

TB 115  
6

017617

# 有限单元法原理与应用

朱伯芳

水利电力出版社

## 内 容 提 要

本书主要内容包括有限单元法基本原理以及在杆系结构、弹性力学平面问题、空间问题、弹性薄板和薄壳、弹性厚板和厚壳、流体力学、热传导、非线性及塑性力学、岩石力学、土力学、徐变、结构动力反应、弹性稳定、断裂力学和结构最优设计等方面的应用，给出了一些基本的算法和实例。最后，还介绍了有限单元法中常用的数学方法：矩阵、线性代数方程组、变分法和加权余量法等基本知识。

## 有 限 单 元 法 原 理 与 应 用

朱 伯 芳

水利电力出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

1 2 0 1 工厂印刷

787×1092毫米 16开本 32十印张 737400字

1979年8月第一版 1979年8月北京第一次印刷

印数 00001—23250册 每册 3.30元

书号 15143·3442

# 前 言

这是为我国水电、土建等专业工程技术人员而写的一本书。它系统地介绍了有限单元法的基本原理及其在工程问题中的应用。

本书取材，力求实用。对于有限单元法的基本原理，着重阐述基本概念及推导计算公式所必须的原理和方法。至于收敛性等问题，只说明一些主要结论，不作详细推导。对于在实际工程中有用的计算方法，进行了全面、系统的阐述，并力求讲述清楚、给出具体计算公式，以便读者掌握必要的计算方法，俾使在实际工作中加以应用。

在写作方法上，尽量做到由浅入深，先易后难，便于自学。例如，先讲杆系结构，后讲连续介质；先用直观方法讲述平面三角形单元，待读者建立初步的力学概念后，再讲述比较严密的能量方法。

本书内容大致是这样安排的：

第一章杆系结构和第二章弹性力学平面问题是全书的导引。用直观方法讲述有限单元法的基本概念，并推导有关公式，以利于读者对有限单元法建立初步的力学概念。当然，这两章所介绍的计算方法在实际工程中也是经常用到的。

第三章单元分析和第四章整体分析，讲述有限单元法的基本原理，说明如何用能量方法进行单元和整体分析。不但对虚位移原理作了详细阐述，而且根据当前发展趋势，对最小势能原理、最小余能原理及混合能量原理也作了适当介绍。

第五章至第九章，讲述弹性力学问题，比较全面地介绍了各种平面和空间单元的计算方法，对各种单元的特性和优缺点进行了比较，说明了在实际工作中如何选择单元，列举了应用实例。

第十至第十二章讲述板壳力学问题，除了一般有限单元书籍中所介绍的矩形和三角形单元外，根据近年有限单元发展情况，还介绍了混合薄板单元、曲面薄壳单元、厚板和厚壳曲面单元、弹性半空间上的板等等。根据水工上的需要，还介绍了边界由弹性基础支承的壳体计算方法。

第十三和第十四章，讲述场问题，说明了流体力学和热传导问题的主要算法，详细阐述了实际工程中经常遇到的各种边界条件的处理，如流场的自由面和温度场的放热边界等等。

第十五至二十一章主要讲述有限单元法在各种非线性和复杂工程问题中的应用，包括塑性力学、岩石力学、土力学、徐变、结构动力学、弹性稳定及断裂力学等。有限单元法在这些方面的应用是十分成功的。这些问题都十分复杂，过去因缺乏有效的计算方法，只能在过分简化的条件下求出一些简单解答，计算条件与实际工程相差很远。应用有限单元法以后，已经可以针对实际的工程结构和实际的边界条件进行定量的分析计算了。因此可以为工程设计提供丰富的、能反映实际情况的计算成果，有利于设计质量的提高。

当前，结构设计正面临着自动化的前景，因此我们在第二十二章专门介绍了结构最优设计的原理和方法，说明如何把有限单元法与数学规划结合起来，利用电子计算机，实行自动化最优设计。这是结构设计现代化的一个方向，正孕育着一场巨大的变革。

读者只要学习过微积分和微分方程，就可以阅读本书。对于在有限单元法中经常要用到的矩阵、线性代数方程组、变分法和加权余量法，分别在第二十三至二十六章作了介绍。读者如果没有学习过这几方面的内容，可先阅读这几章。

