# TULUN DAOYIN JIAOCHENG

# 图论导引教程


〔英〕B·布鲁巴斯 著

赵树春 朱学志 译

李慰萱 审校



HEILONGJIANG KEXUE JISHU CHUBANSHE

黑龙江科学技术出版社

# 图论导引教程

(英)B.布鲁巴斯　著
赵树春　朱学志　译
李慰萱　审校

黑龙江科学技术出版社
一九八五年·哈尔滨

封 面 设 计：顾灵选

# 图 论 导 引 教 程


〔英〕B. 布鲁巴斯 著

赵树杰 朱学志 译

李慰萱 审校



黑 龙 江 科 学 技 术 出 版 社 出 版

（哈尔滨市南岗区建设街 35 号）

黑龙江新华印刷厂附属厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32·印张 9·字数 183 千

1985 年 10 月第一版·1985 年 10 月第一次印刷

印数：1—2,800

书号：13217·142 定价：1.90 元

# 译 者 序

本书是英国剑桥大学的教材。它用较少的篇幅介绍了图论的大部分主要论题，并且对图论的一些重要应用作了生动的描述。这是一本比较好的入门书，它可以作为我国大学数学、计算机科学等专业的教材或教学参考书，也是自学者的良好读物。

本书各章之后都附有大量的习题，并被分成基本的、一般的和较难的三类（较难的习题都附有详细的提示），以便于读者根据自己的需要完成习题的一部分或全部。各章最后还附有文献注释，虽然不十分详尽，却能使读者熟悉图论的一些主要问题的来龙去脉。

本书著者还有另一本有名的专著“Extremal Graph Theory”，Acadomic Press，1978。它虽然先于本书出版，但对与极图有关的若干问题阐述得更为深刻，因此可看作本书的续篇。

本书译稿曾由刘诚超同志进行初校，在此谨致谢意。

1984．9．1．

# 序

本书是写给对图论感兴趣、并希望图论成为他们数学课程一部分的年轻学生们的。剑桥大学的经验表明，目前流行的课本都不能满足这种需要。有的课本对这些读者来说是太专门化了，有的则缺乏揭示该学科本质所必须的深度和广度。

我们的出发点在于，图论是很为学生瞩目的几门课程之一，而且，它应有助于提高学生对整个数学领域的鉴赏力。因此，本书不仅讲述了基本结果，也包含一些评述性章节，并把所论述的课题讲得妙趣横生，以求唤起学生的兴趣。那些对于理论的展开至关重要的定理均得到清楚的阐述，并有完整和详细的证明，从而本书为图论提供了一个周详的导引，它足以成为该学科大部分论题的坚实基础。

每章包含三至四节，并附有练习题和文献评注。带“－”号的是基本练习题；带“＋”号的是较难的练习题，一般附有详细的提示。在开头几节中，因为读者刚入门，所以尽管内容简单，证明也很容易，却叙述得很详细。后面的章节是为对图论已产生兴趣的读者写的，虽然所涉及的定理比较深刻，证明也不简单，却叙述得很简要。读者在这本书中到处都会发现图论与数学的各分支的联系，这些分支包括最优化理论、线性代数、群论、射影几何、表示论、概率论、分析、纽结理论和环论。尽管这些联系的大多数对理解本书内

容并不是绝对必要的，但读者适当熟悉这些知识也是大有益处的。有关文献的注释不太完整，仅望能引导读者去了解有关的资料而已。

B．布鲁巴斯

1979、4，于剑桥大学

# 目　　录

# 第 I 章 基础知识

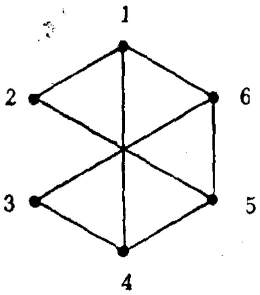
本书的目的是使读者熟悉图论的基本概念和结果。本章不可避免地要包括大量的定义，为了防止读者厌倦，我们将尽快地证明一些简单的结果。在浏览本书的其余部分之前，读者不要期望能完全掌握本章的内容。事实上，因为大部分术语一看就懂，读者在阅读时完全可以先跳过本章的一部分内容。我们在此附带说明一点，虽然图论的术语远未标准化，但是本书所使用的术语都是通用的。

