数值分析

陈昌明

SHU ZHI FEN XI

厦门大学出版社

数　值　分　析

陈 昌 明

厦门大学出版社

内 容 提 要

本书介绍数值求解的基本方法及基本理论。主要内容包括插值逼近、最佳逼近、数值积分、数值微分、解线性方程组的直接法和迭代法、非线性方程和非线性方程组的解法、矩阵特征值问题的计算以及常微分方程初值问题的数值解法等。

本书可作为高等学校非计算数学专业的教材，也可作为科技人员等的参考书。

目　　录

第一章　引论……………………………………………… 1
§1　数值分析的意义与内容 ………………………… 1
§2　误差的来源 ……………………………………… 2
§3　误差的基本概念 ………………………………… 3
§4　数值运算的误差估计 …………………………… 6
§5　数值运算中应掌握的基本原则 ………………… 9
习题…………………………………………………… 13
第二章　插值逼近 ……………………………………… 15
§1　代数多项式插值………………………………… 16
§2　拉格朗日插值多项式…………………………… 19
§3　逐次线性插值法………………………………… 21
§4　差商与牛顿插值多项式………………………… 23
§5　埃尔米特插值…………………………………… 25
§6　高次多项式插值的问题………………………… 30
§7　分段低次插值…………………………………… 33
§8　三次样条插值…………………………………… 37
§9　三角插值和快速富里埃变换…………………… 45
习题…………………………………………………… 50
第三　最佳逼近 ………………………………………… 52
§1　正交多项式……………………………………… 52
§2　最佳一致逼近…………………………………… 56
§3　最佳平方逼近…………………………………… 66

§ 4　最小二乘法…………………………………………… 72
　　习题……………………………………………………… 78
第四章　数值积分与数值微分 ………………………… 81
§ 1　数值积分的基本概念与插值型求积公式…………… 81
§ 2　牛顿-柯特斯求积公式 ………………………………… 85
§ 3　梯形公式、抛物线公式及其复化公式 ……………… 88
§ 4　李查逊外推法与龙贝格求积法……………………… 95
§ 5　高斯型求积公式 ……………………………………… 100
§ 6　振荡函数积分和奇异积分的的数值计算 ………… 110
§ 7　数值微分 ……………………………………………… 113
　　习题 …………………………………………………… 119
第五章　解线性方程组的直接法………………………… 123
§ 1　高斯消去法 …………………………………………… 123
§ 2　选主元高斯消去法 …………………………………… 127
§ 3　三角分解法 …………………………………………… 133
§ 4　Doolittle 分解法与 Crout 分解法 ………………… 135
§ 5　平方根法与改进平方根法 …………………………… 139
§ 6　追赶法 ………………………………………………… 142
§ 7　向量范数和矩阵范数 ………………………………… 148
§ 8　直接法的误差分析 …………………………………… 153
　　习题 …………………………………………………… 159
第六章　解线性方程组的迭代法………………………… 162
§ 1　迭代法的收敛性及误差估计 ………………………… 162
§ 2　雅可比迭代法 ………………………………………… 165
§ 3　高斯-塞德尔迭代法…………………………………… 169
§ 4　松驰迭代法 …………………………………………… 172
　　习题 …………………………………………………… 177

第七章　矩阵特征值问题的计算…………………………… 179
§1　特征值的估计及误差问题 ………………………… 179
§2　幂法与反幂法 ………………………………………… 184
§3　雅可比方法 …………………………………………… 194
§4　QR 方法 ……………………………………………… 199
习题 ……………………………………………………… 212
第八章　非线性方程和非线性方程组的解法……………… 214
§1　平分区间法 …………………………………………… 214
§2　迭代法的基本理论 …………………………………… 216
§3　牛顿法 ………………………………………………… 225
§4　斯蒂芬森法 …………………………………………… 230
§5　弦割法 ………………………………………………… 233
§6　抛物线法 ……………………………………………… 238
§7　非线性方程组的解法 ………………………………… 241
习题 ……………………………………………………… 250
第九章　常微分方程初值问题的数值解法………………… 252
§1　引言 …………………………………………………… 252
§2　显式单步法的基本理论 ……………………………… 253
§3　几种常见的单步法 …………………………………… 258
§4　龙格-库塔方法………………………………………… 264
§5　线性多步法的基本理论 ……………………………… 271
§6　线性多步法的构造 …………………………………… 277
§7　步长的选取 …………………………………………… 282
§8　预估-校正算法………………………………………… 284
§9　高阶方程和一阶方程组的数值解法 ………………… 288
习题 ……………………………………………………… 298
参考文献………………………………………………………… 301