作者本人是一个从事水利水电建设的工程师，本书读者对象又是水利水电专业的工程技术人员，所以本书的重点是工程应用。

本书内容，一部分取材于国内外有关文献和专著，一部分系作者本人的心得体会。书稿主要写于1973年至1975年，当时作者在一个水电工地工作，地处山区，图书资料十分缺乏，写作时间也比较少，而本书涉及范围又非常广泛，加之限于作者水平和精力，书中难免有许多缺点乃至错误，热情欢迎读者批评指正。

作 者

1978年11月

# 目 录

## 前 言

第一章 杆系结构	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 水平杆单元的刚度矩阵	3
§ 1-3 倾斜杆单元的刚度矩阵	5
§ 1-4 坐标转换	6
§ 1-5 结点平衡方程与整体刚度矩阵	7
§ 1-6 边界条件的处理	9
§ 1-7 梁单元的刚度矩阵	15
§ 1-8 梁单元荷载向结点的移置	17
§ 1-9 由位移转换矩阵建立整体刚度矩阵	18
§ 1-10 编码法建立整体刚度矩阵	20
§ 1-11 考虑轴向力和剪切变形的梁单元刚度矩阵	22
§ 1-12 温度荷载	27
§ 1-13 空间的梁单元刚度矩阵	28
第二章 弹性力学平面问题	35
§ 2-1 连续介质的离散化	35
§ 2-2 位移函数	37
§ 2-3 单元应变	38
§ 2-4 初应变	39
§ 2-5 单元应力	41
§ 2-6 等效结点力与单元刚度矩阵	43
§ 2-7 结点荷载	47
§ 2-8 结点平衡方程与整体刚度矩阵	50
§ 2-9 用编码法建立整体刚度矩阵	53
§ 2-10 计算实例	55
第三章 单元分析	58
§ 3-1 虚位移原理	58
§ 3-2 单元位移	60
§ 3-3 单元应变与应力	61
§ 3-4 结点力与单元刚度矩阵	62
§ 3-5 结点荷载	63
§ 3-6 虚位移原理应用实例 梁单元	65
§ 3-7 应变能和余应变能	67

§ 3-8	最小势能原理	68
§ 3-9	最小余能原理	71
§ 3-10	杂交单元	73
§ 3-11	杂交单元实例 平面矩形单元	75
§ 3-12	混合能量原理	77
§ 3-13	复合单元	79
<b>第四章</b>	<b>整体分析</b>	<b>81</b>
§ 4-1	结点平衡方程	81
§ 4-2	最小势能原理的应用	82
§ 4-3	最小势能解答的下限性质	83
§ 4-4	解答的收敛性	84
§ 4-5	子结构分析	85
<b>第五章</b>	<b>平面问题高次单元</b>	<b>87</b>
§ 5-1	矩形单元	87
§ 5-2	面积坐标	91
§ 5-3	高次三角形单元	93
<b>第六章</b>	<b>弹性力学轴对称问题</b>	<b>97</b>
§ 6-1	轴对称荷载	97
§ 6-2	非轴对称荷载	102
<b>第七章</b>	<b>弹性力学空间问题</b>	<b>106</b>
§ 7-1	常应变四面体单元	106
§ 7-2	体积坐标	112
§ 7-3	高次四面体单元	113
§ 7-4	六面体单元	116
<b>第八章</b>	<b>形函数、坐标变换与曲边单元</b>	<b>118</b>
§ 8-1	形函数定义	118
§ 8-2	一维形函数	119
§ 8-3	二维形函数	119
§ 8-4	三维形函数	121
§ 8-5	坐标变换	122
§ 8-6	位移函数	126
§ 8-7	单元应变	127
§ 8-8	刚度矩阵	130
§ 8-9	结点荷载	131
§ 8-10	数值积分	132
§ 8-11	应力修匀与降阶积分	135
§ 8-12	三角形、四面体和三棱体曲边单元	138
§ 8-13	曲边单元中的向量计算	142
§ 8-14	曲边单元算例	145
<b>第九章</b>	<b>各种平面和空间单元的比较、应用实例</b>	<b>149</b>