## §1 定 义

一个图 $G$ 是两个不相交的集所组成的有序对 $(V,E)$，其中 $E$ 是 $V$ 的元素的无序对之集的一个子集。如果不是另有说明，我们考虑的只是**有限图**，即 $V$ 和 $E$ 总是有限的。集 $V$ 是**顶点集**，而 $E$ 是**边集**，如果 $G$ 是一个图，则 $V=V(G)$ 是 $G$ 的顶点集，而 $E=E(G)$ 是 $G$ 的边集。我们说边 $\{x, y\}$ **联结**顶点 $x$ 和 $y$，并记作 $xy$，这样，$xy$ 和 $yx$ 代表同一边，顶点 $x$ 和 $y$ 是这条边的**端点**。如果 $xy \in E(G)$，则 $x$ 和 $y$ 是 $G$ 的**邻接的**或**相邻的**顶点，而顶点 $x$ 和 $y$ 是同边 $xy$ **相关联的**。如果两条边恰有一个公共端点，就说它们是**邻接的**。

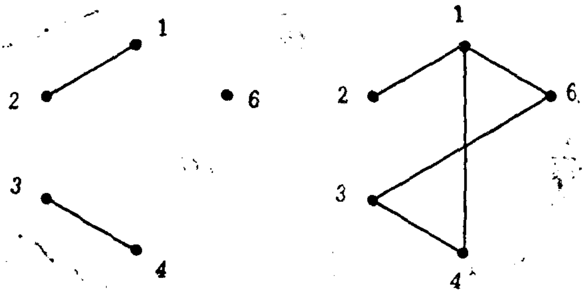
正像从术语字面上所能看出那样，通常，我们不把一个图看作一个有序对，而把它看成是一些顶点的总体，而其中

有的顶点之间由边联结。于是，把一个图的图形画出来就是很容易了，事实上，把一个图画出来有时是描述它的最容易的方法；图 $G=(\{1,2,3,4,5,6\},\{12,14,16,25,34,36,45,56\})$ 在用图Ⅰ.1表示后便一目了然了。



图Ⅰ.1. 一个图。

**如果** $V'\subset V$，$E'\subset E$，我们说 $G'=(V',E')$ 是 $G=(V,E)$ 的一个**子图**，并记作 $G'\subset G$。如果 $G'$ 包含 $G$ 的联结 $V'$ 两个顶点的所有边，则说 $G'$ 是由 $V'$ **导出的**或**生成的子图**，记作 $G[V']$。如果 $G'=G[V(G')]$，则说 $G'$ 是 $G$ 的**导出子图**。



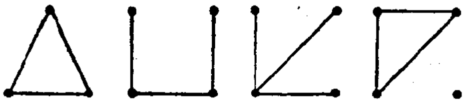
图Ⅰ.2. 图Ⅰ.1的图的子图和导出子图。

这些概念用图Ⅰ.2来说明。

我们常用删除或添加一些顶点或边的办法来构造一些新图。如果 $W\subset V(G)$，则 $G-W=G[V\backslash W]$ 是在 $G$ 中删除 $W$ 中的顶点和与它们关联的所有边而得到的子图。同样，

如果$E'\subset E(G)$，则$G-E'=(V(G),\ E(G)\backslash E')$。如果$W=\{w\}$和$E'=\{xy\}$，则简记为$G-w$和$G-xy$。同样，如果$x$和$y$是$G$中不邻接的顶点，则$G+xy$是在$G$中联结$x$和$y$所得到的图。

