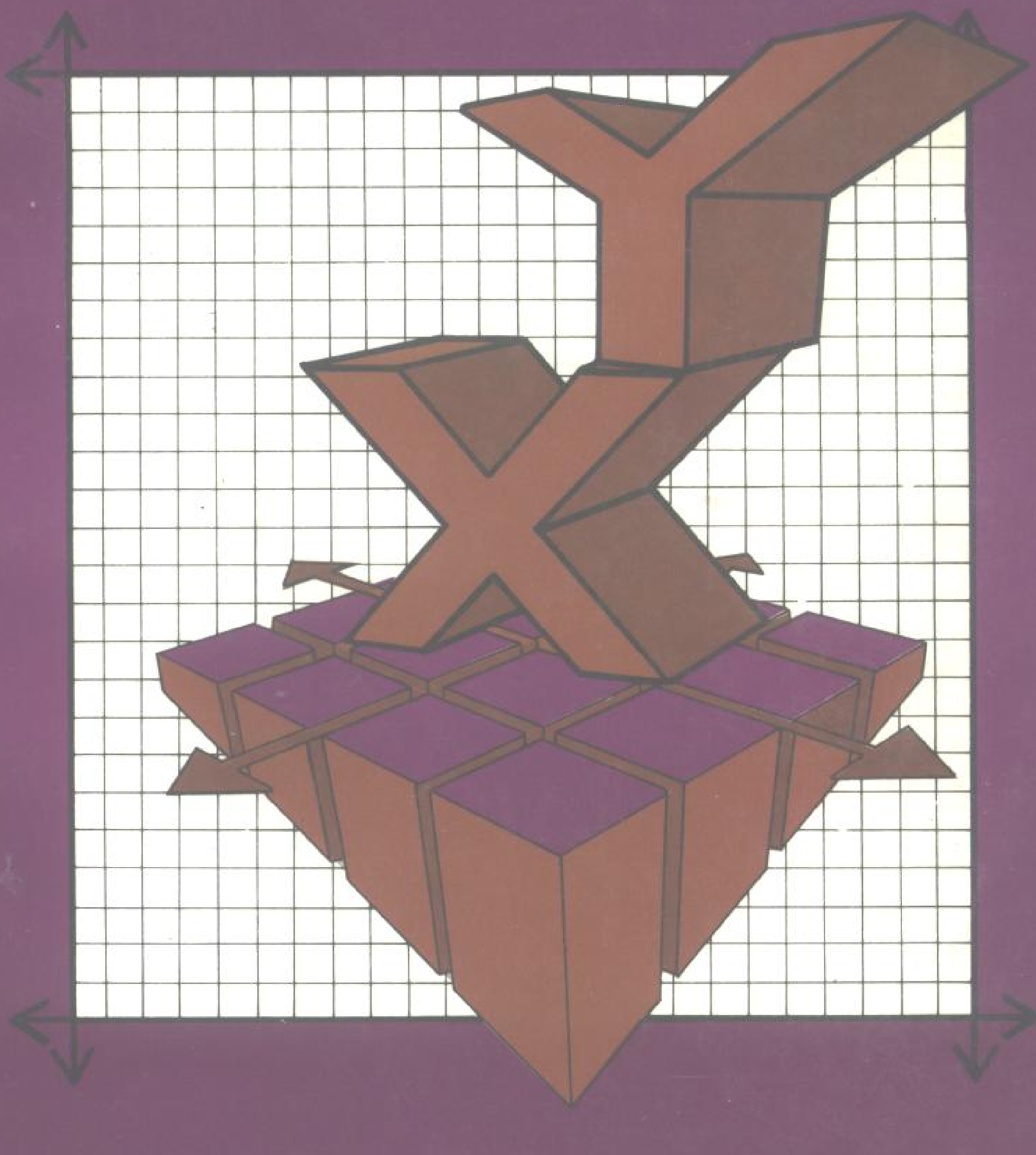
數學演習叢書

複變數

楊沐麟 譯



SUPER 超級科技圖書股份有限公司

數學演習叢書

複變數

楊沐麟　譯

SUPER 超級科技圖書股份有限公司

數學演習叢書

複變數

超級

譯　者　楊沐麟
發行人　李芬玲
發行所　超級科技圖書股份有限公司
業務部　台北市羅斯福路 4 段 119 巷 26 號 1 樓
電　話　7328401 7328403
郵政劃撥帳號　1009155-4
行政院新聞局登記證局版台業字第 2405 號
承印者　中全威彩色印刷廠
中和市員山路 294 巷 9 號
初　版　中華民國七十七年五月
定　價　貳佰貳拾元整

原 序

複變函數（也簡稱複變數或複數分析）理論，是數學分支中非常有用的一項。雖然此項理論剛開始發展時，遭遇很多問題及困離，但經Cauchy、Riemann、Weierstrass、Gauss和其他數學家的努力，在19世紀已建立了完整的基礎。

複變數理論今已成為工程師、物理學家、數學家和其他科學家數學基礎的一部分。從理論觀點言，很多數學觀念用複變數理論來看，會顯得很清楚。從應用觀點言，複變數對熱流動、位勢理論、流體力學、電磁學、氣體力學和其他科學與工程領域之分析有相當的貢獻。

本書包含的內容有：複數的代數與幾何，複數微分與積分，無窮級數（包括泰勒級數、洛冉級數），殘數定理及應用，保角映射等。本書編寫的目的是作為複變數教科書的參考教材，每一章開始先對定義、原則與定理作一陳述，並舉例加以說明，最後附有很多的範例與補充題目。範例研習中的題目用來加深讀者對各種定理、基本性質的了解，有些定理的證明和公式的推導亦包含在這些題目中。補充題則供讀者練習之用。

M.R. Spiegel

SCHAUM'S OUTLINE OF

THEORY AND PROBLEMS

of

COMPLEX VARIABLES

with an introduction to

