广义函数

IV

И. М. 盖勒范德
Н. Я. 維　列　金

科学出版社

广 义 函 数

IV

调和分析的某些应用,装备希尔伯特空間

И. М. 盖勒范德
Н. Я. 維 列 金 著

夏 道 行 譯

科 学 出 版 社

1965

И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин
ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ
Выпуск 4
Физматгиз, Москва 1961

内 容 簡 介

本书是多卷集中的一本，前三卷分别闡述广义函数及其运算，函数空間及微分方程理論的某些問題.

本书探討两个問題，一为研究綫性拓扑空間类，卽核空間及装备希尔伯特空間；另一为研究欧几里得空間上和无限維綫性空間上的調和分析. 此外，还考虑了綫性算子譜分析，綫性拓扑空間上的測度理論，量子場論中的交換关系及广义随机过程等.

本卷与前几卷关系不大. 閱讀本书，仅需要第一卷前两章作为基础知識.

广 义 函 数
IV

〔苏〕И. М. 蓋勒范德 等著
夏道行 譯

*

科学出版社出版
北京朝阳門内大街117号
北京市书刊出版业营业許可証出字第061号
商务印书館上海印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965年7月第一版　　开本：850×1168 1/32
1965年7月第一次印刷　　印張：11 5/8
印数：0001—3,400　　字数：304,000

統一书号：13031・2107
本社书号：3223・13—1

定价：[科六] 1.70元

序　言

本书是用"广义函数"名称出版的一套泛函分析专著中的第四卷，然而不能把它看成是前面几卷的直接继續．在写这一卷时，作者力图尽可能不依賴前几卷，仅第一卷的前两章应当看作是讀者必备的基础知識．因此，对前几卷敘述过的某些有关的問題，本书簡单地复述一下．

本书探討两个基本問題：綫性拓扑空間理論的进一步发展和 n 維空間及无限維空間上調和分析的建立．

拓扑空間理論出现以后，遇到这样的問題，即选出一类拓扑空間，要求它由足够簡单的公理来定义而且包含在应用时遇到的一切（或差不多一切）空間．同样，在建立了綫性拓扑空間理論之后，有必要搞清楚那一类空間是数学分析中最有用的空間．这类綫性拓扑空間——核空間——是由法国数学家葛饒登迪克（A. Grothendieck）选出的．

核空間类包含着目前在分析中有用的一切或几乎一切綫性拓扑空間且有一系列极重要的性质：对于核空間，許瓦茲（Schwartz）关于核的定理成立；在其上自共軛算子的譜分解定理成立；在核空間的共軛空間上，任何柱狀集測度是可列可加的．第一章和第四章用来叙述这些問題．又联系着譜分析引进了装备希尔伯特空間的概念，看来这种空間对于数学中許多其他問題也是极其有用的．

在这一卷中研究的第二个問題是各种空間上函数的調和分析．前几卷已經叙述了一些欧几里得空間上的調和分析（富里埃积分）．我們不准备在这里重复前几卷关于富里埃积分的材料［假如各卷是同时写的，那么許多富里埃积分論中的問題，例如广义函数的派萊（Paley）-維納（Wiener）定理可能放到这一卷来］，而只

叙述前几卷未闡明的欧几里得空間上調和分析的問題. 就是說,此地考察具有各种增长級的正测度的富里埃变换(正定广义函数論)及其在广义随机过程理論中的应用. 同时考察綫性拓扑空間上测度的富里埃变换.

在第五卷中,将討論齐次空間上調和分析的問題(特别是群上的調和分析)以及与此密切相关的在某些常曲率空間上积分几何学的問題. 这个理論,由于它的各式各样的結果(例如与特殊函数論,多复变函数論等有关的結果)是丰富的,自然,不可能在第五卷中完全闡述出来. 我們仅限于闡述劳倫兹(Lorentz)群上的調和分析. 值得指出的是,劳倫兹群以及和它有关的齐次空間上的調和分析,比"退化"的情形,即欧几里得空間上的調和分析有着更丰富的內容. 例如,在欧几里得空間的情形,函数在无限远处的性质仅影响它的富里埃变换的光滑性. 而在劳倫兹群的情形,函数在无限远处的性质导出它的富里埃变换在不同点上值之間的代数关系. 然而,这些問題現在尚处于研究的开始阶段.