§ 9-1	各种平面单元的比较和选择	149
§ 9-2	各种空间单元的比较和选择	152
§ 9-3	拱坝应力分析	156
§ 9-4	支墩坝应力分析	161
§ 9-5	重力坝空间作用的分析	164
§ 9-6	土坝空间作用的分析	165
§ 9-7	隧洞衬砌应力分析	166
<b>第十章</b>	<b>弹性薄板</b>	<b>168</b>
§ 10-1	弹性薄板的弯曲	168
§ 10-2	矩形薄板单元	173
§ 10-3	三角形薄板单元	178
§ 10-4	薄板弯曲的能量关系	184
§ 10-5	常弯矩三角形混合薄板单元	187
§ 10-6	线性弯矩三角形混合薄板单元	188
§ 10-7	弹性基础上的板	191
<b>第十一章</b>	<b>弹性薄壳</b>	<b>195</b>
§ 11-1	局部坐标系中的单元刚度矩阵	195
§ 11-2	坐标转换、整体刚度矩阵	198
§ 11-3	局部坐标的方向余弦	200
§ 11-4	曲梁支承或加强的薄壳	202
§ 11-5	边界由弹性基础支承的薄壳	204
§ 11-6	算例	208
§ 11-7	曲面薄壳单元	210
<b>第十二章</b>	<b>弹性厚板和厚壳</b>	<b>216</b>
§ 12-1	厚板曲边单元	216
§ 12-2	厚壳曲面单元	219
§ 12-3	数值积分	228
§ 12-4	算例	229
<b>第十三章</b>	<b>流体力学问题</b>	<b>232</b>
§ 13-1	稳定渗流基本方程及其离散化	232
§ 13-2	稳定渗流平面问题	235
§ 13-3	稳定渗流空间问题	236
§ 13-4	非稳定渗流	237
§ 13-5	地震时动水压力	239
§ 13-6	用势函数 $\phi$ 表示的势流	240
§ 13-7	用流函数 $\psi$ 表示的势流	245
§ 13-8	自由面流动	247
<b>第十四章</b>	<b>热传导问题</b>	<b>251</b>
§ 14-1	热传导问题及其离散化	251
§ 14-2	显式计算	254

§ 14-3	隐式计算 .....	259
§ 14-4	算例 .....	261
<b>第十五章</b>	<b>非线性分析及塑性力学问题 .....</b>	<b>264</b>
§ 15-1	增量法 .....	265
§ 15-2	迭代法 .....	268
§ 15-3	塑性力学问题 .....	272
§ 15-4	高次单元在非线性分析中的应用 .....	275
<b>第十六章</b>	<b>岩石力学问题 .....</b>	<b>276</b>
§ 16-1	岩体节理单元 .....	276
§ 16-2	岩体节理的刚度系数 .....	280
§ 16-3	岩体节理和软弱夹层中的渗流 .....	283
§ 16-4	用初应力法分析岩体的应力、变形和稳定 .....	285
§ 16-5	用变模量法分析岩体的应力、变形和稳定 .....	287
§ 16-6	二维高次节理单元 .....	289
§ 16-7	三维节理单元 .....	295
<b>第十七章</b>	<b>土壤力学问题 .....</b>	<b>303</b>
§ 17-1	用主应力表示的土体应力-应变关系 .....	303
§ 17-2	用八面体应力表示的土体应力-应变关系 .....	307
§ 17-3	用样条函数表示的应力-应变关系 .....	310
§ 17-4	土体应力与变形计算 .....	313
§ 17-5	土体与结构的相互作用、接触单元 .....	314
§ 17-6	土体固结 .....	317
§ 17-7	土坝的应力、变形和稳定 .....	319
<b>第十八章</b>	<b>徐变问题 .....</b>	<b>322</b>
§ 18-1	初应变法 .....	322
§ 18-2	粘滞弹性体的徐变问题 .....	323
§ 18-3	混凝土的徐变问题 .....	325
§ 18-4	金属的徐变问题 .....	328
<b>第十九章</b>	<b>结构动力学问题 .....</b>	<b>329</b>
§ 19-1	运动方程 .....	329
§ 19-2	质量矩阵 .....	330
§ 19-3	阻尼矩阵 .....	335
§ 19-4	结构自振频率与振型 .....	337
§ 19-5	特征值问题解法 .....	338
§ 19-6	用振型组合法求解运动方程 .....	342
§ 19-7	用数值积分法求解运动方程 .....	344
§ 19-8	固体与流体的耦合运动 .....	351
§ 19-9	重力坝的地震应力 .....	353
§ 19-10	支墩坝的地震应力 .....	355
§ 19-11	拱坝的振动 .....	357



