，只得仓惶撤离。当马塞拉斯弄清这一切并非由于天意的惩罚，而是出自一位学者的智慧时，这位罗马统帅惊呼了："我们是在同数学家打仗！"

这位使罗马军队闻风丧胆的数学家，就是著名的古希腊学者阿基米德（Archimedes，公元前287～前212）。然而，就是这样一位智慧超凡的阿基米德，也难免会有困惑的时候，王冠疑案便是一例。

传说有一次，叙拉古国王亥尼洛让一名工匠用纯金做成一顶王冠，王冠制作得精巧绝伦，光彩熠熠，国王为此十分高兴。但国王的近臣中，凡是亲手拿过王冠的人，都有一种奇怪的感觉，似乎这顶王冠不象是纯金做的。

大家知道，凭借手的感觉，人们是能够轻易分辨铝和铁的。这是因为同样体积的铁，要比同样体积的铝重得多。比如都是1立方厘米，铝的重量是2.7克，而铁的重量是7.8克，铁是铝重的两倍还要多。同样的道理，1立方厘米的金重19.3克，而1立方厘米的银重10.5克，差不多只相当于金的一半。



因此平时拿惯金银的大臣们，只要把王冠掂在手里，是不难分辨出是否用纯金做的。但大家都不敢贸然向国王挑明这件事，怕万一说不准，会惹上欺君的罪名，因此只是偷偷地议论着。

世上没有不透风的墙，大臣们的背地议论终于被国王知道。为此，国王大发雷霆之怒，立即召来工匠，责问如此这般。工匠分辩说：“陛下所给黄金，已全然用于王冠制作，不信把王冠称一称，一切便可清楚。”

王冠被精确地称量了，重量与国王所给的纯金分毫不差。

这下子国王的近臣们全都诚惶诚恐，因为如若工匠诚实，他们便有欺君之虞。于是大家纷纷参奏，说是难保匠师会把一部分的金换成银的，而又把重量做成一样。国王觉得这种说法不无道理，但仍疑信参半。于是限令大臣们在三天

常见物质比重比较表（在常温下）

种　　类	1立方厘米重量（克重）
水	1.00
松　木	0.6～0.8
软　木	0.22～0.26
煤　油	0.8
汽　油	0.899
海　水	1.03
冰	0.917
玻　璃	2.4～2.8
铝	2.70
铁	7.8
水　银	13.6
铜	8.9
铅	11.34
银	10.5
金	19.3

之内，在不损坏王冠的前提下，设法查明王冠里是否掺了银！

大臣们左思右想，计无所出。终于有人想到了阿基米德，因为他的智慧是叙拉古人的骄傲。

面对着疑题，阿基米德也困惑了。他想只要掰开王冠看一看，一切便都水落石出。而如今却不能损坏王冠，已知的东西成了未知。怎样才能从未知中寻求已知呢？阿基米德冥思苦想了两个昼夜，依旧一筹莫展。这时他的妻子走来，劝他去公共浴池洗个澡，好让自己的思想放松一下。

然而，从上路到进浴，阿基米德的脑际依然萦回着王冠疑题。当他跨进浴盆的时候，水往上升起来，人坐下去，水立时漫溢到盆外。同时入水愈深，自我感觉身体愈轻，似乎被一种神奇的力量撑托着。突然，一条明亮的思路闪进了这位学者的脑海。顿时，灵感之花开放了！阿基米德情不自禁了！他忘乎所以地跳出浴盆，赤身裸体地在大街上奔跑，嘴里高声喊着："尤勒加！尤勒加！"（希腊语：我知道了！我知道了！）

那么，是什么东西使阿基米德这样如痴如狂，他又究竟"尤勒加"了什么呢？原来阿基米德悟出了一条重要的定律：

一件东西在水里受到的浮力，等于它所排开的水的重量。

至于阿基米德怎样依据这条定律，最终破悉了王冠疑案呢？请看古代名著《论建筑》一书中的叙述吧！

“于是，阿基米德拿了与王冠重量相等的纯金块，放进盛满水的容器里，看一看怎么样。结果发现，王冠排出的水比纯金块排出的水多得多。这样，他就清楚地知道那个王冠不是用纯金做的。”

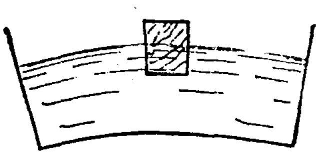
不用说，那个弄虚作假而又自作聪明的工匠，终于受到了应有的惩罚。

二、《王冠疑案》之疑

王冠疑案终于成了历史的故事。从那时起人类的文明史又向前推进了一千八百年。到了公元1581年，有个叫伽利略（Galileo Galilei, 1564～1642）的年轻人，也对王冠疑案发生了浓厚的兴趣。