第四卷的內容自成一个整体,且如我們所說,闡述的內容几乎不依賴于前几卷. 如果不計及个别章之間的联系,可以从叙述核空間和装备希尔伯特空間一般理論的第一章开始讀起,也可以从叙述更加基本的正定广义函数的理論的第二章开始.

我們注意,在某些章,除一般知識外也包含更专門的內容,初讀时可以略过.

作者深深感謝在写这本书的工作中給与帮助的人,希洛柯夫(Ф. В. Широков)的工作远远超过通常編輯工作的范圍,兜宁(А. С. Дынин),米嘉金(Б. С. Митятин)和里德茨基(В. Б. Лидский)在作者写第一章的个别問題时提供了有益的建議. 作者特别感謝維列金娜(С. А. Виленкина),因为整理手稿等出版前必須的一切工作都是她做的.

И. М. 盖勒范德

Н. Я. 維列金

目　录

序言……………………………………………………………(iii)

第一章　关于核的定理,核空間,装备希尔伯特空間

§**1**. **賦可列范空間上的双綫性泛函,关于核的定理**…………(2)

1. 凸泛函(2); 2. 双綫性泛函(7); 3. 在具体空間中双綫性泛函的构造(关于核的定理)(10).

§1 的附录. 空間 K, S 及 Z ……………………………(18)

§**2**. **希尔伯特-許密特型算子及核算子**……………………(24)

1. 全連續算子(25); 2. 希尔伯特-許密特型算子(30); 3. 核算子(35); 4. 迹范数(44); 5. 迹范数及算子展为1秩算子的和(49).

§**3**. **核空間,抽象的关于核的定理**…………………………(53)

1. 可列希尔伯特空間(53); 2. 核空間(58); 3. 空間核性的判别法(61); 4. 核空間的性质(65); 5. 核空間上的双綫性泛函(68); 6. 核空間的例(73); 7. 核空間中集的度量級(79); 8. 綫性拓扑空間的泛函維数(91).

§**4**. **装备希尔伯特空間,自共軛算子与酉算子的譜分析**……(96)

1. 广义特征向量(96); 2. 装备希尔伯特空間(99); 3. 希尔伯特空間实現为函数空間形式以及装备希尔伯特空間(103); 4. 希尔伯特空間的連續直接和与装备希尔伯特空間(107); 5. 装备希尔伯特空間上算子的譜分析(112).

§4 的附录. 希尔伯特空間上自共軛算子和酉算子的譜分析(119)

1．关于譜分解的抽象定理(119)； 2．循环算子(121)；
3．将希尔伯特空間分解为相应于給定自共轭算子的連續直接和(122)．

第二章 正广义函数和正定广义函数

§1．**引言**……(126)
1．正性和正定性(127)．
§2．**正广义函数**……(132)
1．在支集有界的无限次可微函数空間上的正广义函数(132)； 2．空間 S 上正广义函数的一般形式(135)；
3．某些其他空間上的正广义函数(137)； 4．可乘正的广义函数(139)．
§3．**正定广义函数，博赫納尔定理**……(141)
1．空間 S 上的正定广义函数(141)； 2．連續的正定函数(142)； 3．空間 K 上的正定广义函数(147)； 4．空間 Z 上的正定广义函数(155)； 5．对平移不变的正定埃尔密特双綫性泛函(156)； 6．正广义函数和正定广义函数的例(158)．
§4．**条件正定广义函数**……(164)
1．基本定义(164)； 2．条件正广义函数(一元的情形)(165)； 3．条件正广义函数(多元的情形)(168)；
4．空間 K 上的条件正定广义函数(177)； 5．与条件正定广义函数相联系的双綫性泛函(179)．
§4 的附录……(183)
§5．**偶正定广义函数**……(185)
1．序言(185)； 2．空間 $S_{1/2}^{1/2}$ 上的偶正定广义函数(187)； 3．空間 $S_{1/2}$ 上的偶正定广义函数(201)； 4．正定广义函数和綫性变换群(202)．
§6．**在支集有界的一元函数空間上的偶正定广义函数**……(205)
1．正广义函数和可乘正的广义函数(205)； 2．正綫性

泛函的延拓定理(208)； 3．空間Z上的偶正广义函数(209)； 4．空間Z_+上的正泛函用測度表示时的不唯一性(215)．

§7． **带对合的拓扑代数上的可乘正綫性泛函**………………(217)

1．带对合的拓扑代数(217)； 2．二元多項式代数(220)．

第三章 广义随机过程

§1． **与广义随机过程有关的基本概念**……………………(225)