CONFORMAL MAPPING AND ITS APPLICATIONS

by

MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D.

Former Professor and Chairman of Mathematics

Rensselaer Polytechnic Institute of Connecticut

SCHAUM'S OUTLINE SERIES

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney

目　錄

第一章

複　數

實數系

現在我們所談的數系，是由下面的敘述逐漸發展而成。

1. 自然數 (natural numbers) 如 1，2，3，… 等，也可稱爲是正整數 (positive integer)。最早自然數是用來計算東西等的符號。例如羅馬人用 I Ⅱ,Ⅲ，…等，中國人用一，二，三，四等等。

   設 a，b 都是自然數，其和 $a+b$，其積 $a\times b$ 也都是自然數。這種性質，我們稱做加法和乘法運算在自然數集裡具有封閉性 (closure property)。

2. 負整數和零 (negative integers & zero)，即 -1，-2，-3…和 0。

   當我們在求解方程式 $x+b=a$ 時，a，b 爲自然數，經加法反運算，得 $x=a-b$，設 $b\geq a$ 時，此解 x 在自然數集合裡找不到，因此再引進新數零及負數來滿足 $x+b=a$ 之解。

   負整數、零及正整數合稱爲整數 (integer)。在整數裡，只有加、減、乘三種運算具有封閉性。

3. 有理數 (rational numbers)，即如 $\frac{3}{4}$，$-\frac{8}{3}$，$\frac{5}{6}$，…等等。當 a，b 爲整數且 $b\neq 0$，方程式 $bx=a$ 之解爲 $x=a/b$，我們稱具有 a/b 這種形式的數爲有理數。