§ 19-12	土坝地震应力 .....	357
§ 19-13	圆柱形薄壳的地震反应 .....	359
§ 19-14	地下结构的非线性动力反应 .....	360
<b>第二十章</b>	<b>弹性稳定问题 .....</b>	<b>362</b>
§ 20-1	梁单元的几何刚度矩阵 .....	362
§ 20-2	板单元的几何刚度矩阵 .....	365
§ 20-3	整体分析 .....	367
§ 20-4	杆件结构算例 .....	368
§ 20-5	弹性薄板算例 .....	370
<b>第二十一章</b>	<b>断裂力学问题 .....</b>	<b>373</b>
§ 21-1	绪言 .....	373
§ 21-2	直接法 .....	375
§ 21-3	J-积分法 .....	377
§ 21-4	柔度法及贝克纳公式 .....	380
§ 21-5	畸形等参数单元 .....	383
§ 21-6	缝端奇异单元 .....	387
<b>第二十二章</b>	<b>结构最优设计 .....</b>	<b>394</b>
§ 22-1	结构最优设计的基本概念 .....	394
§ 22-2	结构最优设计的数学表现 .....	399
§ 22-3	逐步线性化方法 .....	401
§ 22-4	位移灵敏度 .....	405
§ 22-5	罚函数方法 .....	408
§ 22-6	无约束优化 .....	412
§ 22-7	杆件结构最优设计 .....	419
§ 22-8	支墩坝最优设计 .....	421
§ 22-9	拱坝最优设计 .....	424
<b>第二十三章</b>	<b>矩阵 .....</b>	<b>431</b>
§ 23-1	矩阵定义 .....	431
§ 23-2	矩阵的主要类型 .....	431
§ 23-3	矩阵的相等、加法和减法 .....	435
§ 23-4	数乘矩阵 .....	436
§ 23-5	矩阵乘法 .....	437
§ 23-6	行列式 .....	440
§ 23-7	逆矩阵 .....	442
§ 23-8	分块矩阵 .....	445
§ 23-9	正交矩阵 .....	449
§ 23-10	正定矩阵 .....	450
§ 23-11	矩阵的微分 .....	451
§ 23-12	矩阵的积分 .....	453
<b>第二十四章</b>	<b>线性代数方程组 .....</b>	<b>454</b>

§ 24-1	线性代数方程组 .....	454
§ 24-2	简单迭代法 .....	455
§ 24-3	赛德尔迭代法 .....	456
§ 24-4	超松弛迭代法 .....	457
§ 24-5	分块超松弛迭代法 .....	458
§ 24-6	直接解法 .....	459
§ 24-7	共轭斜量法 .....	463
§ 24-8	几种常用解法的比较 .....	465
§ 24-9	齐次线性方程组 .....	465
<b>第二十五章</b>	<b>变分法</b> .....	<b>467</b>
§ 25-1	函数的极值 .....	467
§ 25-2	泛函的极值 .....	468
§ 25-3	预备定理 .....	470
§ 25-4	一维问题的欧拉方程 .....	470
§ 25-5	平面问题的欧拉方程 .....	473
§ 25-6	空间问题的欧拉方程 .....	477
§ 25-7	求解变分问题的里兹法 .....	479
§ 25-8	求解变分问题的有限单元法 .....	482
<b>第二十六章</b>	<b>加权余量法</b> .....	<b>484</b>
§ 26-1	加权余量法概述 .....	484
§ 26-2	用加权余量法建立有限单元基本方程 .....	489
§ 26-3	弹性柱体的扭转 .....	493
§ 26-4	不稳定温度场 .....	496
§ 26-5	结构动力反应 .....	501
<b>参考文献</b>	.....	<b>503</b>