1．随机变量(225)； 2．广义随机过程(230)； 3．广义随机过程的例(232)； 4．广义随机过程的运算(233)．

§2． **广义随机过程的矩，高斯过程，特征泛函**………………(234)

1．广义随机过程的平均值(234)； 2．高斯过程(236)； 3．具有給定的相关泛函及平均值泛函的高斯过程的存在性(239)； 4．广义高斯过程的导数(244)； 5．高斯广义随机过程的一些例(245)； 6．广义随机过程的特征泛函(247)．

§3． **平稳广义随机过程．具有平稳的n阶增量的广义随机过程**……………………………………………………(250)

1．平稳过程(250)； 2．平稳过程的相关泛函(250)； 3．平稳增量过程(251)； 4．平稳广义随机过程的富里埃变换(255)．

§4． **每点的值皆为独立的广义随机过程**……………………(259)

1．具有独立值的过程(259)； 2．泛函 $e^{\int f[\varphi(t)]dt}$ 为正定的条件(261)； 3．独立值过程与条件正定函数(264)； 4．独立值过程与无限可分分布律的联系(267)； 5．与n阶泛函相联系的过程(269)； 6．广义普阿松型过程(270)； 7．独立值过程的相关泛函与矩量(270)； 8．独立值高斯过程(272)．

§5． **广义随机場**…………………………………………………(273)

1．基本定义(273)； 2．齐次随机場与具有第s阶齐次

增量的場(274)； 3. 各向同性的齐次广义随机場(275)；4. 具有第 s 阶的齐次和各向同性增量的广义随机場(277)； 5. 多維广义随机場(280)； 6. 各向同性的及向量的多維随机場(283).

第四章　綫性拓扑空間上的測度

§1. 基本定义……(285)

1. 柱状集(285)； 2. 柱状集的最簡单的性质(287)；3. 柱状集的測度(289)； 4. 柱状集測度的連續性条件(291)； 5. 导出的柱状集測度(292).

§2. 核空間的共軛空間上柱状集測度的可列可加性……(293)

1. 柱状集測度的可加性(293)； 2. 在可列希尔伯特空間的共軛空間中柱状集測度的可列可加性条件(298)；3. 在可列希尔伯特核空間的共軛空間中柱状集的測度(301)； 4. 在核空間的准确联合的共軛空間上柱状集的可列可加性(311)； 5. 希尔伯特空間中柱状集測度的可列可加性条件(315).

§3. 綫性拓扑空間上的高斯測度……(317)

1. 高斯測度的定义(317)； 2. 在可列希尔伯特空間的共軛空間上高斯測度的可列可加性条件(321).

§4. 綫性拓扑空間上測度的富里埃变换……(327)

1. 測度的富里埃变换的定义(327)； 2. 綫性拓扑空間上的正定泛函(329).

§5. 綫性拓扑空間上的拟不变測度……(332)

1. 有限維空間上的不变測度和拟不变測度(332)； 2. 綫性拓扑空間上的拟不变測度(337)； 3. 完备距离空間上的拟不变測度(342)； 4. 核李群及其酉表示,量子場論中的交换关系(345).

注釋和文献索引……(354)

参考文献……(358)

第一章　关于核的定理，核空間，装备希尔伯特空間

本章将研究一类賦可列范空間[1]，即核空間．首先，这类空間联系着“关于核的定理”而出現，这个定理在本书中将不止一次地用到．

稍后将了解到核空間在泛函分析的其他許多問題中也起着重要的作用，就是說，核空間是研究自共軛算子譜分解最自然的一类空間．

这类空間和譜分解的联系已經在第三卷中介紹过(第四章§3第一段)．然而那里关于核空間的定义对于别的問題并不完全适宜．

因此，在这一卷中要另外定义空間的核性．在許多重要的情况下，这个定义和第三卷所給出的定义等价．这一章叙述的內容并不依賴于第三卷中叙述的內容．为了使叙述完全独立，本章中将引进关于自共軛算子譜分解的某些結果．然而此地主要注意点在于理論的一般观点，这有别于第三卷，在那里有不小的篇幅是把这些結果用到具体的微分算子的．

装备的希尔伯特空間是一个重要的概念，这个概念是在考慮核空間中用不同的方法引进內积时产生的．装备希尔伯特空間的

---

[1] 我們假設讀者已熟悉第二卷第一、二章中关于賦可列范空間的概念．关于这种空間中特殊的一类——可列希尔伯特空間的基本事实将在§3的开始部分有簡短的叙述．应該注意，在本卷中我們始終假設所考慮的賦可列范空間都是完备的，而且此后不再特別申明．

此外，我們照例认为用来确定賦可列范空間 Φ 的拓扑的一族符合范数 $\|\varphi\|_n$ $(1\leqslant n<\infty)$ 是单調增加的，即对 Φ 中的任一 φ，不等式

$$\|\varphi\|_1\leqslant\cdots\leqslant\|\varphi\|_n\leqslant\cdots$$

成立．

理論在 §4 中叙述，那里也給出这种理論对自共軛算子譜分析的应用.

