基础代数

第一卷 第一分册

[美] N · Jacobson 著

高等教育出版社

基 础 代 数

第一卷 第一分册

[美] N. Jacobson 著
上海师范大学
数学系代数教研室 译

高等教育出版社

美国 W. H. Freeman 出版公司出版的 N. Jacobson 著《Basic Algebra》一书，是代数学方面内容较新和较完全的一部书．该书的编排和写法反映了作者较高的学术水平和丰富的教学经验，因此也是一部好的教学用书．

原书共分 I、II 两卷，译本分两卷四册出版．本书是第一卷第一分册，根据原书 I 卷 0—4 章译出，内容包括抽象代数的基础课题．可供我国数学专业或其他开设抽象代数课程的专业的师生作教学参考书．

基 础 代 数

第一卷 第一分册

[美] N. Jacobson 著

上海师范大学
数学系代数教研室 译

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.25 字数 293,000
1987 年 9 月第 1 版 1987 年 9 月第 1 次印刷
印数 00,001— 3,130

书号 13010·01075 定价 2.80 元

译 者 说 明

本书根据 Nathan Jacobson 著“Basic Algebra I”1974 年版翻译而成. 我们要感谢 N. Jacobson 教授, 他非常热情地寄来了他对此书所做的修改和补充. 我们又据此对译稿进行了修改, 因而译本与 1974 年版不尽相同. 由于水平有限, 译文中缺点错误在所难免, 恳请读者不吝指正.

参加本书翻译工作的有(以姓氏笔划为序): 丁守中、王芷娟、孔宗文、许承德、孙根娣、吴文雅、吴望名、沈明刚、邵淞春、周素琴、赵善继、赵嗣元、席德茗、喻志德. 负责人和统稿人为赵善继、席德茗、孔宗文、丁守中.

上海师范大学数学系

代数教研室

1982.6.

序　言

自从作者开始写三卷《抽象代数讲义》以来，已有二十余年了．该书第一卷与第二卷分别于1951和1953年问世，第三卷于1964年才完成．自着手这个工作——约1950年——以来，甚至在这三卷教材的水平上，代数学取得了实质性的进展．首先是采取了引入某些基本的新概念这种形式．明显的例子是叙述了对大部分数学提供有用框架的范畴论，同调代数以及模型论对代数的应用．或许，比这些概念的出现更令人注意的是，抽象代数的公理化概念化方法已被接受，并且日益扩大它在整个数学领域里的影响．现在，代数方法论已被当然地认为是在数学中的基本工具．另一方面，在近代研究工作中，我们可以看到代数对于十分具体的问题所提出的挑战的回答，其中不少问题的解决需要相当复杂的技巧．

在过去的二十年里，特别从苏联人造卫星射入轨道惊动了世界之后，出现的另一个显著变化是中小学数学教育的水平的提高（虽然现在这个过程有些退缩，我们希望这仅是暂时的偏差）．中小学数学的改革必然引起高等学校数学的改革．一个明显的例子是线性代数的提早讲授，其目的在于给多元微积分的学习以及在其他领域里的应用提供一个适当的背景．并且线性代数的后继课程往往是抽象代数，所以二十年前研究生水平的题材现在要给数学经验较少的学生来讲授．

这本《基础代数I》和即将出版的《基础代数II》原来设想为我们《抽象代数讲义》的新版．但是当我们开始考虑手头的任务，特别是考虑到大学和研究生院课程的变化时，我们决定用与原先的书完全不同的形式来组织题材：分成两个抽象化水平，第一个水平——在这一卷里处理——包括代数中比较容易为初学者所接受

的部分.我们在这里介绍的大部分题材是有古典味道的.希望这会促进对过去的,特别是十九世纪数学的伟大成就的了解.在处理上我们试图用最有效的现代工具.这就必须叙述在抽象代数教本里已成为标准的那类基本题材的主要内容.但是我们还是努力处处把明显易学的内容放在前面,认为这样是会受到代数基础较弱的学生欢迎的.另一方面,对讨论的主题往往深究到超出通常的深度,所以有时就要求读者有一定的才能并能专心.在第II卷里我们计划照较传统的课程那样介绍更为抽象和深奥微妙的题材.我们希望学生在读过第I卷后,能达到一个成熟的水平以便向第II卷的抽象水平阔步前进.