   若 $x=a/b$，且 $b=1$，則 x 即爲整數 a，因此任何整數都能表成 a/b 的形式，即整數爲有理數的子集 (subset)。

   另外除零當分母外，加、減、乘、除四種運算在有理數集裡，也都具有封閉性。

4. 無理數 (irrational numbers)，如 $\sqrt{2}=1.41423\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$ 等 。這些數不能用 a/b 的形式表示出來，因此我們稱之爲無理數。
有理數和無理數合稱爲實數 (real numbers)。

實數的圖形表示

實數可以表示在一條稱爲實軸 (real axis) 的線上的點，而且他們兩者之間是成一一對應的關係。如圖 1-1 所示。通常我們稱對應於零的一點爲原點 (oirgin)。

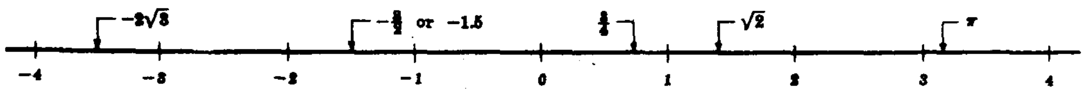


圖 1-1

若一個實數 a 對應的 A 點在另一個實數 b 對應的 B 點的右側，我們稱 a 大於 b 或 b 小於 a，分別記爲 $a>b$ 或 $b<a$。

設 x 爲實變數 (real variable)，所有 $a<x<b$ 的 x 值所成的集合稱爲實數軸上的一個開區間 (open interval)。若 $a\leq x\leq b$，兩端點 a，b 也包括在內，則稱爲實數軸上的閉區間 (closed interval)。實數 a 的絕對值以 $|a|$ 表示，定義爲：當 $a\geq 0$ 時，$|a|=a$；$a\leq 0$ 時，$|a|=-a$。

實數軸上 a，b 兩點距離等於 $|a-b|$。

複數系

在實數系裡，沒有一個元素 x 可滿足方程式 $x^2+1=0$，爲了求解這一類方程式的解，於是我們就引進複數集合來使用。

我們定義複數爲 $a+bi$ 的形式，a，b 爲實數，i 稱爲虛數單位，$i^2=-1$。若 $z=a+bi$，則稱 a 爲 z 的實部 (real part)，b 爲 z 的虛部 (imaginary part)，分別以 $\mathrm{Re}(z)$ 及 $\mathrm{Im}(z)$ 表示。符號 z 表示複數，稱爲複變數。

兩複數 $a+bi$ 與 $c+di$ 相等，若且唯若 $a=c$，$b=d$。實數可視爲是複數 ($b=0$) 的子集合，故複數 $0+0i$ 與 $-3+0i$ 分別表示實數 0 與 -3。若 $a=0$，則複數 $0+bi$ 或 bi 稱爲純虛數。

$a+bi$ 的共軛複數 (complex conjugate) 或簡稱共軛爲 $a-bi$。複數 z 的共軛複數記爲 $\bar{z}$ 或 z^*。

複數的基本運算

在複數運算時，和實數的代數運算一樣，只要把 i^2 改為 -1 。

1. ＜加法運算＞

$$(a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$$

2. ＜減法運算＞

$$(a+bi)-(c+di) = a+bi-c-di = (a-c)+(b-d)i$$

3. ＜乘法運算＞

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

4. ＜除法運算＞

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$

$$= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

絕對值

一個複數 $a+bi$ 的絕對值或模（modulus）的定義是 $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ 。

例如： $|-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+(2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

若 $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m$ 為複數，下列各性質都成立：

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ 　或　 $|z_1 z_2 \cdots z_m| = |z_1||z_2|\cdots|z_m|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 　若　 $z_2 \neq 0$
3. $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$ 　或　 $|z_1+z_2+\cdots+z_m| \leqq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_m|$
4. $|z_1+z_2| \geqq |z_1|-|z_2|$ 　或　 $|z_1-z_2| \geqq |z_1|-|z_2|$