第一章 引 论

本章除了对数值分析的意义与内容作一概述外，主要介绍与误差有关的概念和问题.

§1 数值分析的意义与内容

对于刚涉足本书的读者来说，一个很自然的问题是：为什么要学数值分析呢？对这个问题作简单的回答并不难. 我们清楚，可用解析方法精确求解的数学问题只是些很特殊的类型，如次数不超过四次的代数方程、特殊的积分和微分方程等. 而对工程技术、科学试验、经济、军事等领域提出的许许多多数学问题来说，绝大多数是无法精确求解的，故需要进行数值求解. 数值求解的方法称为数值方法. 应用数值方法，就可以求得满足一定的数值要求的数值解(或称计算解). 通常，数值方法只是近似方法，但也有一些数值方法是精确方法. 即使是由精确方法求得的数值解，也难免带有由计算的不准确性而引起的误差，故数值解一般只是数学问题的近似解. 但是，没有理由因此而轻视数值方法. 试想一下，倘若没有数值方法提供的数值解，面对着成千上万无法精确求解的实际数学问题，人们除了束手无策外，还能做些什么？

数值分析亦称计算方法、数值方法等，其研究数值求解的方法和理论，包括数值方法的构造与应用、数值方法的误差估计、数值方法的收敛性和稳定性等. 在这里，我们有必要地指出，许多数值方法往往是通过数值试验而构造出来的，也有些理论结果是受到数值试验启发的. 而通过数值试验来验证所构造的数值方法是否

可行，是数值工作者经常采用的手段. 一个好的数值方法应具有可靠的理论依据、收敛性和稳定性好、工作量少等优点.

在步入数值分析的具体内容时，可能有初学者会对某些数值现象感到既难以理解又不习惯. 如对从小就熟悉的减法运算而言，竟然还存在着两相近数的减法运算的误差很大这一数值现象. 类似这种既难以理解又不习惯的感受正说明：数值分析与基础数学课程毕竟有不同之处. 可以相信，随着学习内容的逐步深入，不习惯的感受会逐步消失，甚至产生浓厚的学习兴趣.

§2 误差的来源

用数学方法求解一实际问题时，首先必须建立数学模型来描述这个问题. 为避免数学模型的复杂化而造成求解困难，常常需要进行某些简化处理. 如与实际问题有关的变量太多时，可把对实际问题影响不大的变量舍弃掉；有时甚至将变量当作常量处理. 诸如此类的简化处理使得所建立的数学模型只是实际问题的近似，这时数学模型本身就带有一种误差，这种误差称为模型误差.

数学模型中一般均含有一些参数，这些参数是人用观测工具观测到的，故难免带有人为或观测工具引起的误差，这种误差称为观测误差.

数学模型可能很复杂，甚至即使不复杂时，我们也往往不能精确求解它，这就需要对数学模型构造数值方法进行求解. 数学模型的精确解与数值方法的解之差称作方法误差，或称作截断误差.

当数值方法在计算机上实现运算时，因每次运算都可能因计算机字长的限制而引起一种误差，这种误差称作舍入误差，或称作计算误差.

因模型误差和观则误差涉及到与实际问题有关的专业知识，故这两种误差通常不在我们的考虑范围内，我们主要研究方法误

差和舍入误差.

§3 误差的基本概念

对于近似值而言,必须估计其对精确值的近似程度,否则,可以说近似值是毫无价值可言的.我们将引进有关概念,以用于刻划近似值的近似程度.