现在我们将《基础代数I》的内容和结构作一个简单的说明.引论,关于集合论和整数系,包括对多数读者来讲比较熟悉的题材:集合代数,映射的定义和数学归纳法.虽然不很熟悉但对继续学习颇为重要的是等价关系的概念和由它来定义的商集.我们还引进了交换图和通过一个等价关系得到的映射的分解.本章还证明了算术基本定理,给出了递归定理(或归纳定义)的一个证明.

第一章讨论幺半群和群.我们的起点是变换的幺半群和变换群的概念.在这一方面我们遵循这个主题的发展历史.在我们的讨论中,同态概念出现得比较迟,要在读者有机会吸收某些较简单而直觉的概念之后才出现.但当同态概念一旦被引进之后,就相当详细地叙述了它的最重要的派生结果(同构基本定理和同态象的子群与含有核的子群之间的对应等).引入了并用许多例子说明了作用在一个集合上的群的概念,这一概念现在在几何学中起着如此重要的作用.这就引导到有限群的计数法,其中一个特殊情况包含在类方程里.这些结果被用来导出Sylow定理,它构成了第一章最后一个议题.

第二章的第一部分在环的角度上重复了第一章里已叙述的许

多概念．此后，讨论了从已知的环构造各种新的环：矩阵环，可换整环上的分式域，多项式环．这章的最后部分专门讨论有消去律的交换幺半群和交换整环的基本的因子分解理论．

第三章的主要内容是主理想整环上的有限生成模的结构理论和它在交换群及矩阵的标准形上的应用．当然在完成这些内容之前有必要引进关于模的标准定义和概念．我们强调了模与作用在集合上的群的概念是类似的，还强调了模的概念是向量空间这个熟悉概念的自然推广．这章是以关于主理想整环上有限生成模的自同态环的定理而结束，它们推广了 Frobenius 关于与已知矩阵可换的矩阵所组成的环的古典结果．

第四章几乎专门处理两个古典问题的派生结果．这两个问题是：以根式解方程的可能性和尺规作图．前一个问题比后一个难得多．处理它们的工具是由 Galois 创造出来的，这就是可离多项式的分裂域的子域和自同构群的子群之间的对应．这个工具在代数和数论里已经获得十分重要的地位．但是我们相信，在这个阶段更为有效的是集中讨论给 Galois 理论以原始动力的那些问题，并且以详尽的方式来处理它们．第一章里开始讨论的有限群理论在这里更加详尽了，因为这里包括了为建立 Galois 对方程的根式可解性判别准则所需要的结果．这里还包括了 π 的超越性的证明，因为在证明以直尺和圆规来“化圆为方”的不可能性时需要这个结论．(实际上，因为只要稍费一点力气，所以我们还证明了 Lindemann 和 Weierstrass 的关于指数的代数无关的更一般的定理．)在本章之末，我们用 Galois 理论来导出有限域的重要结果，并证明本原元和正规基的定理以及范数与迹的基本定理，从而使这个理论更为丰满．

第五章继续研究多项式方程．我们现在是在一个实闭域里运算，它是实数域的一个代数的推广．我们证明了“代数基本定理”

的一个推广. 对任一实闭域 R, $R(\sqrt{-1})$ 是 R 的一个代数闭包. 然后我们导出 Sturm 定理, 它给出一个构造方法, 用以确定系数在 R 里的一个未知量的多项式方程在 R 里的根的个数. 这章的最后部分专门讨论多个未知量的多项式方程组和不等式组. 我们首先处理在这样的组里消去未知量的纯代数问题, 然后建立 Tarski 提出的 Sturm 定理的一个广泛的推广. 贯穿全章的重点是构造方法.

第六章的第一部分包括任意域上的二次型和交错型的基本理论. 它包括 Sylvester 的惯性指数定理和它的从 Witt 的互消定理所得的推广. 我们证明了 Cartan-Dieudonné 关于正交群可由对称来生成的重要定理. 这章的第二部分涉及所谓典型群(完全线性群、正交群和辛群)的构造理论. 在分析过程中, 我们采取了对这三类群都适用的统一的方法. 这个方法是 Iwasawa 应用于完全线性群时所首创, 而由 Tamagawa 推广到正交群的. 这些结果提供了在有限域上阶数容易计算的几类重要的单群.