和核空間理論有关的还有綫性拓扑空間上測度論的問題，这将在第四章叙述. 在第四章中我們将証明，要使得空間 Φ 的共軛空間 Φ' 中柱狀集上的任一測度是可列可加的，必須而且只需 Φ 是核空間.

§1. 賦可列范空間上的双綫性泛函，关于核的定理

本节将研究賦可列范空間上的双綫性泛函[1). 将証明：对任一双綫性泛函 $B(\varphi, \psi)$，当变元 φ 及 ψ 在賦可列范空間 Φ 及 Ψ 中变化时，它是連續的話，则在这两个空間中它对某个范数 $\|\varphi\|_m$ 及 $|\psi|_n$ 連續. 换言之，我們要証明，对 Φ 及 Ψ 中的所有 φ, ψ，

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant M\|\varphi\|_m|\psi|_n$$

成立，此地 M, m, n 与 φ 及 ψ 无关.

把这个結果用到各个具体的空間，就得到在这些空間中双綫性泛函的一般形式. 其中所得到的最重要的結果之一就是写出了在具有有界支集[2) 的无限次可微函数全体所成的空間 K 上双綫性泛函的一般形式. 我們将証明，这种泛函形如

$$B(\varphi, \psi) = (F, \varphi(x)\psi(y)),$$

此地 F 是以 $x=(x_1, \cdots, x_k)$ 和 $y=(y_1, \cdots, y_l)$ 为变元的、支集有界且无限次可微的函数全体所成的空間 K_2 上的綫性泛函. 这个定理就叫做"关于核的定理"[3)，在本书中常常用到.

1. 凸泛函 双綫性泛函一般性质的建立，依賴于賦可列范空

1) 泛函对其两个变元 φ 与 ψ 都是綫性时称为双綫性泛函. 后面还将遇到对一个变元 φ 是綫性而对另一个变元 ψ 为反綫性，即

$$B(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2, \psi) = \alpha B(\varphi_1, \psi)+\beta B(\varphi_2, \psi),$$

但

$$B(\varphi, \alpha\psi_1+\beta\psi_2) = \bar{\alpha}\beta(\varphi, \psi_1)+\bar{\beta}B(\varphi, \psi_2).$$

这种泛函称为双綫性埃尔密特泛函或簡称为埃尔密特泛函.

2) 原书叫做 финитная，意指具有有界支集的，但无适当的中文簡称，姑照意譯. 有时也簡譯为支集有界的——譯者注.

3) 更准确地說，是"K 空間上的关于核的定理"，关于核的一般定理将在 §3 証明.

間上有关凸泛函的某些定理.

綫性空間 Φ 上的实泛函 $p(\varphi)\geqslant 0$ 适合如下条件:对 Φ 中的任意两个 φ 及 ψ,

$$p(\varphi+\psi)\leqslant p(\varphi)+p(\psi)$$

成立,而且对任意 φ 及复数 α, 满足等式

$$p(\alpha\varphi)=|\alpha|p(\varphi)$$

时,称为凸泛函.

賦范空間上的范数 $\|\varphi\|$ 是凸泛函的一例,因为由范数的定义,有 $\|\varphi+\psi\|\leqslant\|\varphi\|+\|\psi\|$ 而且 $\|\alpha\varphi\|=|\alpha|\,\|\varphi\|$. 我們注意,在上述定义中并不假設泛函 $p(\varphi)$ 对 Φ 中所有的元素 φ 都是有限的,也就是說, $p(\varphi)$ 可以取値 $+\infty$. 其中假設 $\infty+a=\infty+\infty=\infty$, 而且当 $a\neq 0$ 时 $a\cdot\infty=\infty$. 显然,使泛函 $p(\varphi)$ 取有限値的元素 φ 的全体組成 Φ 的綫性子空間[1].