複數的公理基礎

另外從嚴格的邏輯觀點來說，我們想把複數定義成實數序對（a，b）並給予一些運算定義，使滿足上面之性質，定義如下，設 a，b，c，d，m 皆為實數。

A. ＜相等＞　$(a,b) = (c,d)$ 的充要條件為 $a=c$, 且 $b=d$

B. ＜和＞　$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$

C. ＜積＞　$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

$$m(a,b) = (ma,\ mb)$$

由上面定義可以證得(範例 14):$(a, b)=a(1, 0)+b(0, 1)$,而且聯想到 $a+bi$,其中 i 即爲 $(0, 1)$ 的符號,它有 $i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)$的性質,即與實數 -1 同義;另外 $(1, 0)$ 可看成實數 1;$(0, 0)$ 則對應於實數 0。

S 是一複數集合,若 $z_1, z_2, z_3 \in S$,根據上面定義,則:

1. <封閉律> z_1+z_2,$z_1z_2 \in S$
2. <加法交換律> $z_1+z_2 = z_2+z_1$
3. <加法結合律> $z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$
4. <乘法交換律> $z_1z_2 = z_2z_1$
5. <乘法結合律> $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$
6. <分配律> $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$
7. $z_1+0 = 0+z_1 = z_1$, $1\cdot z_1 = z_1\cdot 1 = z_1$ 此 0 稱爲加法單位元素(identity with respect to addition),1稱爲乘法單位元素(identity with respect to multiplication)。
8. 對 S 中任一元素 z_1,S 有唯一元素 z 使得 $z+z_1=0$,則稱 z 爲 z_1 的加法反元素(inverse of z_1 with respect to addition),記爲 $-z_1$。
9. 對 S 中任一元素 $z_1 \neq 0$,S 有唯一元素 z 使得 $z_1z=zz_1=1$,z 稱 z_1 的乘法反元素(inverse of z_1 with respect to multiplication)記爲 z_1^{-1} 或 $1/z_1$。

一集合 S,其元素和運算若滿足上述 1~9 項性質者,稱之爲場(field)。

複數的圖示

如圖 1-2,若在互相垂直的軸 $X'OX$ 與 $Y'OY$ 取實數純量,則平面上任一點即可以用一實數序對 (x, y) 來定位。序對 (x, y) 稱爲此點的直角座標(rectangular coordinates)。如圖 1-2 中的 P, Q, R, S, T 所標示之各點位置。

複數 $x+iy$ 亦可以看成一實數序對 (x, y),則所有複數可得一複數平面(complex plane)或稱之爲阿干圖(Argand diagram)。例如,圖 1-2 中的 P 點所表示的複數可讀成 $(3, 4)$ 或 $3+4i$。對每一個複數,在平面中對應有唯一的一點,反之在平面中的每一點對應有唯一的複數。因此我們常將複數 z 表成點 z(point z),將 x 軸與 y 軸分別稱爲實軸和虛軸,而此複數平面稱爲 z 平面。z 平面上兩點 $z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2$ 之距離爲 $|z_1-z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

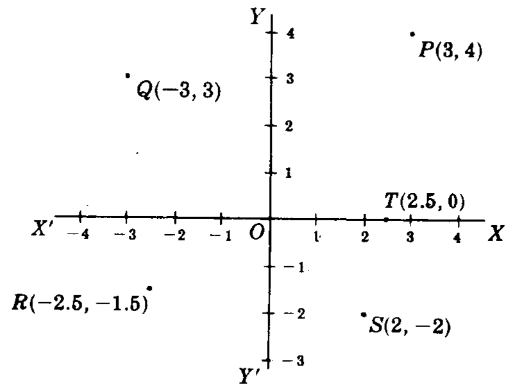


圖 1-2

複數的極式

如果在複數平面上的P點對應於複數(x, y)或$x+iy$，則從圖 1-3 知

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}=|x+iy|$ 稱爲 z 的模（modulus）或絕對值（absolute value），記以 $\bmod z$ 或 $|z|$，且 θ 稱爲 z 之輻角，其大小爲 OP 線與正 x 軸的夾角。因此，知

$$z = x+iy = r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1}$$

此式稱爲複數的極式(polar form)，(r, θ)稱爲 z 之極座標。$\cos\theta+i\sin\theta$亦可簡寫成 $\operatorname{cis}\theta$。