第七章是结合代数和非结合代数理论的导引. 我们所讨论的结合代数理论中一个重要课题是向量空间的外代数. 这个代数在几何学里起着重要的作用, 而这里是用来导出行列式的主要定理. 我们还定义一个结合代数的正则表示, 迹和范数, 并且证明了关于这些函数的传递性的一般定理. 对于非结合代数, 我们给出了最重要的几类非结合代数的定义和例子. 随后给出 Hurwitz 的关于二次型的合成的漂亮定理的一个完全初等的证明. 我们以关于实数域上可除代数的 Frobenius 定理的证明和关于有限可除代数的 Wedderburn 定理来结束这一章.

第八章是格和 Boole 代数的一个简单的介绍. 我们处理的主要课题是关于半模格的 Jordan-Hölder 定理; 所谓的"射影几何的基本定理"; 关于 Boole 代数概念与 Boole 环(即所有元都是幂

等的)概念等价的Stone定理；最后是偏序集上的Möbius函数.

《基础代数I》是打算作为继线性代数后开设的代数课程的教材，它包含的题材比一学年课程所能容纳的要多得多．根据最近我们自己从这个教材较早的稿本获得的经验，提出在分成两个学期或三个学季的一个学年里可能的安排的如下建议．我们已发现在一个学期里安排引论(作稍微的处理)和第一—三章的几乎所有的题材是可能的．这必须略去引论中关于归纳法的递归定理的证明，第一章中关于自由群的那一节，第二章中最后一节(关于不要求单位元的环)，以及第三章中最后一节．第四章Galois理论，是第二学期课程的最佳起点．鉴于这题材内容相当丰富，在一个学期的课程里剩下给别的课题的时间就不多了．如果对第四章作某些省略，例如略去Lindemann-Weierstrass定理的证明，那么读完这个题材之后很可能还剩下几周时间．为了补足这个学期有几个可供选择的方案．一个可能是从一个未知量的方程的学习过渡到多个未知量的多项式方程组，这方面的材料有一部分在第五章里作了介绍，这章的部分材料与第四章配合得很好．另一方面，还可有突然转换主题的方案．一种可能是采用关于代数的那一章，另一种是学习关于二次型和典型群那章的一部分，再另外是学习最后一章，关于格和Boole代数.

对分成三个学季的课程计划可以安排如下：引言和第一，二章放在第一学季；第三章和第六章的实质性部分放在第二学季．这就要求插进第四章有关域论的一些材料，这是读第六章时所需要的知识．第三学季读第四章的Galois理论.

希望读者自学那些省略的题材来完成以本教材为基础的正规课程．我们认为很多课题是完全可以在有指导的自学过程中进行的.

我将对许多朋友和同事表示谢意，他们阅读了本书的最后第二稿的部分内容，并且提出有价值的建议，在我们准备最后一稿时，考虑到了这些建议. Walter Feit 和 Richard Lyons 提供群论方面的许多习题 Abraham Robinson, Tsuneo Tamagawa 和 Neil White 阅读了本书中他们各自专长的一些部分（分别是五、六、八章），并且发现了我们所忽略的缺点. George Seligman 阅读了全部原稿，并且提出了若干实质性的改进. S. Robert Gordon, James Hurley, Florence Jacobson 和 David Rush 在一学期或几学期的课程里用了较早的教本的部分内容，并且提醒我们注意到许多在叙述上可以改进的地方.

还有不少人对本书的出版起了相当重要的作用，其中特别要提的是 Florence Jacobson 和 Jerome Katz，他们对十分麻烦的校对工作给予极大的帮助. 最后，我们必须特别提到 Mary Scheller，她非常愉快地打印出全部底稿和差不多同样长的原始稿本.

我深深地受惠于所提到的那些朋友以及其他的朋友，现借此机会对他们表示诚挚的感谢.