也可以使 $p(\varphi)$ 避免以无限为値,只須把 $p(\varphi)$ 看成上述綫性子空間上的泛函卽可.

凸泛函的概念与絕对凸集的几何概念有关. 設 A 是綫性空間 Φ 中的点集,若当 φ 及 ψ 为 A 中任意的元素而且 α 及 β 为适合 $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$ 的复数时有 $\alpha\varphi+\beta\psi\in A$, 就称 A 为絕对凸集[2].

为了建立凸泛函与絕对凸集两个概念之間的联系,对凸泛函 $p(\varphi)$,作适合条件 $p(\varphi)\leqslant 1$ 的元素 φ 全体所成的集 A. 我們証明,这个集是絕对凸的. 事实上,設 φ 及 ψ 为集 A 中的元素,卽設 $p(\varphi)\leqslant 1$ 及 $p(\psi)\leqslant 1$, 那末,当 $|\alpha|+|\beta|\leqslant 1$ 时,

$$p(\alpha\varphi+\beta\psi)\leqslant|\alpha|p(\varphi)+|\beta|p(\psi)\leqslant 1,$$

而这就是說 $\alpha\varphi+\beta\psi\in A$. 由是証明了集 A 是絕对凸的.

反之,若 A 是絕对凸集,則存在凸泛函 $p(\varphi)$, 使 A 卽为适合 $p(\varphi)\leqslant 1$ 的元素 φ 組成的集. 这个泛函可以由等式

$$p(\varphi)=\frac{1}{q}$$

定义,而 q 是使 $\lambda\varphi\in A$ 的数 $\lambda>0$ 的上确界.

---

[1] 一般說来不是閉的.

[2] 在实綫性空間中,絕对凸集等价于中心对称的凸集.

容易看出，对 A 中的元素 φ 有 $p(\varphi)\leqslant 1$，而当 φ 不属于 A 时 $p(\varphi)>1$. 此外，由 A 的絕对凸性可以推出，$p(\varphi)$ 是凸泛函.

因此，我們建立了空間 Φ 上凸泛函和絕对凸集之間的双方单值的对应[1].

我們注意，Φ 中包含的 A 的最小綫性子空間 Ψ 上的泛函 $p(\varphi)$ 是有限的. 特别当 Φ 中的任一 φ 落在联接 A 中某个元素 $\psi\neq 0$ 与 0 的直綫上(即 $\varphi=\lambda\psi$)时，泛函 $p(\varphi)$ 在全空間 Φ 上是有限的. 在此情况下，我們称集 A 是吸收的. 我們留意，若 A 是吸收集，則 Φ 中任一元素 φ 必属于某个集 nA（此地 nA 表示形如 na, $a\in A$ 的元素的全体）.

設 $p(\varphi)$ 是一泛函，若对空間 Φ 中的任一点 φ_0 及任一数 $\varepsilon>0$ 存在 φ_0 的环境 U，使得对此环境中任一 ψ，不等式

$$p(\psi)\geqslant p(\varphi_0)-\varepsilon$$

都成立，那末称 $p(\varphi)$ 是下半連續的.

我們要証明，若泛函 $p(\varphi)$ 是下半連續的，那末由适合条件 $p(\varphi)\leqslant 1$ 的元素 φ 的全体組成的集 A 是閉的. 事实上，設 φ_0 是 A 的极限点，則在 φ_0 的任一环境中有 ψ，使 $p(\psi)\leqslant 1$. 因此，由泛函 $p(\varphi)$ 的下半連續性，也就有 $p(\varphi_0)\leqslant 1$. 这就証明了 A 是閉集.

現在証明，若絕对凸集 A 是閉的，則相应的凸泛函是下半連續的. 事实上，由于 $p(\varphi)\leqslant 1$ 的点 φ 所成的集 A 是閉的，得知，使 $p(\psi)>1$ 的点 ψ 全体組成开集. 因此，由不等式 $p(\varphi)>a$ 所決定的集也是开的，这里 a 是任一数. 置 $a=p(\varphi_0)-\varepsilon$，我們得知，适合 $p(\psi)>p(\varphi_0)-\varepsilon$ 的点全体組成开集，它是 φ_0 的环境. 这就証明了泛函 $p(\varphi)$ 在任一点 φ_0 的下半連續性.

因此，我們証明了，在下半連續凸泛函 $p(\varphi)$ 及絕对凸閉集 A 之間具有双方单值的对应.