如果$x$是图$G$的一个顶点，通常，我们把$x\in V(G)$简记作$x\in G$。$G$的**阶**是其顶点的数目，记作$|G|$。我们也用同样的记号来表示一个集的元素的数目（基数）：$|X|$表示集$X$的元素的数目。于是，$|G|=|V(G)|$。$G$的**级**是其边的数目，记作$e(G)$。我们把任意一个$n$阶图记作$G^n$。同样，$G(n,\ m)$表示任意一个$n$阶和$m$级的图。



图Ⅰ.3. 级为3而阶至多为4的图。

如果在两个图之间存在一个保持邻接性的1—1对应，则这两个图是**同构的**，即如果存在这样的双射函数$\phi$: $V\to V'$，$xy\in E$当且仅当$\phi(x)\phi(y)\in E'$，则$G=(V,\ E)$同构于$G'=(V',\ E')$。显然，同构的图有同样的阶和级。除了要考虑顶点集中各顶点可以区别或带有标号的图的情形（例如一个给定的图的一些子图），通常，在同构图之间不加以区别。依据这一约定，如果$G$和$H$是同构图，则可以记作$G\cong H$，或简记作$G=H$。在图Ⅰ.3中我们画出了级为3而阶至多为4的所有子图（在同构的范围内）。

$n$阶图的级至少为0，而至多是$\binom{n}{2}$。显然，对每个$m$，

$0\leqslant m\leqslant\binom{n}{2}$，存在图 $G(n, m)$。$n$ 阶 $\binom{n}{2}$ 级的图称为**完全 $n$—图**，记作 $K^n$；**空 $n$—图** $E^n$ 是 $n$ 阶无边的图。在 $K^n$ 中每两个顶点都是邻接的，而在 $E^n$ 中，任何两个顶点都是不邻接的。图 $K^1=E^1$ 称为**平凡图**。

与顶点 $x\in G$ 邻接的所有顶点的集记作 $\Gamma(x)$，$x$ 的**度**是 $d(x)=|\Gamma(x)|$。如果我们要强调这是在图 $G$ 中考虑的，则记作 $\Gamma_G(x)$ 和 $d_G(x)$。类似的约定也适用于依赖一个图的其它函数。这样，如果 $x\in H=G[W]$，则

$$\Gamma_H(x)=\{y\in H: xy\in E(H)\}=\Gamma_G(x)\cap W。$$

图 $G$ 的各顶点的**最小度**记作 $\delta(G)$，而**最大度**记作 $\Delta(G)$。0 度的顶点称为**孤立顶点**。如果 $\delta(G)=\Delta(G)=k$，即 $G$ 的每个顶点的度皆为 $k$，则称 $G$ 是 **$k$—正则的**或 **$k$ 度正则的**。如果对某个数 $k$，一个图是 $k$—正则的，称它为**正则图**，3—正则图称为**三次的**。

如果 $V(G)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则 $(d(x_i))_1^n$ 是 $G$ 的**度序列**。通常，我们把顶点按一定次序排列，使相应的度序列是单调递增的或单调递减的，例如 $\delta(G)=d(x_1)\leqslant d(x_2)\leqslant\cdots\leqslant d(x_n)=\Delta(G)$。因为每条边有两个端点，各顶点的度之和恰为边数的二倍：

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i)=2e(G)。\tag{1}$$

特别是，各顶点的度之和是偶数：

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i)\equiv 0(\bmod 2)。\tag{2}$$

式(2)有时称为**握手引理**，因为它表示：在任何一次集会中，握过的手的总数是偶数。同样，式(2)表示度为奇数的顶点的数目是偶数。从式(1)我们可以看出 $\delta(G)\leqslant\lfloor 2e(G)/n\rfloor$ 和 $\Delta(G)\geqslant\lceil 2e(G)/n\rceil$，此处 $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 $x$ 的最大整数，而 $\lceil x\rceil=-\lfloor -x\rfloor$。