任意複數 $z\neq 0$，在 $0\leq\theta<2\pi$ 僅有一 θ 值等於其幅角。我們亦可使用其它長度爲 2π 的區間，如 $-\pi<\theta\leq\pi$ 來定 z 之幅角。對所選的 θ 值範圍稱之爲主範圍（principal range），而其 θ 值稱爲主值（principal value）。

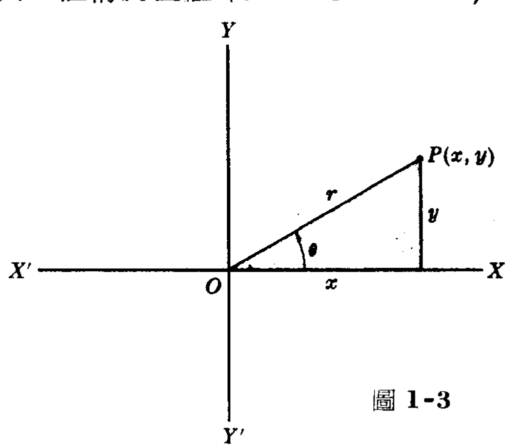


圖 1-3

棣馬佛定理(De Moive's theorem)

設$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，我們可以證明(見範例 19)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \tag{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \tag{3}$$

由(2)推廣導出

$$z_1 z_2\cdots z_n = r_1 r_2\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\} \tag{4}$$

若 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$，則

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{5}$$

此式稱爲棣馬佛定理(De Moivre's theorem)。

複數根

設$w^n = z$，則w稱爲z之n次方根(nth root)，記爲 $w = z^{1/n}$。設n爲正整數，由棣馬佛定理可證得

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{6}$$

因此$z^{1/n}$有n個不同值。也就是說，設$z \neq 0$，z有n個相異的n次方根。

奧衣勒公式

由基本微積分的無窮級數展開式 $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$，當 $x = i\theta$ 時，可得

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e = 2.71828\ldots \tag{7}$$

此式稱爲奧衣勒公式(Euler's formula)。因此，我們定義：

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{8}$$

當 $y = 0$ 時，則 $e^z = e^x$。

注意由(7)式，棣馬佛定理變成 $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$。

多項式方程式

多項式方程式

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0 \tag{9}$$

其中 $a_0 \neq 0$，$a_1 \cdots a_n$ 爲已知的複數，且 n 爲正整數稱爲此方程式的次數 (degree) ；(9)式的解也稱爲(9)式左邊多項式的零點 (zero) 或方程式的根 (roots of the equation)。

由代數基本定理 (fundamental theorem of algebra)知 (第五章證明)，如(9)式之多項式方程式至少有一複數根，而且我們可以證明實際有 n 個複數根，其中有些可能爲同根。

設 z_1，z_2，…，z_k 爲 n 個根，(9)式可寫成：

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = 0 \tag{10}$$

此式稱爲多項式方程式之分解因式 (factored form)。相反地如果我們能將(9)寫爲(10)的形式，則其根即可容易求得。

1 的 n 次方根

n 爲正整數，方程式 $z^n=1$ 的解稱爲 1 的 n 次方根 (n th roots of unity)。它們爲

$$z = \cos 2k\pi/n + i\sin 2k\pi/n = e^{2k\pi i/n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{11}$$

假設 $\omega = \cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n = e^{2\pi i/n}$，則其 n 個根就是 $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$。以圖形表示則爲一以原點爲圓心，半徑爲 1 的圓內接正 n 邊形的 n 個頂點。