引理 1 設 $\{p_\alpha(\varphi)\}$ 是綫性拓扑空間 Φ 上一族下半連續的凸泛函，則由等式

$$p(\varphi)=\sup_\alpha p_\alpha(\varphi)$$

[1] 这句話是不正确的——譯者注.

定义的泛函 $p(\varphi)$ 也是下半連續的，并且是凸的．

証　置 A_α 为对应于泛函 $p_\alpha(\varphi)$ 的絕对凸閉集．显然，不等式

$$p(\varphi)=\sup_\alpha p_\alpha(\varphi)\leqslant 1$$

成立的充要条件是元素 φ 属于所有 A_α 的通集． 但閉的絕对凸集的通集是閉的，也是絕对凸的，因此，泛函 $p(\varphi)$ 相应于閉的絕对凸集 $A=\bigcap_\alpha A_\alpha$，因而 $p(\varphi)$ 是下半連續的凸泛函．

下面的几何定理，是研究下半連續凸泛函的基础．

定理 1　設 A 是賦可列范空間 Φ 中的閉絕对凸集．若 A 是吸收集（即空間的任一元素 φ 落在过零元素及 A 中某个非零元素的直綫上），則 A 必含有空間 Φ 中零的某个环境．

証　置 nA 为形如 na, $a\in A$ 的元素全体所成之集．由 A 的絕对凸性知道，集 nA 对 n 是不减的：

$$A\subset 2A\subset\cdots\subset nA\subset\cdots.$$

但是集 A 是吸收的，空間 Φ 中的任一元素 φ 必自某个 n 起属于 nA，因此，$\Phi=\bigcup_{n=1}^{\infty} nA$．然而，賦可列范空間不可能是可列个疏朗集的和集[1)]，因此，有一个 nA 在空間 Φ 的某个区域中稠密，由于它

---

1) 事实上，置 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$ 为賦可列范空間 Φ 中疏朗集組成的增加序列，由于 A_1 是疏朗的，必有由不等式 $\|\varphi-\varphi_1\|_{p_1}\leqslant r_1$, $r_1\leqslant 1$ 确定的球 $S(\varphi_1, r_1)$，它不含有 A_1 中的点．又可以进而找到由不等式 $\|\varphi-\varphi_2\|_{p_2}\leqslant r_2$, $r_2<\frac{1}{2}$, $p_2>p_1$ 决定的球 $S(\varphi_2, r_2)$，这个球落在 $S(\varphi_1, r_1)$ 中，但不含 A_2 中的点．继續下去就得到一套球

$$S_1(\varphi_1, r_1)\supset S_2(\varphi_2, r_2)\supset\cdots\supset S_k(\varphi_k, r_k)\supset\cdots,$$

它們是由不等式 $\|\varphi-\varphi_k\|_{p_k}\leqslant r_k$, $r_k\leqslant\frac{1}{k}$, $p_{k+1}>p_k$ 給出的，而且 $S_k(\varphi_k, r_k)$ 不含有 A_k 中的点．容易看出，这些球的中心組成 Φ 中的基本点列（即 $\lim\limits_{k,l\to\infty}\|\varphi_k-\varphi_l\|_n=0$ 对任一 n 成立）．由于我們只考慮完备的賦可列范空間，序列 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k,\cdots$ 具有极限点 φ．显然此点 φ 属于所有的球 $S_k(\varphi_k, r_k)$，因此不属于任一集 A_k．这意味着我們找到空間 Φ 的点不属于和集 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，因此，$\Phi\neq\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$．

我們注意，定理 1 以及由它推出的結果，对所有不能分解为可列个疏朗集的和的局部凸綫性拓扑空間都是成立的（一个綫性拓扑空間，如果有由絕对凸集組成的零的完备环境系，就叫作局部凸的）．

当綫性拓扑空間使定理 1 成立时称为桶式空間．因此，这个定理可以这样叙述，所有賦可列范的空間都是桶式空間．

是閉集，必含有由不等式 $\|\varphi-\varphi_0\|_k\leqslant r_0$ 給出的球 $S(\varphi_0, r_0)$. 这样一来，集 A 就包含由不等式 $\|\varphi-\varphi_1\|_k\leqslant r_1$ 給出的球 S_0，这里 $\varphi_1=\frac{\varphi_0}{n}$，$r_1=\frac{r_0}{n}$. 因为絕对凸集含有此集中任二元素之差的一半，所以，所有形如 $\frac{\varphi-\varphi_1}{2}$ 的元素都属于 A，而 $\varphi\in S_0$，$\varphi_1=\frac{\varphi_0}{n}$. 但这些元素組成球 S_1，这个球是由不等式 $\|\varphi\|_k\leqslant r_1/2$ 給出的. 这就証明了集 A 包含零的环境. 定理証毕.