Nathan Jacobson

Hamden Connecticut

1973年11月21日

目　录

引　论

集合论里的概念．整数

本卷的主要目的是介绍代数的基本结构：群、环、域、模、代数与格——这些概念是包括古典代数在内的庞大的代数学肌体的自然骨架．值得注意的是，其中许多概念或是为了解决几何学、数论或代数方程论中的具体问题，或是为了更深刻地理解这些问题已有的解答而产生的．在 Galois 理论中可以看到抽象理论与具体问题间相互作用的一个好的例子．Galois 理论的创立是由于 Galois 为了回答一个具体问题："怎样的一个未知量的多项式方程其解能用它的系数通过有理运算和开方来表出？"为了解答这个问题，我们首先要对这个问题给出一个精确的陈述，那就需要域、扩域以及多项式的分裂域等概念．为了理解 Galois 对这个代数方程问题的解法，我们需要群的概念以及可解群的性质．在 Galois 理论中这些结果是通过根的置换群来叙述的．其后，这些结果在下面的过程中得到更深刻的理解，就是从根的置换转变到更抽象的一个扩域的自同构群的概念．所有这些将在第四章中充分地讨论．

当然，处理某一类问题的方法一旦产生，就很可能应用于其他情况，甚至可能引出一些仅就它们自身来说也是很有趣的新问题．

在解决一些有趣的问题，特别是起源古典的问题的过程中，我们将力图强调与一般理论的关联．这就必须使理论的叙述超过基础水平而得到某些有趣的定理．偶尔，我们发现在练习中叙述某些应用是适宜的．为此以及其他的原因，要彻底地理解教材必须做相当数量的练习．

我们将要研究的结构的基本成分是集与映射. 或者读者已经具有所需要的集合论背景知识，可是，为了规定符号与术语，为了突出集合论中那些作为我们基础的特殊方面，简单地陈述集合论的某些基础知识看来还是需要的①. 从以后的观点看，需要强调的概念涉及等价关系和通过等价关系来分解映射，这些在我们的学习过程中将以多种形式一再出现. 在本引论的第二部分中，我们将简单地讨论整数系 $\mathbf{Z}$ 和更原始的自然数系 $\mathbf{N}$ 或计数的数: 0, 1, 2, …，这些可以作为代数结构发展的起点. 鉴于现在中小学教学中已把数系发展作为重点，故详细讨论 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 看来是多余的. 因此，我们将满足于概括地回顾引进 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 的一种方法的主要步骤，并给出在第一章群的讨论中所需要的两个结论的详细证明. 它们是整数的最大公因数(g. c. d)的存在性和"算术基本定理"，后者证明了任何一个 $\neq 0, 1$ 的自然数可以唯一地分解为素因子的乘积. 稍后(在第二章中)，作为主理想整环的算术的特殊情况，我们将再次导出这些结论.

0.1 集的幂集

我们的讨论将从概括地叙述集合论中某些概念开始，这些概念对本书是基本的.

令 S 是任意集，其元素记作 a, b, c 等等，这些元的本质是不重要的. 一个元 a 属于集 S 就记作 $a\in S$ (偶尔记作 $S\ni a$)，而与 $a\in S$ 相反的事实就记作 $a\notin S$. 假如 S 是 n 个元 a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, 的一个有限集，那么记 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 任何集 S 都引出另一集 $\mathscr{P}(S)$，即 S 的子集的集，这些子集中包括 S 自身和记作 $\emptyset$ 的空集. 例如，假如 S 是 n 个元的一个有限集，比方说

① 关于适合我们需要的集合论的一般参考书，我们推荐给读者一本很吸引人的小册子，"*Naive Set Theory*", Paul R. Halmos, Van Nostrand Reinhold, 1960.

$$S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$

那么 $\mathscr{P}(S)$ 就由 $\emptyset$，包含一个元的 n 个集 $\{a_i\}$，包含两个元的 $n(n-1)/2$ 个集 $\{a_i, a_j\}$, $i\neq j$, 包含 i 个元的

$$\binom{n}{i}=n!/i!\,(n-i)!=n(n-1)\cdots(n-i+1)/1\cdot 2\cdots i$$

个子集，等等所组成. 因此 $\mathscr{P}(S)$ 的基数即 $\mathscr{P}(S)$ 中元的个数是

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n.$$

我们把 $\mathscr{P}(S)$ 叫做集 S 的幂集②. 我们经常用一个或一组性质来规定 S 的一个子集，这样做的标准方式是写成

$$A=\{x\in S\mid\cdots\cdots\}$$

(或者，当 S 很明确时写成 $A=\{x\mid\cdots\cdots\}$)，其中 "……" 列出刻画 A 的性质. 例如，假如 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，那么 $\mathbf{N}=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\geqslant 0\}$ 定义了非负整数或自然数所作成的子集.