複數的向量意義

如圖 1-4，一複數 $z=x+iy$ 可視爲以原點 O 爲始點，$P(x, y)$ 爲終點的向量 OP。$OP=x+iy$ 稱爲 P 之正向量 (positive vector)。兩向量有相同的長度 (length 或 magnitude) 和方向 (direction) 但始點不同，如圖 1-4 中的 OP 和 AB 視爲相等，即 $OP = AB = x + iy$。

複數加法像向量加法的平行四邊形法則(parallelogram law)(圖1-5)。因此，若複數 z_1，z_2 相加，可作平行四邊形 $OABC$，其邊 OA，OC 分別與 z_1，z_2 對應，則對角線 OB 即 z_1+z_2。 (見範例 5)。

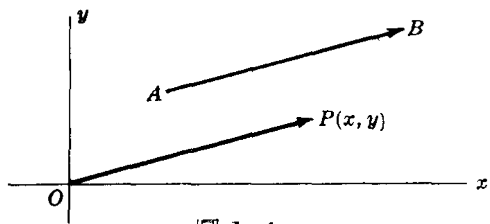


圖 1-4

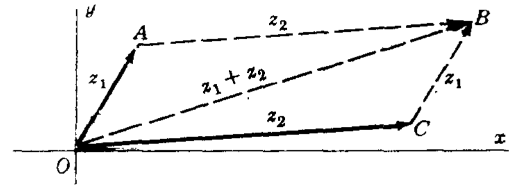


圖 1-5

複數的球形表示，球極投影

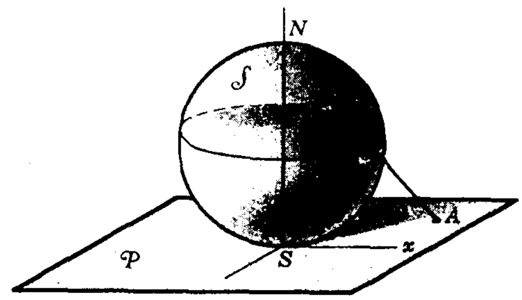


圖 1-6

令 $\mathcal{P}$（圖 1-6）爲複數平面，單位球 $\mathcal{S}$（半徑 1）與 $\mathcal{P}$ 相切於 $z=0$，直徑 NS 垂直 $\mathcal{P}$，點 N 與 S 稱爲 $\mathcal{S}$ 的北極（north pole）與南極（south pole）。在 $\mathcal{P}$ 上之任一點 A 與 N 的連線相交 $\mathcal{S}$ 於 A' 點，如此在複數平面 $\mathcal{P}$ 的每一點在球 $\mathcal{S}$ 上有一唯一點和它對應，因此任一複數也可由球上的一點來表示。爲求完備性我們將點 N 和平面 $\mathcal{P}$ 的無窮遠點對應。包括無窮遠點在內的複數平面所有點所成的集合稱爲整複數平面（entire complex plane）、整 z 平面或擴充複數平面。

上述將平面的點映射至球的方法稱爲球極投影（stereographic projection）。此球則稱爲黎曼球（Riemann sphere）。

點積與叉積

令 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 爲兩個複數。z_1 和 z_2 之點積（dot prouct）〔或稱純量積（scalar product）〕的定義是：

$$z_1 \circ z_2 = |z_1|\,|z_2|\cos\theta = x_1x_2+y_1y_2 = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1z_2\} = \tfrac{1}{2}\{\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2\} \tag{12}$$

其中 θ 爲 z_1 與 z_2 之夾角，且在 0 與 π 之間。

z_1 和 z_2 的叉積（cross product）定義是：

$$z_1\times z_2 = |z_1|\,|z_2|\sin\theta = x_1y_2-y_1x_2 = \operatorname{Im}\{\bar{z}_1z_2\} = \frac{1}{2i}\{\bar{z}_1z_2-z_1\bar{z}_2\} \tag{13}$$