定义 1.1 设 x^* 是精确值 x 的近似值,称

$$E(x^*) = x - x^*$$

为近似值 x^* 的绝对误差.若已知 $|E(x^*)|$ 的一个上界,即存在 $\eta>0$,使得

$$|E(x^*)| \leqslant \eta$$

则称 η 为近似值 x^* 的绝对误差限.通常亦记 η 为 $\eta(x^*)$.

绝对误差是有量纲单位的.

通常精确值 x 是不知道的,因此也就无法求得近似值 x^* 的绝对误差.但是通过实际观测或其他途径,有时候可以估计出 x^* 的绝对误差限.若求得近似值 x^* 的绝对误差限 $\eta(x^*)$,那么就可以知道精确值位于区间 $[x^*-\eta, x^*+\eta]$ 内.

例 1.1 设 $x=\pi=3.14159265\cdots$,按照四舍五入的舍入原则,分别取 x 的近似值为

$$x_1^* = 3.14, \qquad x_2^* = 3.1416, \qquad x_3^* = 3.141593$$

对于经四舍五入原则而得到的近似值而言,总可以取其末位半个单位作为该近似值的绝对误差限.故 x_1^*、x_2^* 和 x_3^* 的绝对误差限分别为

$$\eta(x_1^*) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}, \eta(x_2^*) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}, \eta(x_3^*) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$$

我们将在下例中看到,只用绝对误差的概念,还不能"公平"地衡量近似值的近似程度.

例 1.2 取 $x=0.1$ 和 $y=99.9$ 的近似值分别为

$$x^{*}=0, \qquad y^{*}=100$$

显然

$$|E(x^{*})|=|E(y^{*})|=0.1$$

那么,能否根据上式就说 x^{*} 的近似程度同 y^{*} 的一样吗?显然不能!因为后者的近似程度确实比前者好.这个例子告诉我们,在考虑近似值的近似程度时,不能光看绝对误差的大小,还得看数值本身的大小.

定义 1.2 设 x^{*} 为精确值 x 的近似值,称

$$E_r(x^{*})=\frac{x-x^{*}}{x}=\frac{E(x^{*})}{x}$$

为近似值 x^{*} 的相对误差.若已知 $|E_r(x^{*})|$ 的一个上界,即存在 $\delta>0$,使得

$$|E_r(x^{*})|\leqslant\delta$$

则称 δ 为 x^{*} 的相对误差限.通常亦记 δ 为 $\delta(x^{*})$.

通常精确值 x 是不知道的,故实际计算中也取相对误差为

$$E_r(x^{*})=\frac{x-x^{*}}{x^{*}}=\frac{E(x^{*})}{x^{*}}$$

相对误差是无量纲单位的.

现在再回头来看例 1.2,易得

$$|E_r(x^{*})|=1>|E_r(y^{*})|=\frac{1}{999}$$

由此可见,y^{*} 的近似程度比 x^{*} 的好.

定义 1.3 若近似值 x^{*} 的绝对误差限是某一位上的半个单位,且该位到 x^{*} 的第一位非零数字共有 n 位,则称 x^{*} 具有 n 位有效数字.

将近似值 x^{*} 写成

$$x^{*}=\pm 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\times 10^{m} \tag{1.1}$$

若

$$|E(x^*)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

由定义 1.3 可知，x^* 具有 n 位有效数字. 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 均为 0，1，…，9 中的某个数字，$\alpha_1 \neq 0$，m 为整数.

回到例 1.1，由定义 1.3，x_1^*、x_2^* 和 x_3^* 分别具有 3、5 和 7 位有效数字.

关于有效数字，应注意以下三点：

(1) 为将有效数字这一概念施用到任一实数上，我们称精确值具有无穷多位有效数字.

(2) 近似值的有效数字位与其小数点后有几位数字并无直接关系.