# 第一章 杆系结构

## § 1-1 概 述

当电子计算机问世以后，为了利用这一新的有力计算工具，首先对杆系结构采用了矩阵方法<sup>[57, 58]</sup>，接着又将杆系结构矩阵分析方法推广应用于连续介质，把连续介质离散化为有限个单元的集合进行分析，即狭义的有限单元法<sup>[31~33]</sup>。连续介质有限单元法和杆系结构矩阵分析方法的基本概念是相同的，即把一个结构看成是有限个单元的组合，这些单元在有限个结点上连接起来。其区别仅仅是，对于杆系结构，可直接把原来的杆、梁、柱等构件作为单元，而对于连续介质，不存在这样的自然单元，必须把原来的介质人为地划分为有限个块体，以这些块体作为计算的单元。在广义上说，杆系结构矩阵分析方法也可以包括在有限单元法中。基于这个原因，加上通过杆系结构可以比较形象地说明有限单元法的概念，所以我们首先说明杆系结构矩阵分析方法，以此作为连续介质有限单元分析的导引。当然杆系结构矩阵分析方法本身在实际工程中也有很大应用价值。

在求解任何超静定的力学问题时，应兼顾平衡条件、变形条件及物理条件三方面的要求。而解决问题的关键往往在于正确地分析变形条件。

如图1-1所示的桁架，在荷重 $P$ 作用下，各杆轴力等于多少？这是一个超静定问题。我们可以把三根杆件14、24、34看成是组成桁架的三个“单元”，而整个桁架则是这三个单

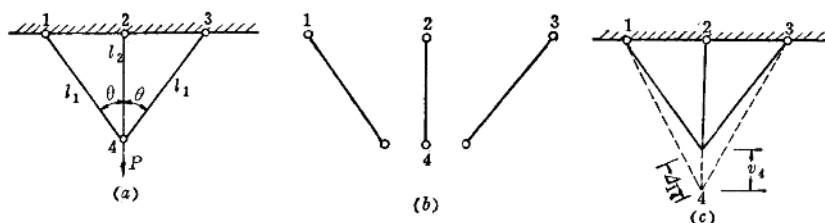


图 1-1  
(a) 桁架；(b) 单元；(c) 位移

元的“组合体”。每个单元的轴力 $N$ 是待求的未知数。设各杆件的几何及物理性质如下：

长度： $l_{14} = l_{34} = l_1$ ， $l_{24} = l_2$ ；

截面积： $A_{14} = A_{34} = A_1$ ， $A_{24} = A_2$ ；

弹性模量： $E_{14} = E_{34} = E_1$ ， $E_{24} = E_2$ 。

由于有三个单元交汇于结点4，只利用平衡条件是不能求出各单元的轴力的，必须分析变形条件。

由材料力学可知，等截面杆件在轴力 $N$ 作用下，杆端变位为

$$\Delta = \frac{Nl}{AE} \quad (a)$$

由于对称, 结点4的水平位移为零。设结点4的铅直位移为 $v_4$ , 而结点1、2、3被固定, 于是各单元的变位可计算如下

$$\Delta_{14} = v_4 \cos\theta, \quad \Delta_{24} = v_4, \quad \Delta_{34} = v_4 \cos\theta, \quad (b)$$

现在考虑结点4的平衡条件, 取结点4为脱离体(图1-2), 则 $y$ 方向的平衡要求

$$2N_{1y} + N_{2y} = P_c \quad (c)$$

式中 $N_{1y}$ 和 $N_{2y}$ 是各杆的杆端力在 $y$ 轴的投影。

由(a)式和(b)式可知

$$\left. \begin{aligned} N_{1y} &= N_1 \cos\theta = \frac{E_1 A_1}{l_1} \Delta_{14} \cos\theta = \frac{E_1 A_1 \cos^2\theta}{l_1} v_4 = k_1 v_4, \\ N_{2y} &= N_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} \Delta_{24} = \frac{E_2 A_2}{l_2} v_4 = k_2 v_4. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