一条**路**是形如，

$V(P)=\{x_0, x_1,\cdots, x_l\}, E(P)=\{x_0x_1, x_1x_2,\cdots, x_{l-1}x_l\}$

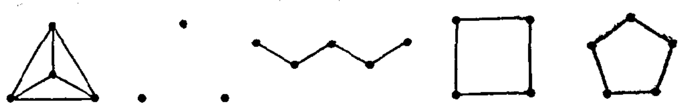
的一个图 $P$。这条路 $P$ 通常记作 $P=x_0x_1\cdots x_l$，顶点 $x_0$ 和 $x_l$ 是 $P$ 的**端顶点**，而 $l=e(P)$ 是 $P$ 的**长**，我们说 $P$ 是从 $x_0$ 到 $x_l$ 的路或 $x_0$—$x_l$ 路，当然，$P$ 也是从 $x_l$ 到 $x_0$ 的路或 $x_l$—$x_0$ 路。有时，我们要强调 $P$ 是从 $x_0$ 到 $x_l$ 的路，称 $x_0$ 是 $P$ 的**始顶点**，而 $x_l$ 是 $P$ 的**终顶点**。以 $x$ 为始顶点的路称为 **$x$—路**。

独立性这个词将对图的顶点、边和路使用，如果在顶点（边）的一个集中，没有两个顶点（边）是邻接的，则说该顶点（边）集是**独立的**；如果在路的一个集中的任何两条路，只有它们的端顶点才可能是其公共顶点，则说路的这个集是**独立的**。这样，$P_1$，$P_2$，…，$P_k$ 是独立的 $x$—$y$ 路当且仅当 $V(P_i)\cap V(P_j)=\{x, y\}$，$i\neq j$，此外，$W\subset V(G)$ 是顶点的一个独立集当且仅当 $G[W]$ 是空图。

我们考虑的大多数的路都是一个给定图的子图。$G$ 中的一条**通道** $W$ 是其顶点和边的一个交替序列：$x_0$，$\alpha_1$，$x_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_l$，$x_l$，此处 $\alpha_i=x_{i-1}x_i$，$1\leqslant i\leqslant l$。按照上面的术语，通道 $W$ 是 $x_0$—$x_l$ 通道，并记作 $x_0x_1\cdots x_l$，$W$ 的**长**为 $l$。如果通道 $W$ 的所有边都是不同的，则说 $W$ 是一条**迹**。

注意，路是具有互不相同的顶点的一条通道。端顶点重合的迹（闭迹）称为一个**回路**。$W=x_0x_1\cdots x_l$ 是这样的：$l\geqslant 3$，$x_0=x_l$，而且顶点 $x_i(0<i<l)$ 互不相同，又与 $x_0$ 不同，则称 $W$ 是一个**圈**。为了简便起见，这个圈记作 $x_1x_2\cdots x_l$。注意，这个记号与路的记号的不同之处在于 $x_1x_l$ 也是这个圈的边，并且，$x_1x_2\cdots x_l$，$x_lx_{l-1}\cdots x_1$，$x_2x_3\cdots x_lx_1$，$x_ix_{i-1}\cdots x_1x_l\cdots x_{i+1}$ 都表示同一个圈。

记号 $P^l$ 表示任意的一条长为 $l$ 的路，而 $C^l$ 表示长为 $l$ 的圈。我们称 $C^3$ 为三角形，$C^4$ 为四边形，$C^5$ 为五边形，等等（见图Ⅰ.4）。如果一个圈的长为偶数（奇数），则称该圈是**偶（奇）的**。

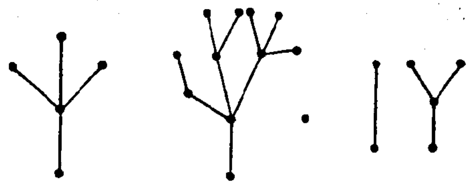


图Ⅰ.4．图 $K^4$，$E^4$，$P^4$，$C^4$ 和 $C^5$。

给定两个顶点 $x$ 和 $y$，它们的**距离** $d(x, y)$ 是所有 $x$—$y$ 路的长的最小值。如果不存在 $x$—$y$ 路，则规定 $d(x,y)=\infty$。