(1564～1642)

年轻时代的伽利略最敬仰的学者，是古希腊的阿基米德。平时他读过不少阿基米德的著作，对这位古代学者研究科学周密严谨的态度，推崇备至。一天，当他翻看阿基米德的《浮力论》一书时，书中的一系列插图使他惊异不已。原来书中阿基米德把描述浮力原理的盛水容器，全部画成下图的样式，而不象一般学生那样，把水面画成平的。



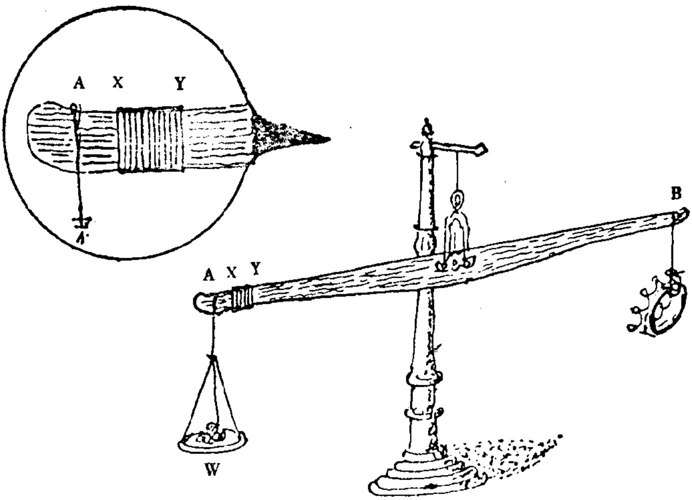
大家知道，阿基米德时代要比哥伦布（Colombo, 1451～1506）环球航行时代早整整一千七百年，而那时的阿基米德在讲杯子里的水面时，就已考虑到它是球面的一部分，这不能不说是想得非常之深远了。

上面的事实，使伽利略对王冠疑案的结局发生了怀疑。他感到象阿基米德这样思考严密的数学家，是决不会仅仅停留在“王冠排出的水，比纯金块排出的水多得多”这样的肤

浅结论的。阿基米德一定会想法找出王冠里掺了多少银。然而，若是按上节故事中讲的方法，就必须十分精确地测量王冠和金块所排出水的体积，这可是极为困难的事。伽利略想：阿基米德肯定是做了另一个更加巧妙、更加精密的实验，清楚地查出王冠中掺银的成份。那么，假如我是阿基米德，又该怎样去做呢？于是，伽利略开始考虑如何以阿基米德发现的“杠杆原理”和“浮力原理”为基础，去寻找揭示王冠疑案秘密的正确方法。

苍天不负苦心人，年轻的伽利略终于获得了成功，他把自己的想法写成一篇题为《小秤》的短文。在这篇论文中，伽利略第一次显露了自己的才华。

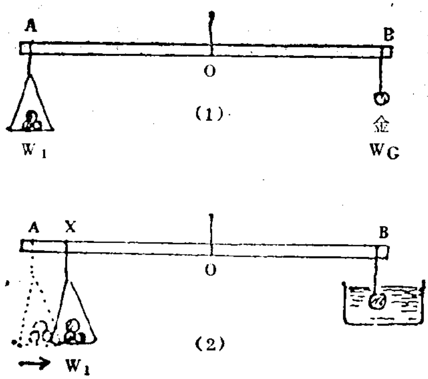
读者一定想知道，伽利略的“小秤”是什么样的，下面



就是“小秤”的示意图，从外观看它很象普通的天平，只是放砝码的那个臂上，多了一个类似于杆秤秤花的一段小分度

（XY）。码盘类似于杆秤的秤砣，可以在分度（XY）上游动，并从中读出数来。不过，严格地说，伽利略设计的"小秤"并不小，秤臂足有一米多长，只是可供读数的分度（XY）小了些，仅有2～3厘米长罢了。

那么分度（XY）是怎样定的呢？请看下图：



首先在B点挂上一块纯金，然后在A点挂上码盘，使它与B点金块平衡，如左图(1)。接着把金块完全浸入水中，此时由于金块受到水的浮力，使B端的受力似乎轻了一些，平衡受到破坏。为了取得新的平衡，必须把码盘右移到新的平衡点，记为X，如左图(2)。下面我们说明，X点的确定与金块的大小无关，这正是伽利略"小秤"的妙处所在！事实上，假定选用金块的体积为V_G，而金的比重（即单位体积金的重量）为d_G，于是，金的重量W_G可以写成：

$$W_G = d_G \cdot V_G$$

当金块浸入水中时，由于受到水的浮力，使B端受力减少了与金块同体积水的重量。所以B端实际受到的力为$(d_G-1)\cdot V_G$。根据杠杆原理，前后两次分别有：