例如，取 $x=\pi$ 和 $y=0.0537$ 的近似值分别为

$$x^* = 3.142, \qquad y^* = 0.054$$

注意到，x^* 和 y^* 的小数点后均有 3 位数字，但 x^* 有 4 位有效数字，而 y^* 却只有 2 位有效数字.

(3) 要注意近似值的正确写法.

例如，我们不能将 $x=1.995$ 的具有 3 位有效数字的近似值 $x^*=2.00$写成 $x^*=2$.

定理 1.1 设形如(1.1)的近似值 x^* 具有 n 位有效数字，则其相对误差 $E_r(x^*)$满足

$$|E_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{1-n}$$

反之，若 x^* 的相对误差 $E_r(x^*)$满足

$$|E_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} \times 10^{1-n}$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

证明 由(1.1)及 x^* 具有 n 位有效数字，可得

$$|x^*| \geqslant \alpha_1 \times 10^{m-1}, \qquad |E(x^*)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则

$$|E_r(x^*)| = \frac{E(x^*)}{|x^*|} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{\alpha_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{1-n}$$

反之,由

$$|x^*| \leqslant (\alpha_1 + 1) \times 10^{m-1}, \quad |E_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} \times 10^{1-n}$$

可得

$$\begin{aligned} |E(x^*)| &= |x^*||E_r(x^*)| \\ &\leqslant (\alpha_1 + 1) \times 10^{m-1} \times \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} \times 10^{1-n} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \end{aligned}$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字. ■

定理 1.1 表明,有效数字位越多,相对误差限越小;反之,相对误差限越小,有效数字位越多.

例 1.3 欲使$\sqrt{3}$的近似值的相对误差的绝对值不超过$\frac{1}{100}$,那么近似值应取几位有效数字?

解 由$\sqrt{3}=1.7\cdots$,可知 $\alpha_1=1$. 据定理 1.1,只要取有效数字位 $n=3$,就有

$$|E_r(x^*)| \leqslant \frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{1-n} < \frac{1}{100}$$

§4 数值运算的误差估计

定理 1.2 设 x_1^* 和 x_2^* 分别是精确值 x_1 和 x_2 的近似值,则

$$E(x_1^* \pm x_2^*) = E(x_1^*) \pm E(x_2^*) \tag{1.2}$$

$$E(x_1^* x_2^*) = x_1 E(x_2^*) + x_2^* E(x_1^*) \tag{1.3}$$

$$E\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = \frac{E(x_1^*)}{x_2^*} - \frac{x_1 E(x_2^*)}{x_2 x_2^*} \tag{1.4}$$

$$E_r(x_1^* \pm x_2^*) = \frac{1}{x_1 \pm x_2}[x_1 E_r(x_1^*) \pm x_2 E_r(x_2^*)] \tag{1.5}$$

$$E_r(x_1^* x_2^*) = E_r(x_2^*) + \frac{x_2^*}{x_1 x_2} E(x_1^*) \approx E_r(x_1^*) + E_r(x_2^*) \tag{1.6}$$

$$E_r\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = \frac{x_2}{x_2^* x_1} E(x_1^*) - E_r(x_2^*) \approx E_r(x_1^*) - E_r(x_2^*) \tag{1.7}$$

证明 $E(x_1^* \pm x_2^*) = (x_1 \pm x_2) - (x_1^* \pm x_2^*)$

$$= (x_1 - x_1^*) \pm (x_2 - x_2^*)$$

$$= E(x_1^*) \pm E(x_2^*)$$

$$E(x_1^* x_2^*) = x_1 x_2 - x_1^* x_2^*$$

$$= (x_1 x_2 - x_1 x_2^*) + (x_1 x_2^* - x_1^* x_2^*)$$

$$= x_1 E(x_2^*) + x_2^* E(x_1^*)$$

$$E\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = x_1 E\left(\frac{1}{x_2^*}\right) + \frac{E(x_1^*)}{x_2^*} = x_1\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2^*}\right) + \frac{E(x_1^*)}{x_2^*}$$