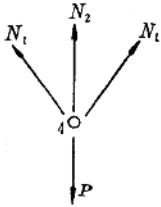


图1-2 结点4的平衡 式中 $k_1$ 、 $k_2$ 称为单元的刚度系数, 它的物理意义是当结点4的位移为1时的杆端力, 其数值决定于单元的几何性质和物理性质。例如, 单元14的刚度系数为

$$k_{14} = k_1 = \frac{E_1 A_1 \cos^2\theta}{l_1}.$$

单元24的刚度系数为

$$k_{24} = k_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2}.$$

将(d)式代入(c)式, 得到

$$(2k_1 + k_2)v_4 = P.$$

由此可求出结点4的位移为

$$v_4 = \frac{P}{2k_1 + k_2}. \quad (e)$$

式中的 $2k_1 + k_2$ 可称为结构的整体刚度系数。利用已求出的位移, 最后可求得各单元的轴力如下

$$\begin{aligned} N_{14} = N_{34} = N_1 &= \frac{N_{1y}}{\cos\theta} = \frac{k_1 v_4}{\cos\theta} = \frac{k_1 P}{(2k_1 + k_2) \cos\theta}, \\ N_{24} = N_2 &= k_2 v_4 = \frac{k_2 P}{2k_1 + k_2}. \end{aligned}$$

这种以位移作为基本未知量, 通过结点平衡方程求出结点位移, 再由位移反推出各单元的轴力的方法, 称为“位移法”。

通过上述例题, 可把有限单元法简述如下: 把一个结构看成是由有限个单元通过结点拼合起来的整体, 除去边界上被固定的结点外, 对可以产生位移的各结点, 利用平衡条件求出它们的位移, 然后由结点位移求出各单元内力。

也可以把各单元的内力作为基本未知量加以求解，即所谓“力法”，但其矩阵运算比位移法为复杂，故实际工作中力法采用不多，而广泛地采用位移法。

### § 1-2 水平杆单元的刚度矩阵

上节中各杆的刚度系数是一种特例，因杆的一端是固定的。作为一般形式，如图 1-3 所示桁架，杆的两端都可产生位移。为了循序渐进，在这一节我们先研究水平直杆  $ij$ ，如图 1-4 所示。

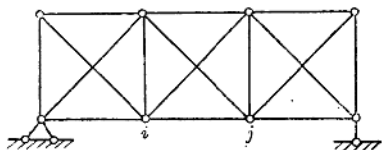


图 1-3 桁架

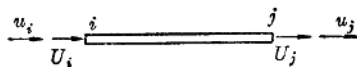


图 1-4 水平杆单元

杆单元两端各有一个水平结点位移，即  $u_i$  和  $u_j$ ，它具有两个自由度，它的刚度矩阵应该是二阶的。

杆的受力情况可分解为两种状态。

状态一： $u_i = u_i$ ， $u_j = 0$ 。

这时，结点  $j$  被固定，单元内的应变为

$$\varepsilon = -\frac{u_i}{l}$$

单元应力为

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Eu_i}{l}$$

单元左端结点力为（在材料力学中以拉应力为正，在有限单元法中，如图 1-4 所示，以向右的结点力为正，所以下式中加一负号）。

$$U_i = -A\sigma = \frac{AE}{l}u_i$$

单元右端结点力为

$$U_j = A\sigma = -\frac{AE}{l}u_i$$

状态二：

这种状态与状态一正好相反：

$$u_i = 0, u_j = u_j$$

单元应变为

$$\varepsilon = \frac{u_j}{l}$$

单元应力为

$$\sigma = \frac{Eu_j}{l}$$

单元左端结点力为 
$$U_i = -A\sigma = -\frac{AE}{l}u_j.$$

单元右端结点力为 
$$U_j = A\sigma = \frac{AE}{l}u_j.$$

把以上两种状态的结果叠加起来，得到左右两端都可变位情况下单元结点力为

$$U_i = \frac{AE}{l}u_i - \frac{AE}{l}u_j,$$

$$U_j = -\frac{AE}{l}u_i + \frac{AE}{l}u_j.$$

写成矩阵形式，得到

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [k]^e \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \quad (1-1)$$