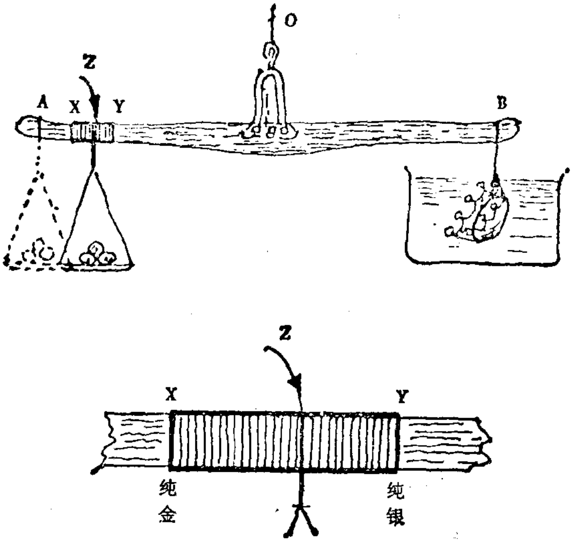
$$\begin{cases} W_1 \cdot \overline{OA} = W_G \cdot \overline{OB} = d_G \cdot V_G \cdot \overline{OB}; \\ W_1 \cdot \overline{OX} = (d_G-1) \cdot V_G \cdot OB。\end{cases}$$

由此得：$\overline{OX} = \left(1-\dfrac{1}{d_G}\right) \cdot \overline{OA}$。

它是一个只与金比重有关的确定的量，这无疑表明X的位置是固定不变的。

如果我们把金块换成银块，重复前面的实验。我们同样可以求得对于银的一个新平衡点Y，它也是不变的，只是比X更靠近于支点O罢了。

现在我们对王冠也做同样的实验，确定出一个介于X、Y之间，相应于王冠的平衡点Z。伽利略在《小秤》一文中断言："长度ZY与XZ的比，即王冠中金与银含量的比。"



伽利略的证明对大多数初中学生来说都不难看懂。假定王冠重为 W_K，其中含金、含银的重量分别为 u、v，又用 d_S，d_K 分别代表银和王冠的比重。那么，根据重量和体积相等的关系就有：

$$\begin{cases} u+v=W_K; \\ \dfrac{u}{d_G}+\dfrac{v}{d_S}=\dfrac{W_K}{d_K} \end{cases}$$

这是二元一次方程组，很容易解得：

$$\begin{cases} u=\dfrac{\left(\dfrac{1}{d_S}-\dfrac{1}{d_K}\right)}{\left(\dfrac{1}{d_S}-\dfrac{1}{d_G}\right)}\cdot W_K \\ v=\dfrac{\left(\dfrac{1}{d_K}-\dfrac{1}{d_G}\right)}{\left(\dfrac{1}{d_S}-\dfrac{1}{d_G}\right)}\cdot W_K \end{cases}$$

从而，王冠中金与银的重量比为：

$$u:v=\left(\frac{1}{d_K}-\frac{1}{d_S}\right):\left(\frac{1}{d_G}-\frac{1}{d_K}\right)$$

另一方面注意到（同于$\overline{OX}$的求法）：

$$\overline{OY}=\left(1-\frac{1}{d_S}\right)\cdot\overline{OA};$$

$$\overline{OZ}=\left(1-\frac{1}{d_K}\right)\cdot\overline{OA}$$

于是：$\overline{ZY}:\overline{XZ}=\left[\left(1-\frac{1}{d_S}\right)-\left(1-\frac{1}{d_K}\right)\right]$

$$:\left[\left(1-\frac{1}{d_K}\right)-\left(1-\frac{1}{d_G}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{d_K}-\frac{1}{d_S}\right):\left(\frac{1}{d_G}-\frac{1}{d_K}\right)$$

上面的比值恰好等于$u:v$。这正是伽利略的结论。

一千八百年前的王冠疑案，到了伽利略手中，终于有了一个令人满意的结果。至于阿基米德当初是否这样做过，或是否曾经这样想过，现在都已无从查考。然而，伽利略的才华，却因《小秤》的精巧构思，在人世间崭露头角。