由上定義，很顯然地

$$\bar{z}_1z_2 = (z_1\circ z_2)+i(z_1\times z_2) = |z_1|\,|z_2|\,e^{i\theta} \tag{14}$$

設 z_1 和 z_2 都不爲零，則

1. z_1 與 z_2 互相垂直之充要條件爲 $z_1\circ z_2=0$。

2. z_1 與 z_2 互相平行之充要條件為 $z_1 \times z_2 = 0$。
3. z_1 在 z_2 上的投影長度為 $|z_1 \circ z_2| / |z_2|$。
4. 以 z_1，z_2 為邊所展開的平行四邊形面積為 $|z_1 \times z_2|$。

複數共軛座標

複數平面上之一點可以直角座標 (x , y) 或極座標 (r , θ) 表示，亦可用 (z ，$\bar{z}$)來表示，其關係為 $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$。座標 (z , $\bar{z}$) 稱為複數共軛座標 (complex conjugate coordinates) 或簡稱為共軛座標 (conjugate coordinates) (見範例 43 與 44)。

點集合

在複數平面上由點所組成的集合稱為 (二維) 點集合，且每一點稱為集合的元素 (element)。下列基本定義供做參考：

1. ＜鄰域＞　點 z_0 之 δ 鄰域 (neighborhood)，即滿足 $|z - z_0| < \delta$ 的 z 值所成的集合。點 z_0 之去心鄰域 (deleted δ neighborhood)，則為 z_0 的鄰域去掉 z_0 點，即 $0 < |z - z_0| < \delta$。
2. ＜極限點＞　若 z_0 之每一去心鄰域皆含有 S 之一些點，則點 z_0 稱為點集合 S 的極限點 (limited point) 或聚點 (cluster point or point of accumulation)。因 δ 可為任意正數，所以 S 必含有無限多點。但 z_0 不一定屬於集合 S。
3. ＜封閉集合＞　一集合 S 稱為封閉 (closed) 即 S 之每一極限點皆屬於 S，亦即 S 包含它本身所有的極限點。例如 $|z| \leq 1$ 的所有 z 點形成的集合即為封閉集合。
4. ＜有界集合＞　一集合 S 如能找到一常數 M 使得 S 的每一點 z 滿足 $|z| < M$ 者稱為有界 (bounded)。一集合封閉並有界稱為密集 (compact)。
5. ＜內點、外點、界點＞　點 z_0 稱為 S 之內點 (interior point) 即能找到 z_0 的一 δ 鄰域的每一點皆屬於 S。若 z_0 之每一 δ 鄰域中有部分點屬於 S，部分點不屬於 S，則稱 z_0 為 S 的界點 (boundary point)。若一點不為 S 之內點亦非其界點即為 S 之外點 (exterior point)。
6. ＜開集＞　開集 (open set) 為所有內點組成之集合。例如滿足 $|z| < 1$ 之點組成之集合即為開集。