式中

$$[k]^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

称为单元刚度矩阵。

单元轴力可写成

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \quad (1-3)$$

式中

$$[S] = \frac{AE}{l} [-1 \quad 1]. \quad (1-4)$$

在杆件结构中，通常以轴力作为广义应力，因此矩阵 $[S]$ 称为单元应力矩阵。

实际上，在结点 $i$ 和 $j$ ，除了水平位移外，还可产生垂直位移（但在小变形条件下，垂直结点位移对铰接杆的内力无影响）。我们可以把单元刚度矩阵扩展为四阶的形式，单元结点力为

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}. \quad (1-5)$$

这里引入了垂直结点位移 $v_i$ 、 $v_j$ 和垂直结点力 $V_i$ 、 $V_j$ ，并在刚度矩阵中添上了相应的零元素。

单元轴力为

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = [S] \{\delta\}^e, \quad (1-6)$$

其中 $\{\delta\}^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T$ 。

### § 1-3 倾斜杆单元的刚度矩阵

在铰接桁架中，经常遇到倾斜杆单元，如图1-5所示。在结点  $i$ ，结点位移为

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}.$$

其中  $u_i$  和  $v_i$  分别是水平和垂直结点位移分量。 $i$  点的结点力为

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}.$$

其中  $U_i$ 、 $V_i$  分别是结点力的水平和垂直分量。我们规定结点位移  $u_i$ 、 $v_i$  和结点力  $U_i$ 、 $V_i$  的符号如下：与坐标轴  $x$ 、 $y$  取相同方向者为正，反之为负。

首先分析斜杆的应变-位移关系。设杆单元的长度为  $l$ ，由几何关系可知

$$l^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2. \quad (a)$$

对上式两边求微分，得到

$$l dl = (x_j - x_i)(dx_j - dx_i) + (y_j - y_i)(dy_j - dy_i),$$

上式两边各除以  $l$ ，得

$$dl = \alpha(dx_j - dx_i) + \beta(dy_j - dy_i), \quad (b)$$

式中

$$\alpha = \cos \theta = \frac{x_j - x_i}{l}, \quad \beta = \sin \theta = \frac{y_j - y_i}{l}. \quad (c)$$

杆件受力变形后，结点  $i$  的坐标将从  $(x_i, y_i)$  改变为  $(x_i + u_i, y_i + v_i)$ ，即

$$dx_i = u_i, \quad dy_i = v_i.$$

同样

$$dx_j = u_j, \quad dy_j = v_j$$

代入 (b) 式，并除以  $l$  后，得到杆单元的应变如下

$$\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{\alpha}{l}(-u_i + u_j) + \frac{\beta}{l}(-v_i + v_j). \quad (d)$$

斜杆单元轴力为

$$N = AE\varepsilon = \frac{AE}{l}[\alpha(-u_i + u_j) + \beta(-v_i + v_j)]. \quad (1-7)$$

我们规定轴力  $N$  以拉力为正。

结点力的绝对值分别等于轴力  $N$  的水平和铅直分量，即

$$\left. \begin{aligned} U_i &= -N \cos \theta, & V_i &= -N \sin \theta, \\ U_j &= N \cos \theta, & V_j &= N \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

把式 (1-7) 代入上式，得到斜杆单元的结点力如下：

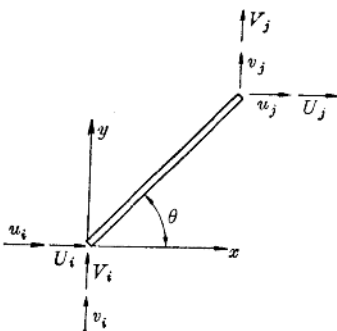


图 1-5 倾斜杆单元

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \\ = [k]^e \{\delta\}^e. \quad (1-8)$$

式中  $[k]^e$  是斜杆单元的刚度矩阵。上式也可写成分块矩阵形式如下

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \quad (1-9)$$

式中

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}, \{F_j\} = \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \end{Bmatrix}, \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}, \\ [k_{ii}] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}, [k_{ij}] = [k_{ji}] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 \end{bmatrix}, \\ [k_{jj}] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}, \alpha = \cos\theta, \beta = \sin\theta. \quad (1-10)$$

从式(1-8)可以看出, 单元刚度矩阵是对称的, 这并非偶然现象, 而是结构力学中功的互等定理的必然结果。

由式(1-7)可知斜杆单元应力矩阵为

$$[S] = \frac{AE}{l} [-\alpha \quad -\beta \quad \alpha \quad \beta]. \quad (1-11)$$