$$= \frac{E(x_1^*)}{x_2^*} - \frac{x_1 E(x_2^*)}{x_2 x_2^*}$$

$$E_r(x_1^* \pm x_2^*) = \frac{E(x_1^* \pm x_2^*)}{x_1 \pm x_2} = \frac{E(x_1^*) \pm E(x_2^*)}{x_1 \pm x_2}$$

$$= \frac{1}{x_1 \pm x_2}[x_1 E_r(x_1^*) \pm x_2 E_r(x_2^*)]$$

$$E_r(x_1^* x_2^*) = \frac{E(x_1^* x_2^*)}{x_1 x_2} = \frac{x_1 E(x_2^*) + x_2^* E(x_1^*)}{x_1 x_2}$$

$$= E_r(x_2^*) + \frac{x_2^*}{x_1 x_2} E(x_1^*) \approx E_r(x_2^*) + E_r(x_1^*)$$

$$E_r\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) = E_r\left(\frac{1}{x_2^*}\right) + \frac{x_2}{x_1 x_2^*} E(x_1^*)$$

$$= -E_r(x_2^*) + \frac{x_2}{x_1 x_2^*} E(x_1^*)$$

$$\approx E_r(x_1^*) - E_r(x_2^*) \qquad \blacksquare$$

显然,自变量的误差必然引起函数的误差,以下给出函数的误差估计.

设 x_i 的近似值为 $x_i^*(i=1,2,\cdots,n)$,则 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的近似值为 $y^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$. 利用泰勒展开式,可得 y^* 的绝对误差为

$$\begin{aligned} E(y^*) &= y - y^* \\ &= f(x_1,x_2,\cdots,x_n) - f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*) \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i}(x - x_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i} E(x_i^*) \end{aligned} \tag{1.8}$$

y^* 的相对误差为

$$\begin{aligned} E_r(y^*) &= \frac{E(y^*)}{y^*} \\ &\approx \frac{1}{y^*} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i} E(x_i^*) \\ &= \frac{1}{y^*} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}{\partial x_i} x_i^* E_r(x_i^*) \end{aligned} \tag{1.9}$$

例 1.4 设 $u^*=\frac{x^*}{y^* z^*}$,求 $E_r(u^*)$.

解 由(1.7)和(1.6)可得

$$\begin{aligned} E_r(u^*) &\approx E_r(x^*) - E_r(y^* z^*) \\ &\approx E_r(x^*) - E_r(y^*) - E_r(z^*) \end{aligned}$$

例 1.5 测得某圆锥体的底面半径 $r^*=10$ 米,高 $h^*=50$ 米,已知 r^* 和 h^* 的绝对误差限分别为 0.1 米和 0.2 米,求测得的圆锥体的体积的绝对误差限和相对误差限.

解 已知$|E(r^*)|\leqslant 0.1$米，$|E(h^*)|\leqslant 0.2$米. 而测得的圆锥体的体积为

$$V^* = \frac{1}{3}\pi r^{*2} h^*$$

由(1.8)可得

$$E(V^*) \approx \frac{\partial V(r^*,h^*)}{\partial r} E(r^*) + \frac{\partial V(r^*,h^*)}{\partial h} E(h^*)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^* h^* E(r^*) + \frac{1}{3}\pi r^{*2} E(h^*)$$

从而

$$|E(V^*)| \leqslant \frac{2}{3}\pi r^* h^* |E(r^*)| + \frac{1}{3}\pi r^{*2} |E(h^*)|$$

$$= 40\pi(\text{立方米})$$

即体积的绝对误差限为40π立方米. 而由

$$|E_r(V^*)| = \left|\frac{E(V^*)}{V^*}\right| \leqslant \frac{40\pi}{V^*} = 0.024$$

可知，体积的相对误差限为0.024.