7. ＜連通集合＞ 若開集 S 內任意兩點，皆能以一些直線段相連〔即多邊形路徑(polygonal path)〕，這些線段上每一點皆屬於 S ，則 S 稱爲連通 (connected) 。
8. ＜開區域＞ 一個開連通集合稱爲開區域 (open region or domain)。
9. ＜集合之閉合＞ 一集合 S 加上其所有的極限點形成的集合稱爲 S 之閉合 (closure) ，此集合爲一封閉集合。
10. ＜封閉區域＞ 一個開區域的閉合稱爲封閉區域 (closed region)。
11. ＜區域＞ 對一開區域，不管是否加上其極限點，我們都稱此集合爲一區域 (region)。若加上其所有的極限點則此區域爲封閉 (closed)，若不加任何極限點則此區域爲開區域。沒特別聲明，本書提到的皆指開區域。
12. ＜聯集與交集＞ 一集合包含所有集合 S_1 和集合 S_2 之點，稱爲 S_1 與 S_2 之聯集 (union)，記以 $S_1 \cup S_2$ 。
    一集合包含集合 S_1 與 S_2 之共同點，稱爲 S_1 與 S_2 之交集 (intersection)，記以 $S_1 \cap S_2$ 。
13. ＜集合之餘集＞ 一集合包含不屬於 S 之所有點稱爲 S 之餘集(complement)，記以 $\widetilde{S}$。
14. ＜空集合與子集合＞ 一集合不包含任何點稱爲空集合 (null set)，以 ϕ 表示。若 S_1 與 S_2 不具有共同點〔稱爲互斥 (disjoint or mutually exclusive sets)〕，我們以 $S_1 \cap S_2 = \phi$ 表示之。
    若 T 集合的元素都屬於 S ，則稱 T 爲 S 之子集合 (subset) ，此 T 可爲空集合或 S 本身。若此 T 不是空集合或 S 本身，則 T 稱爲 S 的眞子集 (proper subset) 。
15. ＜集合可數性＞ 若集合之元素能與自然數成一對一對應，此集合即稱爲可數 (countable or denumerable)，否則爲不可數。

以下是點集合的兩個重要定理：

1. 瓦土曲斯 - 波爾查諾 (Weierstrass-Bolzano)定理：每一有界無限集合至少有一極限點。
2. 海涅 - 鮑來耳 (Heine-Borel)定理：設 S 爲一密集合，其每一點包含於一個或一個以上之開集合 $A_1, A_2, \cdots$〔稱 $A_1, A_2, \cdots$ 涵蓋 (cover) S〕，則存在一有限數之集合 $A_1, A_2, \cdots$ 涵蓋 S 。

範例研習

複數及其基本運算

1. 試求下列各運算。

【解】

(a) $(3+2i)+(-7-i) = 3-7+2i-i = -4+i$

(b) $(-7-i)+(3+2i) = -7+3-i+2i = -4+i$

(a)和(b)的結果說明加法交換律成立。

(c) $(8-6i)-(2i-7) = 8-6i-2i+7 = 15-8i$

(d) $(5+3i)+\{(-1+2i)+(7-5i)\} = (5+3i)+\{-1+2i+7-5i\} = (5+3i)+(6-3i) = 11$

(e) $\{(5+3i)+(-1+2i)\}+(7-5i) = \{5+3i-1+2i\}+(7-5i) = (4+5i)+(7-5i) = 11$

(d)和(e)的結果說明加法結合律成立。

(f) $(2-3i)(4+2i) = 2(4+2i)-3i(4+2i) = 8+4i-12i-6i^2 = 8+4i-12i+6 = 14-8i$

(g) $(4+2i)(2-3i) = 4(2-3i)+2i(2-3i) = 8-12i+4i-6i^2 = 8-12i+4i+6 = 14-8i$

(f)和(g)的結果說明乘法交換律成立。

(h) $(2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\} = (2-i)\{-15+12i+10i-8i^2\}$
$= (2-i)(-7+22i) = -14+44i+7i-22i^2 = 8+51i$

(i) $\{(2-i)(-3+2i)\}(5-4i) = \{-6+4i+3i-2i^2\}(5-4i)$
$= (-4+7i)(5-4i) = -20+16i+35i-28i^2 = 8+51i$

(h)和(i)的結果說明乘法結合律成立。

(j) $(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} = (-1+2i)(4-i) = -4+i+8i-2i^2 = -2+9i$

【另解】

$$
\begin{aligned}
(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} &= (-1+2i)(7-5i)+(-1+2i)(-3+4i) \\
&= \{-7+5i+14i-10i^2\}+\{3-4i-6i+8i^2\} \\
&= (3+19i)+(-5-10i) = -2+9i
\end{aligned}
$$

說明分配律。

(k) $\dfrac{3-2i}{-1+i} = \dfrac{3-2i}{-1+i}\cdot\dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2} = \dfrac{-5-i}{2} = -\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$