#### § 1-4 坐标转换

在上一节中, 斜杆单元刚度矩阵  $[k]$  是根据斜杆的应变-位移关系推导出来的, 它也可以根据坐标转换关系从式(1-5)中水平杆单元的刚度矩阵直接计算出来。

如图1-6所示, 在结构的整体坐标  $(x, y)$  之外, 再取局部坐标  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 其中  $\bar{x}$  轴平行于杆单元  $ij$  的轴线, 而  $\bar{y}$  轴垂直于杆单元的轴线。由水平杆单元结点力算式(1-5), 可知在局部坐标系  $(\bar{x}, \bar{y})$  中, 杆  $ij$  的结点力可由下式计算:

$$\{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (1-12)$$

或缩写成

$$\{\bar{F}\} = [\bar{k}]^e \{\bar{\delta}\}. \quad (1-13)$$

从图1-6可知, 在局部坐标和整体坐标之间, 力的转换关系为



$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_i &= U_i \cos \theta + V_i \sin \theta, \\ \bar{V}_i &= -U_i \sin \theta + V_i \cos \theta, \\ \bar{U}_j &= U_j \cos \theta + V_j \sin \theta, \\ \bar{V}_j &= -U_j \sin \theta + V_j \cos \theta. \end{aligned} \right\} (a)$$

写成矩阵形式，则为

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (b)$$

或缩写为  $\{\bar{F}\} = [T]\{F\}$ , (1-14)

式中

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

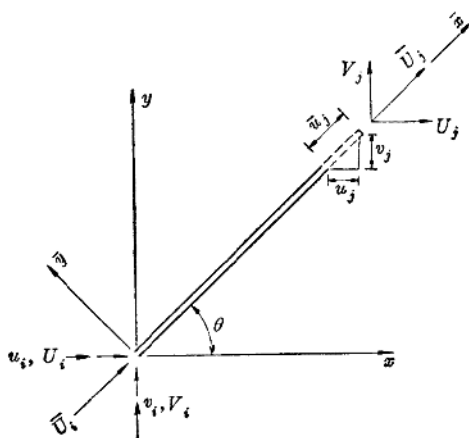


图 1-6

而  $\alpha = \cos \theta$ ,  $\beta = \sin \theta$ 。矩阵  $[T]$  可称为转换矩阵。

对于结点位移，在局部坐标与整体坐标之间，也存在着类似的关系：

$$\{\bar{\delta}\} = [T]\{\delta\}, \quad (1-16)$$

现在我们设法把局部坐标系中的杆单元刚度矩阵，转换成整体坐标系中的刚度矩阵。

将 (1-14)、(1-16) 二式代入 (1-13) 式，得到

$$[T]\{F\} = [\bar{k}]^e [T]\{\delta\}.$$

在上式两侧各左乘以  $[T]^{-1}$ ，得到

$$\{F\} = [T]^{-1} [\bar{k}]^e [T]\{\delta\}.$$

由于  $[T]$  是正交矩阵，所以  $[T]^{-1} = [T]^T$ ，由上式

$$\{F\} = [T]^T [\bar{k}]^e [T]\{\delta\}$$

或

$$\{F\} = [k]^e \{\delta\}, \quad (1-17)$$

式中

$$[k]^e = [T]^T [\bar{k}]^e [T]. \quad (1-18)$$

矩阵  $[k]^e$  是整体坐标系中的单元刚度矩阵。上式是把局部坐标系中的单元刚度矩阵  $[\bar{k}]^e$  转换为整体坐标系中单元刚度矩阵的基本公式。读者不难验证，将  $[\bar{k}]^e$  和  $[T]$  代入 (1-18) 式，得到的  $[k]^e$  与上节的 (1-8) 式是完全相同的。

### § 1-5 结点平衡方程与整体刚度矩阵

今从一个桁架中取出一个结点  $i$  来，如图 1-7 所示，设环绕  $i$  点共有三个杆单元，即  $ij$ 、 $im$ 、 $ip$ 。结点  $i$  承受的水平荷载分别为  $X_i$  和  $Y_i$ 。