如果对于一个图的每一对不同的顶点 $\{x,y\}$，都存在从 $x$ 到 $y$ 的路，则称该图是**连通的**。注意，阶至少为 2 的连通图不可能包含孤立顶点。一个图的极大连通子图称为其**分支**。如果删除图的一个顶点，使图的分支数增加，则称该顶点为**割点**。如果删除一条边使图的分支数增加，则称该边为**桥**。于是，如果删除连通图的一条边，使此图变成不连通

的，则该边是桥。没有任何圈的图称为**森林**或**无圈图**；一个连通的森林称为一棵**树**（见图Ⅰ.5）。如果我们注意到森林是不相交的树的并，即森林为其各个分支都是树的图，那么树与森林的关系就很自然了。



图Ⅰ.5. 森林。

如果 $V(G)=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\phi$，而每条边都联结 $V_1$ 的一个顶点和 $V_2$ 的一个顶点，则称 $G$ 为具有顶点类 $V_1$ 和 $V_2$ 的**二部图**。同样，如果 $V(G)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_r$，$V_i\cap V_j=\phi$，$1\leqslant i<j\leqslant r$，而且没有边联结同一类中的两个顶点，则称 $G$ 为具有顶点类 $V_1$，$V_2$，…，$V_r$ 的 **$r$—部图**。图Ⅰ.1 和图Ⅰ.5 中的图都是二部图。记号 $K(n_1,\ \cdots,\ n_r)$ 表示**完全 $r$—部图**：在第 $i$ 类中有 $n_i$ 个顶点，而且包含所有联结不同类的两个顶点的边。为了简便起见，我们常把 $K(p,\ q)$ 记作 $K^{p,q}$，而把 $K(t,\cdots,t)$ 记作 $K_r(t)$。

我们记 $G\cup H=(V(G)\cup V(H),\ E(G)\cup E(H))$，且把 $k$ 个不相交的 $G$ 的并记作 $kG$。我们在 $G\cup H$ 中添加 $G$ 和 $H$ 之间的所有边，就得到**联** $G+H$。于是，$K^{2,3}=E^2+E^3$，而 $K_r(t)=E^t+E^t+\cdots+E^t$。

还有一些与图有关的概念。**超图**是一个有序对 $(V,\ E)$，此处 $V\cap E=\phi$，且 $E$ 是 $\rho(V)$ 的一个子集，其中 $\rho(V)$ 是 $V$ 的幂集，即 $V$ 的所有子集所成的集。事实上，在超图类和某些二部图之间存在一种简单的1—1对应，的确，给定一

个超图$(V,E)$，可以构造一个具有顶点$V$和$E$类的二部图，使$x\in V$和$s\in E$之间有边当且仅当$x\in s$。

按定义，图不包含**自环**，即联结一个顶点与其自身的"边"；图也不包含**重边**，即联结相同两个顶点的若干条"边"。在**重图**中允许有重边和重自环，自环是一种特殊的边。

如果边都是顶点的有序对，则得到**有向图**和**有向重图**的概念。有序对$(a, b)$称为从$a$到$b$的**有向边**，或始于$a$终于$b$的有向边，记作$\overrightarrow{ab}$或简记作$ab$。对图定义的一些概念，加以必要的修改，就可以搬到重图、有向图和有向重图中，这样，在有向重图中的（有向）迹是顶点和边的一个交替序列：$x_0,e_1,x_1,e_2,\cdots,e_l,x_l$，其中$e_i$始于$x_{i-1}$，终于$x_i$，$1\leqslant i\leqslant l$[+]。

**定向图**是把图的每条边定向，即给边$ab$以方向$\overrightarrow{ab}$或$\overrightarrow{ba}$所得到的有向图，这样，在定向图中$\overrightarrow{ab}$和$\overrightarrow{ba}$最多只能出现一个。

## §2 路，圈和树

利用已定义的各种概念，现在我们可以着手证明关于图的一些结果。这些结果均很简单，我们介绍它们的主要目的是使读熟悉概念。为了与其它各章保持一致，我们也称这些结果为定理。

---

+ $e_1,e_2,\cdots,e_l$均不相同——校注。