假如 A 和 $B\in\mathscr{P}(S)$(亦即 A 和 B 都是 S 的子集)，当 A 中的每一个元 a 也在 B 中时，我们说 A 包含于 B，或说 A 是 B 的一个子集(或 B 包含 A)，并且记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 我们可以用符号把上面所说的表示成 $a\in A\Rightarrow a\in B$，这里的 $\Rightarrow$ 读作"推出". 命题 $A=B$ 等价于两个命题 $A\supset B$ 和 $B\supset A$(用符号表示，即 $A=B\Leftrightarrow A\supset B$ 和 $B\supset A$，这里的 $\Leftrightarrow$ 读作"当且仅当"). 假如 $A\subset B$ 而 $A\neq B$，我们就记作 $A\subsetneq B$，并且说 A 是 B 的一个真子集，或可记 $B\supsetneq A$.

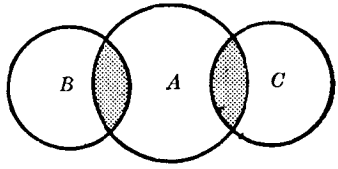
假如 A 和 B 都是 S 的子集，使得 $c\in A$ 且 $c\in B$ 的元 c 作成的 S 的子集叫作 A 与 B 的交. 我们把这个子集记作 $A\cap B$. 假如没有 S 的元同时包含在 A 和 B 中，亦即 $A\cap B=\emptyset$，那么就说 A

② 以开创它的系统研究的 George Boole 命名，集 S 的幂集 $\mathscr{P}(S)$ 常被叫做 S 的 Boole 集，并且记作 $\mathscr{B}(S)$. 术语"幂集"的确切意义在 ③ 中指出.

与 B 是不相交的(或不重迭的). A 与 B 的并(或逻辑和 $A\cup B$ 是使得或者 $d\in A$ 或者 $d\in B$ 的元 d 作成的子集. 联系着 $\cap$ 和 $\cup$ 的一个重要的性质是分配律:

(1) $$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

可以用图表示为



其中的阴影部分表示(1). 为了证明(1), 令 $x\in A\cap(B\cup C)$. 由于 $x\in B\cup C$, 所以或者 $x\in B$ 或者 $x\in C$, 又由于 $x\in A$, 所以或者 $x\in(A\cap B)$ 或者 $x\in(A\cap C)$. 这就证明了 $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 现在令 $y\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 于是或者 $y\in A\cap B$ 或者 $y\in A\cap C$, 无论哪种情况都有 $y\in A$, 并且 $y\in B$ 或 $y\in C$. 因此 $y\in A\cap(B\cup C)$. 于是 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$. 所以我们既有 $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 又有 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$, 从而我们得到(1).

我们还有另一个分配律:

(2) $$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

它从互换(1)中的 $\cup$ 和 $\cap$ 得到, 并且在这个意义上说它是(1)的对偶. 这个定律的图示和证明都留给读者. 进一步, 读者可以证明(2)是(1)的推论, 且由对称性, 也可证明(1)是(2)的推论.

对于一个集 S 的子集的任意集可以定义交与并. 令 Γ 是子集的一个集($=\mathscr{P}(S)$ 的子集). 那么我们定义 $\bigcap_{A\in\Gamma}A=\{x\mid x\in A$, 对于 Γ 中的每个 $A\}$ 和 $\bigcup_{A\in\Gamma}A=\{x\mid x\in A$, 对于 Γ 中的某个 $A\}$. 假如 Γ 是有限的, 比方说, $\Gamma=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, 那么对于交, 我们