我們留意在第二册中（見第一章§3第四段）已經遇到过定理1.

定理1等价于下面的关于賦可列范空間上凸泛函的定理.

定理 1′ 設 $p(\varphi)$ 是賦可列范空間 Φ 上的下半連續凸泛函而且在此空間上处处取有限值，則泛函 $p(\varphi)$ 必在空間 Φ 中零的某个环境上是有界的.

証 考察由适合 $p(\varphi)\leqslant 1$ 的点 φ 全体所成之集 A. 由泛函 $p(\varphi)$ 的凸性及下半連續性，这个集是絕对凸的并且是閉的. 由于泛函 $p(\varphi)$ 在全空間 Φ 上取有限值，于是推出，集 A 是吸收的（即 Φ 中任一元素 φ 可以表示成形式 $\lambda\psi$，而 $\psi\in A$）. 由定理1，在 A 中就包含环境 U，而由 A 的定义，在此环境上就有 $p(\varphi)\leqslant 1$. 定理証毕.

为了写出双綫性泛函，我們需要下面的对定理 1′ 的拓广.

定理 2 設 $p_1(\varphi), \cdots, p_n(\varphi), \cdots$ 是賦可列范空間 Φ 上的下半連續凸泛函序列；又設

$$p_1(\varphi)\geqslant p_2(\varphi)\geqslant\cdots\geqslant p_n(\varphi)\geqslant\cdots,$$

而且对任一点 φ，自某个数 $n(\varphi)$ 起，$p_n(\varphi)$ 取有限值，那末必有数 n_0，m，M，它們都与 φ 无关，使得当 $n\geqslant n_0$ 时泛函 $p_n(\varphi)$ 在全空間是有限的. 进而言之，对所有的 φ，不等式

$$p_n(\varphi)\leqslant M\|\varphi\|_m$$

成立.

証 空間 Φ 上满足不等式 $p_n(\varphi)\leqslant 1$ 的点全体組成的集記作 A_n. 每个集 A_n 是絕对凸的并且是閉的，同时空間 Φ 中的每个元

素 φ 必属于至少一个形如 kA_n 的集，就是說，若 $p_n(\varphi)$ 是有限值而且 $p_n(\varphi)\leqslant k$，則 φ 属于集 kA_n. 由是有等式 $\Phi=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}kA_n$. 因为空間 Φ 不可能分解为可列个疏朗集的和，所以至少有一集 kA_{n_0} 在空間 Φ 的某个区域中稠密. 那末集 A_{n_0} 也在 Φ 的某个区域中稠密. 由于集 A_{n_0} 是閉的，它必然包含 Φ 中某个由不等式 $\|\varphi-\varphi_0\|_m\leqslant r$ 确定的球 $S_m(\varphi_0, r)$，因此，由 A_{n_0} 的絕对凸性，它也包含球 $S_m\left(\frac{r}{2}\right)$: $\|\varphi\|_m\leqslant\frac{r}{2}$. 換言之，我們証明了由不等式 $\|\varphi\|_m\leqslant\frac{r}{2}$ 推出不等式 $p_{n_0}(\varphi)\leqslant 1$. 由于当 $n\geqslant n_0$ 时有

$$p_n(\varphi)\leqslant p_{n_0}(\varphi),$$

所以对所有 $n\geqslant n_0$ 及所有 φ，不等式

$$p_n(\varphi)\leqslant M\|\varphi\|_m$$

成立，此地置 $M=\frac{2}{r}$. 定理証毕.

2. 双綫性泛函 現在要写出賦可列范空間上的双綫性泛函. 显然，賦可列范空間 Φ 上任一綫性泛函具有有限阶，即对一个范数 $\|\varphi\|_n$ 是連續的. 事实上，由 F 的連續性，可以找到一个由不等式 $\|\varphi\|_n\leqslant\delta$ 确定的环境 U，使在其上成立不等式 $|(F, \varphi)|\leqslant 1$. 因而当 $\|\varphi\|_n\leqslant\varepsilon\delta$ 时 $|(F, \varphi)|\leqslant\varepsilon$，就是說，$F$ 按范数 $\|\varphi\|_n$ 連續.