§5 数值运算中应掌握的基本原则

一个好的数值方法不但方法误差要小，而且舍入误差也应能得到控制. 舍入误差若得不到控制，往往泛滥成灾，灾难性地影响数值解的精度，因此对舍入误差千万不可掉以轻心. 但是对舍入误差进行分析是项既复杂而又困难的工作. 试想一下，面对着大量的运算，能够对每次运算都进行舍入误差分析吗?况且舍入误差不但有大小之分，而且有正负之别，因此要估计舍入误差积累实际上有多大，几乎是办不到的. 虽然可以对每次运算的舍入误差做保守的估计，但由此而求得的舍入误差积累因比舍入误差的实际积累偏大得多，而显得没有什么实际意义. 因此寻找能较好地接近实际情

况的误差估计方法，是迫切需要的. 有关舍入误差的估计方法，在这里就不介绍了.

因对一个给定的数值方法的舍入误差积累进行定量分析极其困难，故人们为了判断舍入误差积累对数值结果的影响程度，对舍入误差进行了定性分析，建立了所谓数值稳定的概念.

定义 1.4 对于给定的数值方法，假设初始数据有舍入误差 ε_0，并设运算过程中产生的误差仅由 ε_0 引起. 若由 ε_0 引起的误差积累可以得到控制，则称该数值方法数值稳定，否则称该数值方法数值不稳定.

数值不稳定的数值方法是不可取的，而数值稳定的数值方法可以放心地应用. 为尽量减少误差造成的危害，应掌握如下几个基本原则：

(1) 避免做除数绝对值很小的除法运算.

设 $|x_2^*|$ 很小，由(1.4)有

$$\left|E\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\right| \leqslant \frac{|E(x_1^*)|}{|x_2^*|} + \frac{|x_1 E(x_2^*)|}{|x_2 x_2^*|} \approx \frac{|E(x_1^*)|}{|x_2^*|} + \frac{|x_1 E(x_2^*)|}{|x_2^*|^2}$$

由此可见，除法运算 $\dfrac{x_1^*}{x_2^*}$ 的绝对误差可能较大.

(2) 避免做两相近数的减法运算.

设 x_1^* 和 x_2^* 是两相近数，那么由

$$|E_r(x_1^* - x_2^*)| = \frac{|E(x_1^* - x_2^*)|}{|x_1^* - x_2^*|}$$

可知，减法运算 $x_1^* - x_2^*$ 的相对误差很大. 有时，对计算公式做适当的等价变换，可避免做两相近数的减法运算. 若无法避免做两相近数的减法运算，就应该让这两相近数多取几位效数字，以使得减法运算 $x_1^* - x_2^*$ 能有一定的有效数字位.

(3) 尽量简化计算步骤，减少运算次数.

由于每次运算均可能产生舍入误差，所以简化计算步骤，减少运算次数，可以减少产生舍入误差的机会，这对减少舍入误差具有

重要的意义.

(4) 防止较大数"吃掉"较小数可能造成的危害.

由于计算机上字长的限制,所以当参加运算的数在数量级上悬殊时,可能产生较大数"吃掉"较小数的数值现象.有时较大数"吃掉"较小数对数值结果影响不大,但有时却对数值结果造成严重危害,此时数值结果的精度大大降低.因此必须对具体情况作具体分析.有时,对计算公式做适当的等价变换,或对运算次序做适当的调整,可避免较大数"吃掉"较小数.

例 1.6 当 x 很大时,将 $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ 变换成 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$,可避免做两相近数的减法运算及除数绝对值很小的除法运算.

当 x_1 与 x_2 相近,并且 x_2 不是很小时,将 $\lg x_1-\lg x_2$ 变换成 $\lg\frac{x_1}{x_2}$,可避免做两相近数的减法运算.

当 x 与零相近时,将 $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 变换成 $\frac{\sin x}{1+\cos x}$,可避免做两相近数的减法运算及除数绝对值很小的除法运算.

例 1.7 求解一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0,b\neq 0)$$

时,若采用如下求解公式:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{c}{ax_1} \end{cases}$$

可避免可能产生的两相近数的减法运算.

例 1.8 若将求和公式 $\sum\limits_{i=1}^{n}ha_i$ 改写成 $h\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,可节省 $n-1$ 次乘法计算量.