現在将証明对双綫性泛函的类似的結論. 設 $B(\varphi, \psi)$ 是双綫性泛函，φ 及 ψ 分别在賦可列范空間 Φ 及 Ψ 中变化. 若固定 φ 时泛函 $B(\varphi, \psi)$ 对 ψ 連續，而且固定 ψ 时对 φ 連續，就称 $B(\varphi, \psi)$ 是对每个变元連續的. 下面的定理成立.

定理 3 設 $B(\varphi,\psi)$ 是賦可列范空間 Φ 及 Ψ 上的双綫性泛函，且对每个变元 φ 和 ψ 是連續的，則在空間 Φ 及 Ψ 上必有范数 $\|\varphi\|_n$ 及 $|\psi|_m$，使泛函 $B(\varphi, \psi)$ 按上述范数对 φ 及 ψ 是二元連續的. 換言之，存在范数 $\|\varphi\|_n$ 及 $|\psi|_m$，使对所有元素 φ 及 ψ，滿足不等式[1]

$$|B(\varphi, \psi)|\leqslant M\|\varphi\|_n|\psi|_m, \tag{1}$$

---

1) $\|\varphi\|_n$ 表示空間 Φ 中的范数，而 $|\psi|_m$ 是空間中 ψ 的范数.

此地 M 不依賴于 φ 及 ψ.

証 对每个 n, 由等式

$$p_n(\psi)=\sup_{\|\varphi\|_n\leqslant 1}|B(\varphi,\ \psi)| \tag{2}$$

定义了空間 Ψ 上的一个泛函 $p_n(\psi)$. 这个泛函可以取有限值, 也可以取无限值, 但对每点 ψ_0 必有 n (与 ψ_0 有关), 使 $p_n(\psi_0)$ 取有限值. 事实上,对固定的 ψ_0, $B(\varphi,\ \psi_0)$ 是空間 Φ 上的綫性連續泛函. 而賦可列范空間上的任一連續泛函必对某个范数 $\|\varphi\|_n$ 連續, 即有 n 使 $B(\varphi,\psi_0)$ 在球 $\|\varphi\|_n\leqslant 1$ 上是有界的,所以,由(2), $p_n(\psi_0)$ 的値有限.

現在証明,这些泛函 $p_n(\psi)$ 是单調減少的、凸的而且是下半連續的. 泛函 p_n 在每一点 ψ 的单調減少性

$$p_1(\psi)\geqslant\cdots\geqslant p_n(\psi)\geqslant\cdots$$

可以由范数 $\|\varphi\|_n$ 滿足不等式

$$\|\varphi\|_1\leqslant\|\varphi\|_2\leqslant\cdots\leqslant\|\varphi\|_n\leqslant\cdots$$

推出. 由上述不等式,集 $\|\varphi\|_n\leqslant 1$ 包含集 $\|\varphi\|_{n+1}\leqslant 1$, 因而

$$p_n(\psi)=\sup_{\|\varphi\|_n\leqslant 1}|B(\varphi,\ \psi)|\geqslant\sup_{\|\varphi\|_{n+1}\leqslant 1}|B(\varphi,\ \psi)|=p_{n+1}(\psi).$$

还有, 泛函 $p_n(\psi)$ 是凸的. 实际上, 对固定的 φ, 泛函 $|B(\varphi,\ \psi)|$ 是凸的,因此,泛函

$$p_n(\psi)=\sup_{\|\varphi\|_n\leqslant 1}|B(\varphi,\ \psi)|$$

作为凸泛函的上界也是凸的. 完全一样地証明泛函 $p_n(\psi)$ 的下半連續性(φ 固定时泛函 $|B(\varphi,\ \psi)|$ 是連續的,这比下半連續更强).

現在应用定理 2 于泛函 $p_n(\psi)$, 我們得到 $p_n(\psi)\leqslant M|\psi|_m$, 此地 m 及 M 为不依賴于 ψ 的数而 n 大于或等于 n_0. 由 $p_n(\psi)$ 的定义,就得到

$$\sup_{\|\varphi\|_n\leqslant 1}|B(\varphi,\ \psi)|\leqslant M|\psi|_m,$$

因此

$$|B(\varphi,\ \psi)|\leqslant M\|\varphi\|_n|\psi|_m.$$

这就証明了本定理.

現在考察映照賦可列范空間 Φ 到賦可列范空間 Ψ 的共軛空